PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

R. OUZILOU

Algèbres involutives à adverse continu

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1965, tome 2, fascicule 1
, p. 54-71

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1965__2_1_54_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1965 t.2-1

ALGEBRES INVOLUTIVES A ADVERSE CONTINU

R. Ouzilou

Ce mémoire comprend quatre parties : la première consiste en des propriétés générales des algèbres à adverse continu et une démonstration du transfert d'une telle structure par adjonction d'une unité. La seconde partie porte sur les algèbres involutives à adverse continu et, plus particulièrement, sur ces algèbres qui sont symétriques ; le point le plus intéressant en est l'emploi du critère de Raĭkov pour prouver une propriété de permanence spectrale bien connue en théorie des algèbres de Banach où on la démontre par une technique de norme [5]. La troisième partie est l'examen d'un cas de passage à la limite inductive, cas qui se présente notamment pour les algèbres de fonctions holomorphes près d'un compact. En dernière partie, les résultats précédents sont appliqués aux algèbres $\mathcal{D}_K$ de Schwartz.

Par ailleurs, il nous semble possible d'appliquer aux distributions la théorie des algèbres régulières mais c'est une idée à peine mentionnée ici.

<u>Préambule</u> :

Il ne sera question ici que de scalaires complexes.

Le spectre sera pris au sens classique, i.e, pour tout élément a d'une algèbre A, à unité e, $sp_A(a)$ sera l'ensemble des scalaires α tels que $\alpha e-a$ ne soit pas inversible. Le spectre d'un élément commute aux polynômes :

Pour toute algèbre A, A_1 désignera l'algèbre obtenue par adjonction à A d'une unité 1. L'espace vectoriel sous-jacent à A_1 est $\mathbb{C}\times A$ et , si i est l'injection canonique de A dans A_1,(i,A_1) est une solution, pour A, du problème universel du prolongement des morphismes d'algèbres en morphismes unitaires.

Si A possède une unité, $sp_{A_1}(a)$ et $sp_A(a)$ ne sont identiques que pour a non inversible dans A, sinon, $sp_{A_1}(a)$ s'obtient en ajoutant 0 à $sp_A(a)$.

Le <u>rayon spectral</u> d'un élément a de A sera le nombre positif (fini ou non) :

$$r_A(a) = \sup|\lambda| \quad , \quad \lambda \in sp_{A_1}(a)$$

Un élément a de A sera dit adversible, si 1 - a est inversible dans A_1. L'inverse de 1-a est alors de la forme $1 - a°$, $a° \in A$; cet élément a°, déterminé par :

$$a + a° = aa° = a°a \quad ,$$

sera appelé l'<u>adverse</u> de a.

Le spectre de a dans A_1 est égal à l'ensemble formé de 0 et des scalaires $\alpha \neq 0$ tels que $\alpha^{-1}a$ soit adversible.

Si a et b sont deux éléments quelconques de A, ab et ba sont simultanément adversibles ou pas, de sorte que :

$$sp_{A_1}(ab) = sp_{A_1}(ba)$$

La multiplication d'une algèbre topologique ne sera supposée que <u>séparément</u> continue parce qu'il est illusoire de compter conserver la continuité globale à la limite inductive.

Si A est une algèbre topologique, la topologie produit $\mathbb{C}\times A$ fait de A_1 une sur-algèbre topologique de A et rend topologique la solution universelle (i, A_1).

Si a est un élément d'une algèbre topologique A, nous dirons que le spectre (resp. rayon spectral) de a est permanent si, pour toute sous-algèbre <u>fermée</u> B de A :

$$sp_{B_1}(a) = sp_{A_1}(a) \qquad (\text{resp. } r_B(a) = r_A(a))$$

1. <u>ALGEBRES A ADVERSE CONTINU</u>.

(1,1) Rappelons qu'une algèbre de Gelfand (ou algèbre à inverse continu) est une algèbre topologique A_1 à unité e, telle que :

1. l'ensemble A^{-1} des éléments inversibles de A soit ouvert.
2. l'opérateur $a \longrightarrow a^{-1}$ de A^{-1} soit continu.

Pour ce faire, il suffit, d'ailleurs, d'avoir un voisinage V de e, à éléments inversibles dans A, et d'être assuré de la continuité de l'inverse en e.

Cette définition peut être reformulée en y remplaçant e par o et les inverses par les adverses, ce qui permet de ne plus supposer l'existence d'une unité.

