R. PUPIER

Catégorie des lois

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1964, tome 1, fascicule 1
« Exposés sur les CATEGORIES », , exp. n° 19, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1964__1_1_A8_0>

SEMINAIRE D'ALGEBRE 1963-1964

19. CATEGORIE DES LOIS

par R. Pupier

Le but de cet exposé est de donner un aperçu des travaux de B. Eckmann et P.J. Hilton, travaux assez récents, puisqu'annoncés en 1961, ils ne sont parus qu'en 1962 et 1963 aux Mathematische Annalen.

Dans ces travaux les auteurs ont essentiellement en vue un démarquage dans les catégories de résultats connus en théorie des groupes; une démarche analogue a été tentée par E.G. Shulgeifer [3] mais celui-ci n'atteint qu'à une description extérieure de la catégorie des groupes, sans en dégager le caractère algébrique. Enfin, A. Grothendieck [2], définit par voie fonctorielle des structures algébriques dans les catégories. Sa méthode recoupe celle de Eckmann et Hilton, pour les catégories à 2-produits directs.

Il semble que l'on puisse étendre assez facilement certains des résultats de Eckmann et Hilton, à des structures algébriques plus complexes, ou au contraire plus générales. Certains théorèmes de cet exposé donnent un début de ces généralisations possibles.

Les résultats donnés ici peuvent évidemment se transposer par dualité, et on trouvera quelques exemples dans l'article cité [1].

1. Loi de composition interne sur un objet d'une catégorie.

Soient $\mathbf{C}$ une catégorie à 2-produits directs, et M un objet de $\mathbf{C}$. On appellera loi de composition interne sur M la donnée d'un morphisme $m : M \times M \longrightarrow M$. On dira encore que l'objet M est muni d'une m-structure (ou "multiplication"); les couples (M,m) formeront les objets d'une nouvelle catégorie, appelée catégorie des lois, et notée $\mathbb{L}(C)$. Soient (M,m) et (M',m') deux m-objets, et soit $f : M \to M'$ un morphisme de $\mathbb{C}$; si le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
M \times M \arrow[r, "m"] \arrow[d, "f \times f"'] & M \arrow[d, "f"] \\
M' \times M' \arrow[r, "m'"'] & M'
\end{tikzcd}$$

on dit que f est une <u>représentation</u> (ou un homomorphisme) pour les m-structures m et m'.

Les morphismes de la catégorie $\mathbb{L}(C)$ sont les représentations.

(1,1) <u>Proposition</u>. Soit $f : M \to M'$ (resp. $g : M' \to M''$) un morphisme (resp. un monomorphisme) de $\mathbb{C}$; si g est une représentation de (M',m') dans (M'',m'') et $g.f$ une représentation de (M,m) dans (M'',m''), alors f est une représentation.

Par contre, si f est une représentation et un épimorphisme (dans $\mathbb{C}$), et $g.f$ une représentation, on ne peut conclure que si, dans la catégorie $\mathbb{C}$, le produit d'un épimorphisme par lui-même est un épimorphisme.

Soit X un objet quelconque de $\mathbb{C}$; on pose, pour tous f et g de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,M)$, $f + g = m.(f,g)$, où (f,g) est le morphisme de composantes f et g de X dans $M \times M$. Ceci définit une m-structure dans $\mathbb{E}\mathrm{ns}$ sur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,M)$, induite par la m-structure sur M.

(1,2) <u>Proposition</u>. Pour tout $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,Y)$, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(h;M)$ est une représentation de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(Y,M)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,M)$.

En effet, $(f + g).h = m.(f,g).h = m.(f.h,g.h) = f.h + g.h$.

Réciproquement, on a l'important théorème :

(1,3) <u>Théorème</u>. Si pour un objet M de $\mathbb{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,M)$ est muni d'une m-structure (notée $f + g$), pour tout objet X de $\mathbb{C}$, et si, pour tout $h : X \to Y$, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(h,M)$ est une représentation de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(Y,M)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,M)$, il existe une unique m-structure sur M qui induit les m-structures données sur chacun des $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,M)$.

Soient p_1 et p_2 les projections de $M\times M$ sur M. Soient f_1 et f_2 deux morphismes de X dans M; on a $(p_1 + p_2).(f_1 , f_2) = p_1.(f_1,f_2) + p_2.(f_1,f_2) = f_1 + f_2$; donc le morphisme $p_1 + p_2$ de $M\times M$ dans M définit une m-structure vérifiant les conclusions précédentes; l'unicité résulte du fait que pour une m-structure (M,m), $p_1 + p_2 = m.(p_1,p_2) = m.1_{M\times M} = m$.

(1,4) <u>Proposition</u>. La catégorie $\mathbb{L}(\mathbb{C})$ est à 2-produits directs.

