Solution de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 3 (1924), p. 395-396

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3__395_1>

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2445.

(1920, p. 279, 1922-1923 p. 160.)

Une ellipse étant donnée, il existe pour chaque tangente deux cercles passant par les foyers et tangents à cette droite. Les points de contact des deux cercles avec la droite sont sur les tangentes à la courbe aux sommets du petit axe; les deux cercles se coupent sous un angle constant.

G. F. et R. B.

SOLUTION

Par M. G. Roy.

Soit MM′ une tangente à l'ellipse qui rencontre les tangentes à la courbe aux sommets B et B′ du petit axe en M et M′ respectivement; si K est l'intersection de MM′ avec le grand axe, on a

$$(1) \qquad \overline{\mathrm{KF}}.\overline{\mathrm{KF'}} = \overline{\mathrm{KO}}^2 - (a^2 - b^2)$$

et

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{MM'}}^2 &= 4b^2 + (\overline{\mathrm{BM}} - \overline{\mathrm{B'M'}})^2\\ &= 4b^2 + (\overline{\mathrm{BM}} + \overline{\mathrm{B'M'}})^2 - 4\,\overline{\mathrm{BM}}.\overline{\mathrm{B'M'}}\\ &= 4b^2 + \overline{\mathrm{KO}}^2 - 4a^2;\end{aligned}$$

d'où

$$(2) \qquad \overline{\mathrm{KM}}^2 = \overline{\mathrm{KM'}}^2 = \overline{\mathrm{KO}}^2 - (a^2 - b^2).$$

Les relations (1) et (2) montrent que les cercles FF′M et FF′M′ sont tangents à MM′.

Si ω et ω' sont les centres de ces cercles et ρ et ρ' les rayons, on a en considérant les triangles semblables ωBM et M′mM (m pied de la perpendiculaire abaissée de M sur la tangente en B'), $\omega' B' M'$ et $M' m M$,

$$\rho = BM \cdot \frac{MM'}{2b}, \qquad \rho' = B'M' \cdot \frac{MM'}{2b},$$

et

$$\overline{B\omega} = \overline{BM} \cdot \frac{\overline{BM} - \overline{B'M'}}{\overline{B'B}}, \qquad \overline{B'\omega'} = \overline{B'M'} \cdot \frac{\overline{BM} - \overline{B'M'}}{\overline{B'B}},$$

les deux dernières relations donnent

$$\overline{\omega'\omega} = \frac{\overline{MM'}^2}{\overline{B'B}}.$$

Si V est l'angle sous lequel se coupent les deux cercles

$$\overline{\omega'\omega}^2 = \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos V$$

ou

$$\frac{\overline{MM'}^4}{4b^2} = \frac{\overline{MM'}^2}{4b^2}\left(\overline{BM}^2 + \overline{B'M'}^2\right) - 2\,\frac{\overline{MM'}^2}{4b^2}\,\overline{BM}.\overline{B'M'} \cos V$$

$$= \frac{\overline{MM'}^2}{4b^2}\left(\overline{MM'}^2 - 4b^2\right) + \frac{2a^2}{4b^2}\,\overline{MM'}^2 (1 - \cos V),$$

$$\cos V = \frac{a^2 - 2b^2}{a^2}.$$

Si $a = b\sqrt{2}$ les deux cercles sont orthogonaux.

Remarque au sujet de la question **2352** (1924-1925, p. 196).

La propriété qui fait l'objet de cette question est un cas particulier de la suivante :

Si deux surfaces réglées Σ et Σ' sont coupées par deux plans parallèles P et P' de telle façon que les sections soient respectivement équivalentes et si de plus les sections de Σ et Σ' par le plan π équidistant de P et P' sont équivalents, les volumes V et V' limités par Σ, P et P' d'une part, Σ', P et P' d'autre part sont équivalents.

Cette proposition est une conséquence immédiate de la formule de Sarrus.

L'ellipsoïde étant une surface réglée, le théorème ci-dessus lui est applicable. On peut d'ailleurs remplacer dans l'énoncé de la question **2352**, AA', BB' et CC' par trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde.

G. Roy.