Les algèbres de Gelfand ont deux propriétés notables :

. les idéaux à gauche (à droite, bilatères) réguliers maximaux sont fermés.

. le spectre d'un élément est toujours compact.

(1,2) Une algèbre de Gelfand A sera dite de Waelbroeck si sa topologie est séparée et localement convexe (habituellement, de telles algèbres sont appelées à adverse continu, tout simplement, mais, cette expression nous a paru rendre cette définition de façon incomplète).

Dans une algèbre de Waelbroeck, à unité, le spectre d'un élément n'est jamais vide (théorème de Gelfand-Mazur généralisé [3])

Une autre propriété de ces algèbres, qui est à peine citée par [3] , mérite une attention particulière :

(1,2,1) <u>Proposition</u>. Pour qu'une algèbre topologique A soit de Waelbroeck, il faut et il suffit que A_1 soit une algèbre de Waelbroeck.

Auparavant, démontrons le:

<u>Lemme</u> : Si U est un voisinage ouvert convexe de o dans un e.v.t, pour tout $x \in U$, il existe un nombre réel λ strictement compris entre o et 1, tel que $x \in \lambda U$.

Pour cela, on considère la jauge p de U ; comme $o \leq p(x) < 1$, on a bien, pour $p(x) < \lambda < 1$, $x \in \lambda U$.

<u>Preuve de (1,2,1)</u>. La condition est suffisante parce que l'ensemble $A°$ des éléments adversibles de A est la trace sur A de $(A_1)°$.

Réciproquement, si A est de Waelbroeck, A_1 est trivialement séparée et localement convexe. De plus, si U est, dans A, un voisinage ouvert convexe de o dont les points sont adversibles dans A, les éléments de $V = C^{*}(1 - U)$ sont alors inversibles dans A_1 et, d'après le lemme précédent, V est la réunion des demi-cylindres ouverts $\mathbb{C}_\lambda \times (\lambda U)$, $\lambda \in C$, où $\mathbb{C}_\lambda$ est l'ensemble des nombres complexes μ tels que $|\lambda|<|\mu|$ de sorte que V est un voisinage ouvert de 1 dans A_1. Quant à la continuité de l'inverse dans A_1, elle s'obtient en écrivant l'inverse d'un élément λ +a de A_1, voisin de 1, sous la forme $\lambda^{-1} - \lambda^{-1}(- \lambda^{-1}a)°$.

Cette propriété permet de ramener l'étude des algèbres à adverse continu à celle des algèbres à inverse continu, c'est ainsi qu'en exploitant [8] , on obtient les résultats suivants ;

2. Toute sous-algèbre <u>fermée</u> d'une algèbre de Waelbroeck est une algèbre de Waelbroeck.

3. Dans une algèbre de Waelbroeck, le <u>rayon</u> <u>spectral</u> d'un élément est toujours permanent.

(1,3) La théorie des caractères des algèbres commutatives de Waelbroeck est exactement celle des algèbres de Banach, pour mémoire citons :

1. Tout caractère est continu.

2. Tout idéal régulier maximal est le noyau d'un caractère.

3. L'espace des caractères est localement compact et, si l'algèbre a une unité, cet espace est compact.

Nous aurons aussi l'occasion d'utiliser la propriété suivante :

4. Si B est une sous-algèbre <u>fermée</u> d'une algèbre de Waelbroeck commutative A, tout Š-caractère de B est la <u>restriction</u> d'un Š-caractère de A.

(Nous entendons par Š-caractère, les éléments de la frontière de Šilov).

Pour le détail de ces propriétés, on aura avantage à consulter [8] .

2. <u>ALGEBRES INVOLUTIVES</u> :

(2,1) Une involution $a \to a^*$ sur une algèbre A se prolonge canoniquement en une involution $\lambda+a \to \bar{\lambda}+a^*$ sur A_1 et, si A est topologique, il est clair que la continuité de l'une de ces involutions entraine celle de l'autre, dans ces conditions; nous dirons que A est une algèbre topologique involutive.

Rappelons qu'une forme linéaire f sur une algèbre involutive A est dite positive si, pour tout élément a de A, $f(a^*a) \geq 0$; la théorie de ces formes est une importance capitale en analyse opérationnelle.

Une forme positive f sur A est dite prolongeable si c'est la restriction d'une forme positive sur A_1, ce qui revient à dire qu'une telle forme est hermitienne ($f(a^*) = \overline{f(a)}$) et qu'il existe une constante positive C telle que, $|f(a)|^2 \leq Cf(a^*a)$; si A possède une unité, toute forme positive sur A est prolongeable (c'est heureux !).