Rappelons d'abord le résultat suivant : soient M_1 et M_2 deux objets de $\mathbb{C}$; soient p_1, p_2, p_1', p_2' les projections de $M_1\times M_2\times M_1\times M_2$ sur les facteurs M_1 et M_2; soient d'autre part $(M_1\times M_2,q_1,q_2)$ le produit direct de M_1 et M_2; on a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
M_1\times M_2 \arrow[r, "q_1"] & M_1 \\
M_1\times M_2\times M_1\times M_2 \arrow[u, dashed] \arrow[d, dashed] \arrow[r, "{(p_1,p_1')}"] \arrow[ur, dashed, "p_1"] \arrow[dr, dashed, "p_1'"'] & M_1\times M_1 \arrow[u, dashed] \arrow[d, dashed] \\
M_1\times M_2 \arrow[r, "q_1"'] & M_1
\end{tikzcd}$$

d'où $(p_1,p_1') = q_1\times q_1$.

Soient alors (M_1,m_1) et (M_2,m_2) deux m-objets. On définit $m = (m_1.(p_1,p_1'),m_2.(p_2,p_2')) : M_1\times M_2\times M_1\times M_2 \longrightarrow M_1\times M_2$. On a les trois propriétés suivantes :

a) q_1 et q_2 sont des représentations, pour les m-structures $(M_1\times M_2,m)$, (M_1,m_1) et (M_2,m_2);

b) m est l'unique morphisme vérifiant a);

c) $(M_1\times M_2,m)$ est produit direct de (M_1,m_1) et (M_2,m_2) dans $\mathbb{L}(\mathbb{C})$.

Montrons par exemple a) : $q_1.m = q_1.(m_1.(p_1,p_1'),m_2.(p_2,p_2')) = m_1.(p_1,p_1') = m_1.(q_1\ q_1)$; de même pour q_2. Les autres résultats se démontrent de façon similaire.

2. <u>m-structures particulières</u>.

La définition donnée dans le paragraphe 1 correspond à la structure de groupoïde si $\mathbb{C} = \mathbb{E}ns$. On peut donner des axiomes correspondant aux propriétés élémentaires des lois de composition internes sur $\mathbb{E}ns$.

(2,1) <u>Associativité</u>.

On rappelle que le produit direct est associatif, en ce sens qu'il existe un isomorphisme canonique de $(M_1 \times M_2) \times M_3$ sur $M_1 \times (M_2 \times M_3)$. Dans le cas particulier où $M_1 = M_2 = M_3 = M$, soit t cet isomorphisme.

On dira que la loi $m : M \times M \to M$ est <u>associative</u> si elle vérifie la condition suivante :

(A) $$m.(m \times 1_M) = m.(1_M \times m).t.$$

On démontre que (A) entraine l'associativité générale.

(2,2) <u>Eléments neutres</u> (<u>à droite</u>, <u>à gauche</u>).

On suppose maintenant que la catégorie $\mathbb{C}$ possède un objet final Ω. Soient M un objet de $\mathbb{C}$, (M,m) une m-structure sur M; s'il existe un sous-objet (E, i_E) de M dans $\mathbb{C}$, isomorphe à Ω, et tel que :

(E) $$m.(1_M, i_E.\omega_M) = 1_M$$

on dit que E est un élément neutre à droite pour la loi m. (ω_M désigne l'unique morphisme de M dans E). On définit de même un élément neutre à gauche, ou un élément neutre.

(2,3) <u>Proposition</u>. Soient $f : X \to M$, et E un élément neutre à droite de (M,m); on a $f + i_E.\omega_X = f$.

En effet, $m.(f, i_E.\omega_X) = m.(1_M, i_E.\omega_M).f = f$, car $\omega_M.f = \omega_X$.

(2,4) <u>Proposition</u>. Un objet (M,m) de $\mathbb{L}(C)$ possède au plus un élément neutre.

Soit E' un autre élément neutre : $i_E = i_E + i_{E'} = i_{E'}$.

On remarquera que si $\mathbb{C}$ possède un objet final, $\mathbb{L}(C)$ possède un objet final $(\Omega, \omega_{\Omega \times \Omega})$.

(2,5) <u>Commutativité</u>.

On dit que la loi m sur M est commutative, si elle satisfait à la propriété suivante :

(C) $$m = m.\sigma$$

où σ est définit par

$$\begin{tikzcd}
& M \\
M\times M \arrow[ur, "p_2"] \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dr, "p_1"'] & M\times M \arrow[u, "p_1"'] \arrow[d, dashed, "p_2"] \\
& M
\end{tikzcd}$$

(2,6) <u>Existence d'un inverse</u> (<u>à gauche, à droite</u>).

