NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. CERF

Sur un point de la théorie des complexes de droites

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 129-132

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__129_0>

SUR UN POINT DE LA THÉORIE DES COMPLEXES DE DROITES;

PAR G. CERF.

Dans un intéressant article paru sous ce titre [1], M. Lainé signale que Lie a cru, à tort, avoir démontré que les courbes d'un complexe de droites admettant un même élément linéaire de contact possèdent, au point commun, la même torsion; il cherche ensuite à déterminer les complexes qui jouissent de cette propriété. Il est possible d'indiquer une propriété générale des complexes de droites qu'on peut substituer à celle de Lie : *Pour toutes les courbes d'un complexe de droites admettant un même élément linéaire de contact* (que nous appellerons famille F de courbes) *il existe, en général, au point commun une même relation linéaire entre la courbure et la torsion.* Nous allons établir cette propriété [2], et, en application, résoudre le problème posé par M. Lainé.

Nous employons les notations de l'article cité; une droite quelconque a pour équations

$$x = az + f,$$
$$y = bz + g,$$

l'équation du complexe est prise sous la forme

$$g = \psi(a, b, f),$$

ψ étant supposée analytique dans le domaine du point (o, o, o); considérons la famille F relative à l'élément linéaire porté par l'origine des coordonnées suivant Oz, cas auquel on peut, *en général*, ramener la question proposée et supposons que le plan

[1] *Nouvelles Annales*, 5ᵉ série, t. III, 1925, p. 300.

[2] Le même sujet a été traité récemment, de façon géométrique, par M. B. Gambier. Voir *C. R.*, t. 181, p. 18.

tangent au cône du complexe de sommet O le long de Oz soit pris comme plan des xz; l'équation de ce cône étant

$$\psi\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 0\right) = 0,$$

la position spéciale des axes de coordonnées entraîne

$$\psi(0, 0, 0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial\psi}{\partial a}(0, 0, 0) = 0,$$

c'est-à-dire que le développement de g est de la forme

$$g = hb + kf + la^2 + \ldots,$$

h, k, l sont des constantes, les termes non écrits sont de degré au moins égal à 2 et inutiles à considérer pour la suite. Ce développement vaut aussi dans le cas où le cône du complexe comprend un plan contenant Oz, ce plan étant pris comme plan des xz. Nous supposerons par la suite que h est différent de 0, c'est-à-dire que Oz n'est pas une génératrice multiple du cône complet; si k est différent de 0, le plan tangent aux cônes relatifs aux différents points de Oz, le long de Oz, tourne autour de Oz; si k est nul, Oz est une droite singulière du complexe, et comme h est différent de 0 le point exceptionnel sur cette droite n'est pas l'origine.

Occupons-nous maintenant d'une courbe particulière quelconque C de la famille F; sur cette courbe, nous choisissons z comme paramètre, les lettres accentuées désigneront les dérivées prises par rapport à z, l'indice 0 indiquera que les valeurs sont prises à l'origine; le sens positif sur la courbe est choisi pour que $s'_0 = +1$, s désignant l'arc. La courbe C est intégrale de l'équation de Monge

$$(1) \qquad y - y'z = hy' + k(x - x'z) + lx'^2 + \ldots;$$

pour $z = 0$, x, y, x', y' sont nuls sur C. Prenons la dérivée de (1) par rapport à z, x et y étant les fonctions de z qui définissent C,

$$(2) \qquad -zy'' = hy'' - kzx'' + 2lx'x'' + \ldots,$$

tous les termes non écrits sont nuls à l'origine ainsi que leurs dérivées premières. On déduit de (2) que y''_0 est nul, ce qui concorde avec le fait que le plan des xz est osculateur à C en O.

Prenons la dérivée de (2)

$$(3)\qquad -zy''' - z'y'' = hy''' - kzx''' - kx'' + 2lx''^2 + 2lx'x'' + \ldots,$$

les termes non écrits sont nuls en O et l'on obtient la relation

$$(4)\qquad hy_0''' - kx_0'' + 2lx_0''^2 = 0.$$

Désignons par R et T les rayons de courbure et de torsion de C en O; en observant que les dérivées qui figurent dans (4), qui sont prises par rapport à z, ont la même valeur en O que les dérivées du même nom prises par rapport à s, on constate que

$$\frac{1}{RT} = y_0''', \qquad \frac{1}{R} = x_0'',$$

ce qui permet d'écrire (4) sous la forme

$$(5)\qquad \frac{h}{T} + \frac{2l}{R} - k = 0$$

et démontre la propriété énoncée.

La signification du rapport $\frac{2l}{k}$ est simple; il représente évidemment le rayon de courbure de la courbe du complexe située dans le plan des xz, tangente à C en O, pourvu que l et k ne soient pas nuls simultanément.

Supposons k différent de 0, ce qui est le cas général. Pour que les courbes de la famille F possèdent en O la même torsion, il faut : ou bien qu'elles y possèdent la même courbure, ou bien que l soit nul.

La première hypothèse est à écarter car elle entraîne que x_0'' a la même valeur pour toutes les courbes F; comme y_0'' est nul, cela est en contradiction avec le théorème d'existence des intégrales de l'équation de Monge; la deuxième hypothèse exige que le cône du complexe relatif à O possède trois génératrices au moins dans le plan des xz.

Si maintenant la propriété doit être vraie en général, chacun des cônes du complexe doit se décomposer en plans (ou se réduire à un plan); on trouve alors immédiatement les complexes linéaires et les complexes spéciaux, qui sont formés des tangentes à une développable. En se servant de résultats démontrés par Lie [1] on constate que ce sont les seuls cas possibles.

---

[1] *Liniengeometrie u. Bhrstrf.* (*Leipziger Berichte*, t. 49, 1897, p. 688).

Il y aurait d'autres observations à présenter et quelques précisions à apporter aux indications qui précèdent; nous nous bornons à faire remarquer que les complexes spéciaux relatifs à une développable quelconque ont échappé à M. Lainé parce qu'ils correspondent d'après ses notations (page 305) au cas où $\theta(a)$ est identiquement nul alors que ses calculs supposent que cette expression est différente de 0.