PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

A. COSTE

La catégorie des objets au-dessus d'un objet d'une catégorie

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1964, tome 1, fascicule 1
« Exposés sur les CATEGORIES », , exp. n° 7, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1964__1_1_A4_0>

faculté des sciences de lyon

SEMINAIRE D'ALGEBRE
1963-1964
2° niveau

7. LA CATEGORIE DES OBJETS AU-DESSUS D'UN OBJET D'UNE CATEGORIE

par A.Coste

Cet exposé a pour but de transcrire dans le cas général quelques notions et propositions établies par A.Grothendieck dans un cas particulier, dans [2]. Pour les applications voir [6] et [7]

1. Définitions.

Dans tout cet exposé $\mathbb{C}$ désignera une catégorie sur laquelle on ne fera pour l'instant aucune hypothèse, et S un objet choisi une fois pour toutes dans la catégorie $\mathbb{C}$. Si X est un objet de $\mathbb{C}$ et φ un morphisme de X dans S, on dira que le couple (X,φ) est un <u>objet au-dessus de</u> S. Par abus d'écriture et si aucune confusion n'est possible (ce qui est rare) on désignera simplement par X un objet au-dessus de S, le morphisme φ étant sous-entendu. Si l'on considère S comme objet au-dessus de lui-même, ce sera toujours muni du morphisme identique.

On dira encore que X est un S-<u>objet</u>, que S est l'<u>objet de base</u> du S-objet X, et que φ est le <u>morphisme structural</u> du S-objet X.

Si (X, φ) et (Y, ψ) sont deux S-objets, on appelèra morphisme de X dans Y au-dessus de S, ou S-morphisme de X dans Y, un morphisme u de X dans Y (au sens de $\mathbb{C}$) tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & Y \arrow[dl, "\psi"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

<u>Proposition</u> 1. <u>Les objets au-dessus de</u> S <u>munis des S-morphismes forment une catégorie</u>.

Si X,Y,Z sont trois S-objets, u un S-morphisme de X dans Y, v un S-morphisme de Y dans Z, v.u est un morphisme (dans $\mathbb{C}$) de X dans Z et

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[dr, dotted, "\varphi"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, dashed, "\psi"] & Z \arrow[dl, "\theta"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

$$\theta . v . u = \psi . u = \varphi ,$$

donc MOR_1 est vérifié; 1_X est aussi un S-morphisme, donc MOR_2 est vérifié. On notera $Hom_S(X,Y)$ l'ensemble des S-morphismes de X dans Y; c'est un sous-ensemble de $Hom_{\mathbb{C}}(X,Y)$.

Soit (X,φ) un S-objet : on appelle S-<u>section</u> de X un S-morphisme de S dans X; autrement dit une S-section de X est un morphisme $\psi : S \longrightarrow X$ tel que $\varphi.\psi = 1_S$.

<u>Exemple</u> : soit $\mathbb{T}$op la catégorie des espaces topologiques munis des applications continues; si X est un objet de $\mathbb{T}$op, on appelle espace découpé de base X un X-objet; en particulier, les faisceaux de base X peuvent être considérés comme des X-objets (cf.[1]).

2. <u>Produit de deux S-objets</u>.

Soit (M_1,φ_1) et (M_2,φ_2) deux S-objets; conformément aux définitions générales (cf.[3], par exemple), on appelera produit direct de (M_1,φ_1) et (M_2,φ_2) un triplet $((P,\lambda),p_1,p_2)$, où (P,λ) est un S-objet, $p_i \in Hom_S(P,M_i)$ $(i = 1,2)$ tel que pour tout S-objet T, $f \longrightarrow (p_1.f, p_2.f)$ soit une bijection de $Hom_S(T,P)$ sur $Hom\ (T,M_1) \times Hom\ (T,M_2)$.

<u>Proposition</u> 2. <u>Si dans</u> $\mathbb{C}$ <u>le produit fibré de</u> φ_1 <u>et</u> φ_2 <u>au-dessus de</u> S <u>existe, alors le produit direct des</u> S-<u>objets</u> (M_1, φ_1) <u>et</u> (M_2,φ_2) existe.

Soit en effet, (P,p_1,p_2) le produit fibré de φ_1 et φ_2 au-dessus de S, et soit $\lambda = \varphi_1.p_1 = \varphi_2.p_2$; alors $((P,\lambda),p_1,p_2)$ est le produit direct de M_1 et M_2, car p_1 et p_2 sont des S-morphismes et la seconde condition résulte de la définition des produits fibrés.

On notera $M_1 \times_S M_2$ le produit direct des S-objets (M_1,φ_1) et (M_2,φ_2).

Soit S' un objet de $\mathbb{C}$, si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(S,S')$, et si (X,φ) est un S-objet, $(X,f.\varphi)$ est un S'-objet.