Supposons que (M,m) possède un élément neutre (à gauche, à droite); on dit que la loi m est <u>symétrisable à droite</u>, par rapport à E, s'il existe un morphisme $s : M \to M$ tel que :

(I) $$m.(1_M, s) = i_E.\omega_M.$$

(2,7) <u>Théorème</u>. Une m-structure sur M satisfait aux propriétés précédentes (associativité, commutativité, éléments neutres, inverse) si et seulement si les lois induites sur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,M)$ satisfont aux mêmes propriétés.

(2,8) <u>Corollaire</u>. Si la loi m sur M possède un élément neutre à gauche, est associative, et symétrisable à gauche, c'est une loi de "groupe".

3. <u>Sous-objets stables</u>.

On dit qu'un sous-objet (A, i_A) de M est un <u>sous-objet stable</u> pour une loi m sur M, s'il existe un morphisme m_A (nécessairement unique) tel que $m.(i_A \times i_A) = i_A.m_A$.

On vérifie facilement que cette définition est compatible avec la notion de sous-objet; à savoir, si deux monomorphismes de but M sont équivalents dans $\mathbb{C}$, et si l'un est une représentation, l'autre est également une représentation.

On remarquera cependant que, sans hypothèses supplémentaires sur $\mathbb{C}$, il peut exister des monomorphismes dans $\mathbb{L}(\mathbb{C})$ qui ne proviennent pas de monomorphismes de $\mathbb{C}$.

(3,1) <u>Proposition</u>. Si (M,m) possède un élément neutre (resp. neutre à droite, à gauche), c'est un sous-objet stable de M pour la loi m.

Montrons le pour un élément neutre à droite; on a, en désignant par m_E l'unique morphisme de $E{\times}E$ dans E, $m.(i_E{\times}i_E) = m.(i_E,i_E).m_E$, mais $m.(i_E,i_E) = m.(1_M,i_E.\omega_M).i_E = i_E$ et en définitive $m.(i_E{\times}i_E) = i_E.m_E$.

Supposons maintenant que $\mathbb{C}$ soit une catégorie à produits fibrés; alors $\mathbb{L}(\mathbb{C})$ est à produits fibrés. On en déduit :

(3,2) Proposition. Soit $f : (M,m) \longrightarrow (N,n)$ une représentation, (N,n) possédant un élément neutre $\mathbf{E}$; soit (K,i,ω_K) le produit fibré de M et E au-dessus de N; alors (K,i) est un sous-objet stable de (M,m).

On a en effet, $f.m.(i{\times}i) = n.(f{\times}f).(i{\times}i) = n.(f.i{\times}f.i) = n.(i_E.\omega_K{\times}i_E.\omega_K) = i_E.n_E.(\omega_K{\times}\omega_K)$, et par conséquent, il existe un morphisme $m_K : K{\times}K \longrightarrow K$, tel que $i.m_K = m.(i{\times}i)$. (Ceci constitue aux notations près la démonstration de l'assertion sur les produits fibrés).

(3,3) Définition. On dit qu'un sous-objet U de M est unitaire à droite, pour la loi m sur M, si pour tout sous-objet (B,i_B) de M, tel que $m.(i_B{\times}i_U) = i_U.u$, on a $i_B \prec i_U$.

En particulier un sous-objet stable unitaire vérifie la condition : $m.(i_B{\times}i_U) = i_U.u \Longleftrightarrow i_B \prec i_U$.

(3,4) Définition. On dit qu'un sous-objet (A,i_A) d'un objet M satisfait à la condition de Lyapin pour la structure m sur M, si pour tous sous-objets (B,i_B) et (C,i_C) de M :

$$m.(m.(i_B{\times}i_A){\times}i_C) = i_A.u \Longleftrightarrow m.(i_B{\times}i_C) = i_A.v.$$

On appelle bien entendu noyau de la représentation f le produit fibré (K,i,ω_K) de la proposition (3,2).

(3,5) Théorème (Lyapin). Le noyau d'une représentation f de (M,m) dans (N,n), où (N,n) possède un élément neutre, est un sous-objet stable unitaire satisfaisant à la condition de Lyapin.

Démontrons par exemple qu'il est unitaire : soit (B,i_B) tel que $m.(i_B{\times}i_K) = i_K.u$. Soient p_B et p_K les projections du produit $B{\times}K$ sur B et K; on a : $f.i_B.p_B = f.i_B.p_B + i_E.\omega_{B\times K} = f.i_B.p_B + i_E.\omega_K.p_K = f.i_B.p_B + f.i_K.p_K = n.(f.i_B.p_B,f.i_K.p_K) =$

$= f.m.(i_B.p_B, i_K.p_K) = f.m.(i_B \times i_K) = f.i_K.u = i_E.\omega_K.u = i_E.\omega_B.p_B$

d'où $f.i_B = i_E.\omega_B$, i.e. $i_B \leq i_K$.

La deuxième partie ne donne lieu qu'à des complications d'écriture, mais est du même ordre technique.

