Nouvelles annales de mathématiques

H. Beghin

Sur l'indétermination de certains problèmes de frottement

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 3 (1924), p. 343-347

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3__343_1>

SUR L'INDÉTERMINATION DE CERTAINS PROBLÈMES DE FROTTEMENT;

PAR H. BEGHIN.

Dans l'étude de l'équilibre avec frottement d'un système de solides invariables soumis à certaines forces données, la loi de Coulomb et les lois habituelles de la mécanique des solides invariables conduisent quelquefois à une indétermination.

Dans un récent article (*Nouvelles Annales*, 1923), j'ai émis l'avis que cette indétermination était due, non pas à l'imperfection de la loi de Coulomb, mais à l'insuffisance des données du problème. Pour être complètes, ces données devraient porter, non seulement sur les positions d'ensemble des solides, mais sur l'état initial de leurs déformations infiniment petites.

Je me propose, dans le présent article, de justifier cet avis en montrant que, suivant l'état initial de ces déformations, on obtiendra, dans la réalité, soit l'une, soit l'autre des solutions que la théorie des solides invariables indique comme également possibles.

Soit, par exemple, un solide S en contact aux points A_1, A_2, avec des obstacles fixes, et soumis, d'autre part, à des forces données F_1, F_2, ..., F_n.

Je suppose que l'étude de l'équilibre de ce solide au moyen de la loi de Coulomb et de la mécanique habituelle des solides invariables conduise aux deux solutions suivantes :

Première solution. — Existence de deux vecteurs réactions R_1, R_2, en A_1 et A_2, intérieurs aux cônes de frottement, formant, avec les forces F_1, F_2, ..., F_n, un système de vecteurs équivalent à zéro.

Deuxième solution. — Existence de deux vecteurs réactions R'_1, R'_2, en A_1 et A_2, et d'un système de forces d'inertie initiales $-m_1 J_1$, $-m_2 J_2$, ..., $-m_p J_p$, formant, avec les forces données F_1, F_2, ... F_n, un système de vecteurs équivalent à zéro, les réactions R_1, R_2 vérifiant la loi de Coulomb pour le déplacement imaginé [1].

Je suppose que le solide S soit *parfaitement élastique*, c'est-à-dire que ses efforts intérieurs à un instant quelconque soient fonctions *uniquement* de l'état des déformations à cet instant.

J'abandonne le solide S sans vitesse en faisant agir sur lui les forces données F_1, F_2, ..., F_n et les forces R_1, R_2 définies dans la *première solution.* Ces forces formant un système de vecteurs équivalent à zéro, le

---

[1] Je remarque incidemment que, si α, β, γ, ... sont les paramètres dont dépend la position géométrique du solide S, ces forces d'inertie initiales correspondent à des valeurs nulles des dérivées premières α', β', γ', ... des paramètres par rapport au temps, et à des valeurs, non toutes nulles, des dérivées secondes α'', β'', γ'', ... Dans ce cas particulier où les vitesses sont nulles, la distribution des accélérations dans le solide S est hélicoïdale, comme s'il s'agissait de vitesses.

solide S reste au repos, et ses déformations infiniment petites prennent, sous l'influence de ces forces, un état ($\mathcal{E}$), dans lequel chaque petit élément du corps est en équilibre sous l'action de celles des forces données qui lui sont appliquées et des efforts le long de sa surface, efforts qui sont caractérisés par la valeur de ces déformations elles-mêmes.

Si j'applique aux obstacles fixes en A_1 et A_2 les forces ρ_1, ρ_2 obtenues en changeant de sens les forces R_1, R_2, ces obstacles prennent un état ($\mathcal{O}$) de déformations infiniment petites.

Le solide S et les obstacles étant ainsi déformés, je les place au contact en A_1 et A_2 et supprime les forces R_1, R_2, ρ_1, ρ_2. Les éléments en présence au point A_1 exercent alors immédiatement l'un sur l'autre des réactions égales aux forces R_1, ρ_1 supprimées ([1]); de même, les éléments en présence au point A_2 exercent l'un sur l'autre des réactions respectivement égales à R_2 et à ρ_2. *Le système entier reste donc au repos, chaque élément conservant son état initial de déformation.*

J'imagine maintenant le solide S abandonné sans vitesse et soumis, d'une part, aux forces données F_1, F_2, ..., F_n, d'autre part, aux forces R'_1, R'_2 définies dans la *deuxième solution*, d'autre part enfin, à des forces Φ_1, Φ_2, ..., Φ_p, appliquées aux différents éléments qui composent S, et qui soient justement identiques aux forces d'inertie $-m_1 J_1$, ..., $-m_p J_p$ introduites par la *deuxième solution*.

