NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ÉT. DELASSUS

Sur les équations de Lagrange du mouvement d'un système non holonome

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 3 (1924), p. 191-195

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3__191_1>

SUR LES ÉQUATIONS DE LAGRANGE DU MOUVEMENT D'UN SYSTÈME NON HOLONOME;

PAR ÉT. DELASSUS.

1. Pour ne pas interrompre les raisonnements, nous commencerons par démontrer une petite propriété des formes quadratiques.

Soit $F(x)$ une forme quadratique homogène des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, forme dont le discriminant n'est pas nul et qui est supposée définie, son signe constant pouvant être indifféremment *plus* ou *moins*.

Soient $\alpha_1(x), \ldots, \alpha_p(x)$ des fonctions linéaires et homogènes des x, fonctions en nombre moindre que n et que nous supposerons distinctes.

Nous considérons la forme bilinéaire

$$R(x, y) = \Sigma y\alpha(x) = \Sigma x\beta(y)$$

et nous nous proposons de montrer que la forme quadratique homogène à $n+p$ variables $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_p$

$$\Phi(xy) = F(x) + R(x, y)$$

est une forme à discriminant non nul.

Comme les hypothèses et la propriété à démontrer se conservent par un changement linéaire quelconque de variables, changement supposé non illusoire et à coefficients réels, on peut toujours, comme cela résulte de la théorie élémentaire de la décomposition en carrés, supposer que F a la forme réduite

$$F = \varepsilon(x_1^2 + \ldots + x_n^2) \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

On pourra alors écrire

$$\Phi(xy) = \sum_1^n \varepsilon \left[x_i - \frac{\varepsilon}{2} \beta_i(y) \right]^2 - \frac{\varepsilon}{4} \sum_1^n [\beta_i(y)]^2$$

La première somme est formée de n carrés indépendants et tout sera démontré si nous prouvons que la seconde, qui est une fonction Ψ des y, est réductible à une somme de p carrés indépendants ou, ce qui revient au même, que son discriminant n'est pas nul.

Si ce discriminant était nul, on pourrait trouver des valeurs des y non toutes nulles, annulant les $\frac{\partial \Psi}{\partial y}$, donc, en vertu de la formule d'Euler, annulant Ψ, donc aussi, en vertu de la forme de Ψ comme somme effective de carrés réels, annulant toutes les fonctions β. Pour ces valeurs des y non toutes nulles on aurait donc

$$\Sigma x \beta(y) \equiv 0$$

quels que soient les x, et cette identité écrite sous la forme

$$\Sigma y \alpha(x) \equiv 0$$

exprimerait que les $\alpha(x)$ ne sont pas indépendantes, ce qui est contraire à l'hypothèse.

L'hypothèse utilisée que F a un signe constant est d'ailleurs indispensable, sans elle la propriété de Φ n'existerait pas. On le voit immédiatement sur l'exemple simple obtenu en prenant

$$F = x_1 x_2, \qquad R = y_1 x_1.$$

2. Le principe de Dalembert conduit aux équations de Lagrange en montrant que les fonctions $q(t)$ qui définissent le mouvement du système matériel doivent vérifier les équations de Lagrange qui apparaissent ainsi en quelque sorte comme une condition nécessaire.

Il y a donc une réciproque à démontrer et l'on se borne généralement à la considérer comme évidente parce que les équations de Lagrange sont linéaires par rapport aux q'', donc déterminent sans ambiguïté les q quand on se donne les valeurs initiales q_0 et q'_0. Le raisonnement toutefois n'est rigoureux qu'à condition de montrer que ces équations linéaires aux q'' sont toujours résolubles sans jamais présenter le cas d'impossibilité ou le cas d'indétermination.

Pour un système holonome à paramètres indépendants la démonstration est immédiate ; $2T_2$ étant la portion du second degré de la force vive, les q'' figurent dans les équations de Lagrange par les $\frac{\partial T_2}{\partial q''}$ en entendant par là les dérivées $\frac{\partial T_2}{\partial q'}$ où l'on a mis les q'' à la place des q', le déterminant des inconnues dans nos équations linéaires n'est autre que le discriminant de T_2 et l'on sait qu'il n'est jamais nul.

Nous remarquerons que T_2 possède trois propriétés essentielles :

1° Son discriminant n'est jamais nul;

2° T_2 a un signe constant;

3° Ce signe est le signe plus,

et que la démonstration indiquée ne fait intervenir que la première.

3. Dans le cas des systèmes non holonomes ou dans celui des systèmes holonomes avec des paramètres non ramenés au nombre minimum, nous avons affaire encore à des équations linéaires, mais avec des inconnues auxiliaires qui sont les multiplicateurs de Lagrange.

En désignant par $x_1, \ldots, x_n$ les q'', par $y_1, \ldots, y_p$ les multiplicateurs, on a l'identité de Dalembert

$$\sum\left(\frac{\partial T_2}{\partial x} + \ldots\right)\omega + \Sigma y\alpha(\omega) \equiv 0,$$

devant être vérifiée quels que soient les ω, et les équations du second ordre de la liaison

$$\alpha_1(x) + \ldots = 0, \qquad \ldots, \qquad \alpha_p(x) + \ldots = 0,$$

p est forcément inférieur à n et les $\alpha(x)$ sont distinctes.

Nous avons ainsi $n+p$ équations linéaires aux $n+p$ inconnues x et y et l'on remarque qu'en posant

$$\Phi = T_2(x) + \Sigma y\alpha(x),$$

ces $n+p$ équations peuvent s'écrire

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} + \ldots = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial x_n} + \ldots = 0,$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial y_1} + \ldots = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial y_p} + \ldots = 0,$$

de sorte que le déterminant des $n+p$ inconnues est précisément le discriminant de la forme quadratique $\Phi(x, y)$, discriminant qui n'est pas nul par application de la propriété démontrée au début puisque T_2 possède les propriétés exigées pour la fonction F.

La propriété est donc démontrée et il est à remarquer le fait curieux que dans le cas où il n'y a pas de multiplicateurs de Lagrange, elle résulte uniquement de la première propriété de T_2, tandis que dans le cas des multiplicateurs elle résulte des deux premières propriétés de T_2, la seconde étant indispensable d'après la remarque faite.