Rappelons qu'une unité approchée d'une algèbre topologique A consiste en la donnée d'une famille (e_i), $i \in I$, d'éléments de A, avec I filtrant croissant, telle que l'ensemble des e_i soit borné dans A et que, pour tout élément a de A :

$$\lim_{i \in I} e_i a = \lim_{i \in I} a e_i = a$$

Sur une algèbre topologique involutive A qui possède une unité approchée (e_i), toute forme positive <u>continue</u> f est <u>prolongeable</u> et il existe même un prolongement canonique $\tilde{f}$, de f à A_1, défini par $\tilde{f}(1) = \lim_{i \in I} f(e_i)$. Si A est une algèbre de Waelbroeck <u>complète</u>, la réciproque est vraie, avec ou sans unité approchée.

Les formes positives prolongeables f, sur une algèbre de Waelbroeck involutive et complète A, satisfont à la condition suivante, fondamentale en théorie des représentations ; pour tout élément a de A et tout élément <u>hermitien</u> h de A, on a :

$$(1) \qquad f(a^*ha) \leq r(h)\; f(a^*a)$$

Cette propriété, démontrée dans [1] , lorsque A possède une unité, se généralise par prolongement de f à A_1, elle permet, notamment de prouver la continuité de f (on remarque pour cela que r est plus petit qu'une semi-norme continue sur A).

Voici une autre conséquence de (1) qui sera utilisée par la suite :

Si f est une forme positive prolongeable sur A et C une constante positive telle que $|f(a)|^2 \leqslant C\, f(a^* a)$, alors, f est la restriction à A d'une forme positive $\tilde{f}$ sur A_1, déterminée par $\tilde{f}(1) = C$ et (1) donne :

$$(2) \qquad |f(a)| \leqslant C\, r^{1/2}(a^* a)$$

(2,2) Rappelons qu'une algèbre involutive A est dite symétrique si, pour tout élément a de A, le spectre $a^* a$ est <u>positif</u>, ce qui revient à dire que $-a^* a$ est toujours adversible.

Une algèbre involutive commutative A est symétrique si, et seulement si, ses éléments hermitiens ont un spectre réel (involution hermitienne) ou, en d'autres termes, les caractères de A sont involutifs, ce sont alors des formes positives prolongeables et unitaires (f(e) = 1). Tout caractère d'une algèbre commutative de Waelbroeck involutive symétrique est du type $\check{S}$.

La théorie des algèbres de Banach symétriques, développée dans [5] , est applicable, mutatis mutandis, aux algèbres de Waelbroeck A involutives complètes (le symbole ν de [5] doit être interprété comme celui du rayon spectral). Voici les points principaux de cette théorie :

1. A est symétrique, si et seulement si, A_1 l'est.

2. Le rayon spectral est une semi-norme sur l'espace réel A_h

des éléments hermitiens de A.

3. La restriction à A_h d'une forme hermitienne sur A définit une correspondance biunivoque entre l'ensemble $\mathcal{F}(A)$ des <u>formes positives prolongeables</u> sur A et l'espace des formes linéaires sur A_h, <u>continues pour le rayon spectral</u>

On obtient alors, grâce à Hahn-Banach, le résultat suivant :

4. Si B est une sous-algèbre involutive, fermée, symétrique de A, alors, tout élément de $\mathcal{F}(B)$ est la restriction d'un élément de $\mathcal{F}(A)$.

Tout ceci permet d'établir l'important :

<u>Critère de Raïkov</u> :

Soit A une algèbre de Waelbroeck involutive, complète, à unité e ; pour que A soit symétrique, il faut et il suffit que, pour tout élément a de A, on ait :

$$r(a^* a) = \sup_{f \in \mathcal{U}(A)} . \; f(a^* a)$$

où $\mathcal{U}(A)$ est l'ensemble des formes linéaires positives, unitaires, sur A.

Remarquons tout d'abord qu'en toute généralité :

$$\sup_{f \in \mathcal{U}(A)} f(a^* a) \leqslant r(a^* a)$$

ce qui résulte de l'inégalité (2,1,1).