4. Catégories à produits et sommes directs finis.

On sait que si $\mathbf{C}$ est une catégorie à objet nul, il existe un morphisme canonique χ de $M \sqcup N$ dans $M \times N$. Dans les catégories additives c'est un isomorphisme. En général ce morphisme est quelconque, cependant dans la catégorie des groupes, par exemple, c'est un épimorphisme.

On peut généraliser au cas des catégories possédant un objet final .

(4,1) Proposition. Si M et N sont deux objets de C, possédant chacun un sous-objet isomorphe à l'objet final il existe un morphisme χ de $M \sqcup N$ dans $M \times N$.

On construit en effet, les deux morphismes $j_M : M \sqcup N \longrightarrow M$ et $j'_N : M \sqcup N \longrightarrow N$ par les diagrammes :

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[d] \arrow[dr, "1_M"] & \\
M \sqcup N \arrow[r, "j_M"] & M \\
N \arrow[u] \arrow[ur, "i_E.\omega_N"'] &
\end{tikzcd}$$

et on pose $\chi = (j_M, j'_N) : M \sqcup N \longrightarrow M \times N$.

Mais le morphisme χ n'est plus canonique, car il dépend des sous-objets E et F de M et N.

(4,2) Proposition. Une m-structure sur M possède un élément neutre E, si et seulement si, $m.\chi_E = \nabla_M$.

Nous sommes dans les conditions de (4,1).

On a $m.\chi_E.e_1 = m.(j_M, j'_M).e_1 = m.(j_M.e_1, j'_M.e_1) = m.(1_M, i_E.\omega_M)$ et $m.\chi_E.e_1 = 1_M$ est équivalent à $m.(1_M, i_E.\omega_M) = 1_M$; de même pour e_2, ce qui démontre le résultat.

(4,3) <u>Théorème</u>. Si $\chi_E : M{\times}M \longrightarrow M{\times}M$ est un épimorphisme, il existe au plus une m-structure sur M, admettant E comme élément neutre. De plus, si (N,n) possède un élément neutre, tout morphisme $f : M \longrightarrow N$ qui conserve les éléments neutres est une représentation.

La première partie est conséquence évidente de la proposition (4,2). D'autre part : $n.(f{\times}f).\chi_E.e_1 = n.(f{\times}f).(j_M,j'_M).e_1 = n.(f,f.i_E.\omega_M) = n.(f,i_F.\omega_M) = f = f.m.\chi_E.e_1$, et de même $n.(f{\times}f).\chi_E.e_2 = f.m.\chi_E.e_2$, d'où $n.(f{\times}f).\chi_E = f.m.\chi_E$, et le résultat, χ_E étant un épimorphisme.

(4,4) <u>Proposition</u>. Soit σ l'involution de $M{\times}M$ dans $M{\times}M$ de composantes (p_2,p_1); si (M,m) est un m-objet possédant un élément neutre à droite, $(M,m.\sigma)$ est un m-objet possédant un élément neutre à gauche.

En effet, $m.\sigma.(i_E.\omega_M,1_M) = m.(1_M,i_E.\omega_M) = 1_M$.

(4,5) <u>Corollaire</u>. Sous les conditions du théorème (4,3), et s'il existe une m-structure sur M possédant un élément neutre E, c'est une structure commutative.

On a $m.\sigma.\chi_E = \Sigma_M = m.\chi_E$, d'où $m = m.\sigma$.

Remarques. 1) Soit G un groupe; s'il existe une m-structure (m est un homomorphisme de groupe) possèdant un élément neutre, sur G, elle est commutative. Soit m l'homomorphisme de $G{\times}G$ dans G, qui la définit : $m(x_1,x_2) = m(x_1,e).m(e,x_2) = x_1.x_2 = x_2.x_1$; ceci ne peut avoir lieu que si G est abélien, et la loi m est alors la loi de groupe donnée sur G.

2) Pour construire les catégories habituelles de demi-groupes, de groupes, il est inutile, comme le font Eckmann et Hilton de partir de la catégorie $\mathbb{E}$ns pointée. L'existence des éléments neutres dépend uniquement de l'existence d'un objet final, à condition que $\mathrm{Hom}(\Omega,M)$ ne soit pas vide.

3) On peut rendre compte par la méthode de l'objet final de l'existence d'idempotents.

Bibliographie.

[1] .B.Eckmann et P.J.Hilton, Group-like structures in general categories, I : Multiplications, comultiplications. Math. Annalen, 145 (1962), p.227-255.

[2] . A.Grothendieck, Eléments de Géométrie Algébrique, III, p.9, Publications Mathématiques, I.H.E.S., n°11.

[3] . E.G.Shulgeifer, Structure des idéaux d'un objet dans une catégorie, Math. Sbornik, 54 (1961), p.208-224.