Proposition 3. *Si f est un monomorphisme, alors le produit direct des S'-objets $(M_1,f.\varphi_1)$ et $(M_2,f.\varphi_2)$ existe si et seulement si le produit direct des S-objets (M_1,φ_1) (M_2,φ_2) existe.*

Si $((P,\lambda),p_1,p_2)$ est le produit direct des S-objets (M_1,φ_1) et (M_2,φ_2), alors $((P,f.\lambda),p_1,p_2)$ est le produit direct des S'-objets $(M_1,f.\varphi_1)$ et $(M_2,f.\varphi_2)$, et réciproquement; en effet, puisque f est un monomorphisme, $f.\varphi_1.p_1 = f.\varphi_2.p_2$ entraine $\varphi_1.p_1 = \varphi_2.p_2$ et p_1 et p_2 sont des S'-morphismes.

Dans ce qui suit on supposera (ce qui n'est pas absolument nécessaire) que la catégorie $\mathbb{C}$ est à 2-produits fibrés ([4]). Les produits directs des S-objets existeront toujours, mais la plupart des résultats que nous allons établir supposeront simplement l'existence des produits que nous écrirons.

Proposition 4. *$X \times_S Y$ est un bifoncteur covariant en X et Y dans $\mathbb{C}_S$.*

Soient X' et Y' deux S-objets, $(X' \times_S Y', p_1', p_2')$ leur produit direct, f un S-morphisme de X dans X', g un S-morphisme de Y dans Y'; $f.p_1$ (resp. $g.p_2$) sont des S-morphismes de $X \times_S Y$ dans X' (resp. Y'), donc par définition, il existe un unique S-morphisme (qu'on notera $f \times_S g$) de $X \times_S Y$ dans $X' \times_S Y'$ tel que :

$$p_1'.(f \times_S g) = f.p_1$$

$$p_2'.(f \times_S g) = g.p_2$$

et si par exemple X, X', X'', Y sont quatre S-objets, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
X \times_S Y \arrow[r, "f \times_S 1_Y"] \arrow[d, "p_1"'] & X' \times_S Y \arrow[r, "f' \times_S 1_Y"] \arrow[d, "p_1'"'] & X'' \times_S Y \arrow[d, "p_1''"'] \\
X \arrow[r, "f"'] & X' \arrow[r, "f'"'] & X''
\end{tikzcd}$$

est commutatif, chaque carré l'étant par définition de $f \times_S 1_Y$ d'où la proposition.

Proposition 5. *Pour tout S-objet X, la première (resp. la seconde) projection de $X \times_S S$ (resp. $S \times_S X$) est un isomorphisme de $X \times_S S$ (resp. $S \times_S X$) sur X.*

Soit φ le morphisme structural de X dans S; si T est un S-objet, le seul S-morphisme de T dans S est le morphisme structural ψ de T dans S, et si f est un S-morphisme de T dans X, on a nécessairement $\psi = \varphi . f$, donc $(X, 1_X, \varphi)$ est un produit direct de X et S; la proposition en résulte immédiatement.

Si T est un S-objet, $g : T \to X$, $h : T \to Y$ deux S-morphismes, on désignera par $(g,h)_S$ le S-morphisme $f : T \to X \times_S Y$ tel que

$p_1 . f = g$ et $p_2 . f = h$.

Corollaire. Avec les notations ci-dessus et celles de la proposition 5, l'isomorphisme de X sur $X \times_S S$ (resp. sur $S \times_S X$) est $(1_X, \varphi)_S$ (resp. $(\varphi, 1_X)_S$).

3. Changement d'objet de base.

Soient S et S' deux objets de $\mathbf{C}$, φ un morphisme de S' dans S qui fait de S' un S-objet. Pour tout S-objet X, considérons le produit $X \times_S S'$, et soient p et π' ses projections dans X et S' respectivement. Muni de π' ce produit est un S'-objet. Quand on le considère comme tel, on le désigne par $X_{(S')}$ ou $X_{(\varphi)}$. On dit que c'est l'objet obtenu par extension de l'objet de base de S à S', au moyen du morphisme φ, ou l'image réciproque de X par φ.

Si π est le morphisme structural de X, θ le morphisme structural de $X \times_S S'$, considéré comme S-objet, le diagramme :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi"'] & X_{(S')} \arrow[l, "p"'] \arrow[d, "\pi'"] \arrow[dl, dashed, "\theta"] \\ S & S' \arrow[l, "\varphi"] \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Si X et Y sont deux S-objets, pour tout S-morphisme f de X dans Y, on note $f_{(S')}$ le S'-morphisme $f \times_S 1_{S'} : X_{(S')} \longrightarrow Y_{(S')}$. On dit que $f_{(S')}$ est l'image réciproque du morphisme f par φ. $X \rightsquigarrow X_{(S')}$ est ainsi un foncteur covariant en X de la catégorie des S-objets dans celle des S'-objets.