Si A est symétrique, soit a un de ses éléments. Considérons une sous-algèbre involutive commutative maximale B contenant $a^* a$; B est fermée, ce qui assure la permanence de r, elle est symétrique, parce qu'il est clair que, pour tout élément b de B, $sp_B(b) = sp_A(b)$, par conséquent, les caractères χ de B sont des formes positives unitaires d'où :

$$r(a^* a) = \sup_{\chi} . \chi(a^* a) \leqslant \sup_{f \in \mathcal{U}(B)} . f(a^* a)$$

d'où, d'après (2,2,4), $r(a^* a) \leqslant \sup_{f \in \mathcal{U}(A)} f(a^* a)$

Réciproquement, supposons cette dernière inégalité assurée en tout point a de A ; si l'on pose

$$u = r(a^* a)e - a^* a \quad ,$$

on obtient :

$$u^* u = u^2 = r(a^* a)^2 e - .2r(a^* a).a^* a + (a^* a)^2$$

d'où, pour tout élément f de $\mathcal{U}(A)$, compte tenu de (2,1,1) :

$$f(u^2) \leqslant r(a^* a)^2 - 2r(a^* a)\ f(a^* a) + r(aa^*)\ f(a^* a)$$

mais, comme $r(a^* a) = r(aa^*)$ (Préambule), on a alors :

$$f(u^2) \leqslant r(a^* a)^2 - r(a^* a)\ f(aa^*) \leqslant r^2(a^* a)$$

d'où, par hypothèse :

$$r(u)^2 \leqslant \sup_{f \in \mathcal{U}(A)} f(u^2) \leqslant r(a^* a)^2$$

de sorte que, pour toute valeur spectrale λ de $a^* a$:

$$|r(a^* a) - \lambda| \leqslant r(a^* a) \ ,$$

ce qui implique bien que $e + a^* a$ est inversible.

(2,3) <u>Applications</u> : Soit B une sous-algèbre <u>fermée</u> involutive d'une algèbre de Waelbroeck involutive <u>complète</u> A.

(2,3,1) <u>Proposition</u>. Si A est symétrique, B l'est aussi.

En effet, grâce à (2,2,1), on peut supposer que A possède une unité e et que B contient e, le critère de Raĭkov donne alors, pour tout élément b de B :

$$r_B(b^* b) = r_A(b^* b) \leqslant \sup_{f \in \mathcal{U}(A)} f(b^* b)$$

et comme la restriction à B d'un élément de $\mathcal{U}(A)$ appartient à $\mathcal{U}(B)$, on en déduit :

$$r_B(b^* b) \leqslant \sup_{f \in \mathcal{U}(B)} f(b^* b)$$

et ainsi, B est symétrique d'après, Raĭkov.

Ce résultat n'est qu'un cas particulier du suivant :

(2,3,2) <u>Théorème</u>. Si l'involution de A est hermitienne, alors, tout élément de A a un spectre permanent.

Soient B une sous-algèbre fermée de A et b un élément de B ; on peut supposer, toujours grâce à (2,2,1), que A et B ont une unité commune e.

Si b est hermitien, soit B' (resp. A') une sous-algèbre involutive commutative maximale (donc fermée) de B (resp. A) contenant b (resp. B') ; par hypothèse, A' est symétrique et la proposition précédente assure alors que B' l'est aussi ; ainsi, tout caractère de B' est du type $\check{S}$ et c'est, d'après (1,3,4), la restriction d'un caractère de A ; on a alors $sp_B(b) = sp_{B'}(b) \subset sp_{A'}(b) = sp_A(b)$ et, comme l'inclusion inverse est triviale, c'est terminé dans ce cas.

Dans le cas général, si $\lambda e-b$ est inversible dans A, $(\lambda e - b)(\bar{\lambda} e - b^*)$ et le produit inverse sont évidemment inversibles dans A donc dans B, d'après ce qui précède, de sorte que $\lambda e - b$ est inversible dans B.

3. LIMITES INDUCTIVES.

(3,1) Soient A une algèbre, I un ensemble préordonné filtrant croissant, $(A_i), i \in I$, une famille croissante de sous-algebres de A qui recouvrent A, de sorte que A est limite inductive des A_i.

Si $(\mathcal{T}_i), i \in I$, est une famille de topologies localement convexes, placées respectivement sur les espaces vectoriels A_i en compatibilité avec eux, et telles que les injections canoniques $A_i \longrightarrow A_j$ $(i \leq j)$ soient continues, soit $\mathcal{T}$ la topologie localement convexe limite inductive des $\mathcal{T}_i$, dans ces conditions on a les :

(3,1,1) Proposition. Si les multiplications des algèbres A_i sont séparément continues, celle de A l'est aussi.