([1]) Tout autre système R'_1, ρ'_1 de réactions au point A_1 entraînerait pour l'élément du corps S une force d'inertie $(R_1) - (R'_1)$, pour l'élément de l'obstacle une force d'inertie opposée $(\rho_1) - (\rho'_1)$; on vérifie immédiatement que leur direction serait en contradiction avec la loi de Coulomb.

Ces forces que je suppose agir sur S formant un système de vecteurs équivalent à zéro, le solide S reste au repos et prend un certain état $(\mathcal{E}')$ de déformations infiniment petites.

Si, de même, j'applique aux obstacles fixes, en A_1 et A_2, des forces ρ'_1 et ρ'_2 directement opposées aux forces R'_1 et R'_2, ces obstacles prennent un état $(\mathcal{O}')$ de déformations infiniment petites.

J'opère alors comme précédemment : le solide S et les obstacles sont placés au contact dans ces états $(\mathcal{E}')$ et $(\mathcal{O}')$ de déformations; puis je supprime les forces R'_1, R'_2, ρ'_1, ρ'_2, aussitôt remplacées par des réactions mutuelles qui leur sont respectivement égales; le solide S reste donc au repos, les états de déformations restant $(\mathcal{E}')$ et $(\mathcal{O}')$.

Je supprime enfin les forces $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_p$. A l'instant précis où disparaissent ces forces, rien n'est changé à l'état des efforts intérieurs, puisque ces efforts sont déterminés par les états $(\mathcal{E}')$ et $(\mathcal{O}')$; les petits éléments qui composent S ne sont donc plus en équilibre : chacun d'eux prend une force d'inertie, qui est précisément celle des forces $\Phi_1, \ldots, \Phi_p$ qui lui était appliquée et qui vient de disparaître. Ce sont là les forces d'inertie qui ont été prévues par la *deuxième solution*.

Le solide, ainsi abandonné dans l'état $(\mathcal{E}')$, *prend donc exactement le mouvement prévu par cette solution.*

Je remarque incidemment que le déplacement élémentaire du corps S conserve l'état $(\mathcal{E}')$ de ses déformations, puisque les forces d'inertie initiales prises séparément par ses différents éléments correspondent à un mouvement d'ensemble ne comportant aucune nouvelle déformation. Il en est de même pour l'état $(\mathcal{O}')$ des déformations des obstacles.

Pour simplifier les notations et mettre en évidence toute la simplicité du raisonnement, j'ai supposé un seul solide en contact avec des obstacles fixes. Mais il est manifeste que ce raisonnement s'applique sans modification à un nombre quelconque de solides en contact avec frottement entre eux et avec des obstacles fixes.

J'ai supposé d'autre part des corps parfaitement élastiques, dans lesquels les efforts intérieurs ne dépendent que de l'état des déformations. Il n'y a rien à changer à ce qui précède, si cette élasticité s'accompagne d'une certaine viscosité, c'est-à-dire si les efforts dépendent en outre des vitesses, puisque les vitesses initiales, dans la position considérée, sont supposées nulles. Mais ce qui précède ne s'applique pas si, dans les limites de l'observation, les corps sont susceptibles de prendre des déformations permanentes.

Je viens de montrer qu'en choisissant convenablement l'état initial des déformations infiniment petites du système considéré, on peut à volonté réaliser soit l'une, soit l'autre des solutions fournies par la mécanique habituelle des solides invariables. Si l'état initial est différent des états $(\mathcal{E}\mathcal{O})$, $(\mathcal{E}'\mathcal{O}')$, le problème est plus complexe à étudier : il est évidemment complexe d'essayer de distinguer, parmi les états de déformations, ceux qui réalisent soit l'une, soit l'autre de ces solutions.

L'objet de cette Note était d'ailleurs uniquement d'établir que, dans les cas d'indétermination des problèmes de frottement, *les diverses solutions doivent être acceptées au même titre, comme également réalisables, et que, par conséquent, il n'y a aucun choix à faire entre elles, tant que l'état initial des déformations n'est pas précisé.*