Proposition 6. Soient S" un objet de $\mathcal{C}$, φ' un morphisme de S" dans S', alors pour tout S-objet X, il existe un isomorphisme fonctoriel canonique du S"-objet $(X_{(\varphi)})_{(\varphi')}$ sur le S"-objet $X_{(\varphi.\varphi')}$.

Remarquons d'abord que si T est un S'-objet (donc aussi un S-objet au moyen de φ), tout S-morphisme $g : T \longrightarrow X$ s'écrit d'une seule manière $g = p.f$, où f est un S'-morphisme $T \longrightarrow X_{(S')}$; $X_{(S')}$ peut donc être considéré comme solution d'un problème d'application universelle (cf.[5]).

Considérons alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
X & \xleftarrow{\;p\;} & X_{(\varphi)} & \xleftarrow{\;p'\;} & (X_{(\varphi)})_{(\varphi')} \\
{\scriptstyle \pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi'} & & \downarrow{\scriptstyle \pi''} \\
S & \xleftarrow[\;\varphi\;]{} & S' & \xleftarrow[\;\varphi'\;]{} & S''
\end{array}$$

et soit T un S"-objet, ψ son morphisme structural, g un S-morphisme de T dans X (T étant considéré comme S-objet de morphisme structural $\varphi.\varphi'.\psi$). Comme T est aussi un S'-objet de morphisme structu- $\varphi'.\psi$ on peut écrire $g = p.g'$, où g' est un S'-morphisme de T dans $X_{(\varphi)}$, puis $g' = p'.g''$, où g" est un S"-morphisme de T dans $(X_{(\varphi)})_{(\varphi')}$, ce qui démontre la proposition en raison de l'unicité de la solution d'un problème d'application universelle.

On pourra exprimer ce résultat en écrivant par exemple :

$$(X_{(S')})_{(S'')} = X_{(S'')}$$

ou pour éviter les confusions :

$$(X \times_S S') \times_{S'} S'' = X \times_S S''$$

(à un isomorphisme canonique près).

On a qualifié de fonctoriel cet isomorphisme; en effet, on a la même formule de transitivité sur les morphismes :

$$(f_{(S')})_{(S'')} = f_{(S'')} \text{ pour tout S-morphisme } f : X \longrightarrow Y.$$

Corollaire 1. Si X et Y sont deux S-objets, il existe un isomorphisme fonctoriel canonique du S'-objet $X_{(S')} \times_{S'} Y_{(S')}$ sur le S'-objet $(X \times_S Y)_{(S')}$.

On peut en effet écrire, à des isomorphismes canoniques près $(X\times_S S')\times_{S'}(Y\times_S S') = X\times_S(Y\times_S S') = (X\times_S Y)\times_S S'$; pour les morphismes on a les formules analogues :

$$(u_{(S')},v_{(S')})_{S'} = ((u,v)_S)_{(S')}$$

pour tout couple de S-morphismes $u : T\to X$ et $v: T\to Y$.

Ceci revient à dire que le foncteur image réciproque $X_{(S')}$ commute à la formation des produits.

Corollaire 2. Soient Y un S-objet, $f : X\to Y$ un morphisme qui fait de X un Y-objet (et donc un S-objet). L'objet $X_{(S')}$ s'identifie alors au produit $X\times_Y Y_{(S')}$, la projection de $X\times_Y Y_{(S')}$ sur $Y_{(S')}$ s'identifiant à $f_{(S')}$.

En effet, si ψ est le morphisme structural de Y on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
S' \arrow[d, "\varphi"'] & Y_{(S')} \arrow[l, "\psi_{(S')}"'] \arrow[d, "p"] & X_{(S')} \arrow[l, "f_{(S')}"'] \arrow[d, "p'"] \\
S & Y \arrow[l, "\psi"] & X \arrow[l, "f"]
\end{tikzcd}$$

Proposition 7. *Soient* $f : X\to X'$, $g : Y\to Y'$ *deux* S-*morphismes qui sont des monomorphismes, alors* $f\times_S g$ *est un monomorphisme* .

En effet, soient u et v deux S-morphismes d'un S-objet T dans $X\times_S Y$, p et q (resp. p' et q') les projections de $X\times_S Y$ sur X et Y((resp. de $X'\times_S Y'$ sur X' et Y'); $(f\times_S g).u = (f\times_S g).v$ entraine $p'.(f\times_S g).u = p'.(f\times_S g).v$, soit $f.p.u = f.p.v$, et comme f est un monomorphisme $p.u = p.v$; de même q étant un monomorphisme $q.u = q.v$, donc $u = v$ (par définition du produit direct).