En effet, si a est un point de A, il appartient à un A_i et l'opérateur linéaire $x \rightarrow ax$ de A est la limite inductive des opérateurs linéaires $x \rightarrow ax$ de A_j pour $j \geq i$; comme ces indices j forment une partie cofinale à I, c'est terminé.

(3,1,2) Proposition. S'il existe sur A une involution stable et continue dans chaque A_i, cette involution est continue dans A.

L'involution étant anti-linéaire, on raisonne comme précédemment, par passage à la limite.

En résumé, on peut dire que les algèbres topologiques involutives sont stables à la limite inductive.

(3,2) Nous dirons, avec [2] , que la limite inductive $\mathcal{C}$ est <u>compactifiante</u>, s'il existe une suite <u>exhaustive</u> $(i, \ldots, i_n, \ldots)$ d'éléments de I (suite croissante, cofinale à I) telle que les injections canoniques

$$\mathcal{C}_{i_1} \to \mathcal{C}_{i_e} \ldots \to \mathcal{C}_{i_n} \to \quad \ldots$$

soient compactes (un voisinage devient relativement compact).

Une telle limite $\mathcal{C}$ a ceci d'intéressant qu'elle s'identifie à la limite inductive des $\mathcal{C}_i$ dans la catégorie de <u>toutes</u> les topologies, ce qui résulte du théorème dû à [2]:

"Une partie d'une limite inductive compactifiante est fermée si et seulement si, ses traces sur les composantes de la limite sont fermées".

Nous pouvons établir maintenant le résultat suivant :

<u>Théorème</u> : Soit A une algèbre topologique, limite inductive d'un système filtrant d'algèbres <u>localement convexes</u> ; si l'on peut extraire de ce système une suite exhaustive

$$A_1 \quad A_2 \ldots \quad A_n \quad \ldots$$

d'algèbres à <u>adverse continu</u> et d'injections <u>compactes</u> alors. A est à <u>adverse continu.</u>

Pour cela, remarquons tout d'abord que, pour tout indice n :

$$A^\circ \cap A_n = \bigcup_{p \geq n} (A_p^\circ \cap A_n)$$

parce que A° est réunion croissante des A_p° (rappelons que A° est l'ensemble des éléments adversibles de A) ; comme les A_p° sont respectivement ouverts dans les A_p, il résulte de ceci, et du théorème cité précédemment, que A° est ouvert dans A.

Il reste donc à prouver la continuité de l'adversion de A mais, comme c'est la limite inductive (ordinaire) des adversions des A_n, lesquelles sont continues par hypothèse, ce sera terminé si l'on montre que l'espace topologique A° est la limite inductive des espaces topologiques A_n° ; or, si une partie U de A° est telle que, pour tout indice n, $U \cap A_n^\circ$ soit ouvert dans A_n° , donc dans A_n, U est ouvert dans A, donc dans A°, d'après le théorème cité ci-dessus, ce qui prouve bien notre assertion.

c.q.f.d.

Cette situation se présente notamment pour l'algèbre $\mathcal{H}(K)$ des germes de fonctions holomorphes près d'un compact K ([2] et [7]) : si U décrit l'ensemble (ordonné par $\supset$) des voisinages ouverts de K :

$$\mathcal{H}(K) = \varinjlim_{U} \mathcal{H}(U)$$

où $\mathcal{H}(U)$ est l'algèbre de Banach des fonctions holomorphes dans U et continues dans $\overline{U}$.

En prenant $U_n = \{x \in \mathbb{C}\ ,\ d(x,k) < \frac{1}{n}\}$, on obtient une suite exhaustive compactifiante d'injections ; on retrouve ainsi un célèbre résultat de Waelbroeck [7]

"$\mathcal{K}(K)$ est une algèbre à inverse continu"

4. APPLICATIONS AUX DISTRIBUTIONS.

Les espaces $\mathcal{D}_K$ de fonctions complexes de n variables réelles, indéfiniment différentiables et à support contenu dans un compact K, sont en fait des algèbres de fonctions auxquelles vont pouvoir s'appliquer certains des précédents résultats.

(4,1) Proposition. La limite projective :

$$\mathcal{D}_K = \varprojlim_{p} \mathcal{D}_K^p$$

est une algèbre de Waelbroeck involutive, complète.