Corollaire. Si f est un monomorphisme de X dans Y (S-objets), alors pour toute extension $\varphi : S'\to S$ de l'objet de base, $f_{(S')} : X_{(S')}\to Y_{(S')}$ est un monomorphisme.

En effet, $f_{(S')} = f\times_S 1_{S'}$, par définition.

Remarque : Plus généralement, soit P une propriété des morphismes de la catégorie $\mathcal{C}_S$; considérons les deux propositions suivantes :

a) si $f : X \to X'$ et $g : Y \to Y'$ sont deux S-morphismes possédant la propriété P, $f\times_S g$ possède la propriété P.

b) si $f : X \to Y$ est un S-morphisme possédant la propriété P, tout S'-morphisme $f_{(S')} : X_{(S')} \to Y_{(S')}$ déduit de f par extension de l'objet de base, possède la propriété P.

Alors, si pour tout S-objet X le morphisme identique possède la propriété P (ce qui est en général facile à vérifier), a) entraine b), car $f_{(S')} = f\times_S 1_{S'}$.

Si le composé de deux S-morphismes possédant la propriété P, possède la propriété P (ce qui est aussi facile à vérifier), alors b) entraine a , car $f\times_S g = (1_{X'}\times_S g).(f\times_S 1_Y)$

$$X\times_S Y \xrightarrow{f\times_S 1_Y} X'\times_S Y \xrightarrow{1_{X'}\times_S g} X'\times_S Y'$$

4. Diagonale.

Soit X un S-objet. On appelle morphisme diagonal de X dans $X\times_S X$, et on note Δ_X (ou $\Delta_{X/S}$) le S-morphisme $(1_X,1_X)_S$, c'est à dire l'unique S-morphisme Δ_X tel que $p_1.\Delta_X = p_2.\Delta_X = 1_X$, où p_1 et p_2 désignent les projections de $X\times_S X$.

Si $f : T \to X$ et $g : T \to Y$ sont deux S-morphismes, on a de façon évidente : $(f,g)_S = (f\times_S g).\Delta_T$.

Proposition 8. *Soient X et Y deux S-objets; si on identifie canoniquement $(X\times_S Y)\times_S(X\times_S Y)$ à $(X\times_S X)\times_S(Y\times_S Y)$, le morphisme $\Delta_{X\times_S Y}$ s'identifie à $\Delta_X\times_S\Delta_Y$.*

Pour toute extension $S'\to S$ de l'objet de base, $\Delta_{X_{(S')}}$ s'identifie canoniquement à $(\Delta_X)_{(S')}$.

Soient en effet, p_1 et q_1 les premières projections de $X\times_S X$ sur X et $Y\times_S Y$ sur Y; la première projection de $(X\times_S Y)\times_S(X\times_S Y)$ sur

$X\times_S Y$ s'identifie canoniquement à $p_1\times_S q_1$, et on a :

$$(p_1\times_S q_1).(\Delta_X\times_S\Delta_Y) = (p_1.\Delta_X)\times_S(q_1.\Delta_Y) = 1_{X\times_S Y}$$

et de même pour les secondes projections, donc $\Delta_{X\times_S Y} = \Delta_X\times_S\Delta_Y$.

D'autre part on a vu que $(X\times_S X)_{(S')}$ s'identifiait canoniquement à $X_{(S')}\times_{S'}X_{(S')}$ d'où la fin de la proposition.

Proposition 9. *Soient* X *et* Y *deux* S*-objets,* $\varphi : S\to T$ *un morphisme,* $f : X\to S$ *et* $g : Y\to S$ *les morphismes structuraux de* X *et* Y*,* p *et* q *les projections de* $X\times_S Y$*,* $\pi = f.p = g.q$ *le morphisme structural de* $X\times_S Y\to S$*, alors le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
X\times_S Y \arrow[r, "(p,q)_T"] \arrow[d, "\pi"'] & X\times_T Y \arrow[d, "f\times_T g"] \\
S \arrow[r, "\Delta_{S/T}"'] & S\times_T S
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

Bibliographie.

[1]. R.Godement, Théorie des faisceaux, Actal. Scient. et Ind. n°1252, Paris (Herman)

[2]. A.Grothendieck, Eléments de Géométrie Algébrique, Publ. Math de l'I.H.E.S, n°4, Paris (P.U.F.)

[3]. R.Pupier, Petit guide des Catégories, Séminaire d'Algèbre Lyon, 1963-64, exposé 0.

[4]. A.Roux, Catégories à produits fibrés, Séminaire d'Algèbre Lyon, 1963-64, exposé 1, à paraître.

[5]. N.Bourbaki, Théorie des Ensembles, ch.4.

[6]. A.Grotendieck, Technique de descente et Théorème d'existence en géométrie algébrique, Séminaire Bourbaki 1959-1960, exposé 190

[7] J.Giraud, Analysis Situs, Séminaire Bourbaki 1962 1963 exposé 256