En effet, les fonctions adversibles de $\mathcal{D}_K$ sont celles qui ne prennent jamais la valeur 1, ce sont donc les éléments adversibles de $\mathcal{E}_K$ qui appartiennent à $\mathcal{D}_K$ or, $\mathcal{E}_K$ est, pour la topologie de la convergence uniforme, une algèbre de Banach, de sorte que l'ensemble des éléments adversibles de $\mathcal{D}_K$ est ouvert pour la topologie induite par celle de $\mathcal{E}_K$ et, à fortiori, pour la topologie de $\mathcal{D}_K$; la continuité de l'adverse se déduit alors aisément de l'immersion de $\mathcal{D}_K$ dans l'espace produit $\prod \mathcal{D}_K^p$, p entier ≥ 0. La continuité (globale) de la multiplication, celle de l'involution, la complétude de $\mathcal{D}_K$ sont des propriétés évidentes.

Signalons d'autres propriétés intéressantes :

Les algèbres de Schwartz $\mathcal{D} = \varinjlim \mathcal{D}_K$ sont <u>régulières</u> et à <u>caractères triviaux</u>.

Un caractère d'une algèbre A de fonctions sur un espace X est dit trivial s'il est de la forme δ_x , $x \in X$. On sait [5] que pour un espace localement compact X et une algèbre A, auto-conjuguée, auto-adverse de fonctions qui séparent fortement les points de X, tous les caractères de A sont triviaux (cette identification de X à l'espace des caractères de A est même topologique).

Rappelons aussi qu'une algèbre A, commutative, est dite régulière si les transformés de Gelfand $\hat{a}$ [5] des éléments de A séparent, dans l'espace des caractères de A, tout point d'un fermé qui ne le contient pas.

Comme il est bien évident que l'algèbre $\mathcal{D}$ est auto-conjuguée et auto-adverse, cette propriété va résulter de la

(4,2) <u>Proposition</u>. Pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$ et tout voisinage compact L de K, il existe une fonction de $\mathcal{D}$, égale à 1 dans K et à support contenu dans L.

En effet, si F est le complémentaire de l'intérieur de L, il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que les voisinages d'ordre ε , K_ε et F_ε de K et F respectivement, soient disjoints et, si φ est une fonction de $\mathcal{C}_L$, égale à 1 dans K, la régularisée $\varphi * \varphi_\varepsilon$ de φ [6]

répond à la question.

Cette proposition permet, en particulier, de définir, pour tout pavé compact $K_m = [-m, +m]^n$ et tout nombre $\varepsilon > o$, une fonction u_ε de $\mathcal{D}_m = \mathcal{D}_{K_m}$, à support dans K_m et égale à 1 dans $K_{m-\varepsilon}$ et il est clair que, pour tout élément f de $\mathcal{D}_m$, la suite $f.u_{k^{-1}}$ tend vers f dans $\mathcal{D}_m$ (i.e, $f.u_{k^{-1}} - f$ et toutes ses dérivées tendent uniformément vers o). En d'autres termes, les <u>algèbres</u> $\mathcal{D}_m$ <u>possédant une unité approchée</u>.

Comme les K_m forment une suite exhaustive de compacts, une distribution est une forme linéaire T sur $\mathcal{D}$ dont la restriction T_m à $\mathcal{D}_m$ est continue, ce qui permet de retrouver le théorème V de [6].

"Toute distribution positive est une mesure".

En effet, si T_m est une forme positive continue c'est, d'après (2,1), une forme positive prolongeable ; ainsi, il existe, d'après (2,1,2), une constante positive C telle que, pour tout élément f de $\mathcal{D}_m$.

$$T_m(f) \leq C\, r^{1/2}(f^* f) = C\, r^{1/2}(|f|^2) = Cr(f) = C\, \|f\|_\infty$$

ce qui signifie que T_m est uni ormément continue, et, d'après le théorème III de [6], T est alors une mesure.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BINGEN-TITS-WAELBROECK : Séminaire sur les algèbres de Banach (centre belge d'algèbre et topologie. Bruxelles 1962-63).

[2] H. BUCHWALTER : Espaces vectoriels topologiques (Polycopié ; dép. de Math. Lyon 1965).

[3]. M.A. NAIMARK : Normed Rings (Noordhoff. 1959)

[4] R. OUZILOU : Algèbres de Banach (Polycopié ; Départ. Math. Lyon - 1965).

[5]. C.E. RICKART : Banach Algebras (Van Nostrand. 1960).

[6]. L. SCHWARTZ : Théorie des distributions, ch. I (Hermann. 1957).

[7]. L. WAELBROECK : Le calcul symbolique dans les algèbres commutatives. (journal Math. Pures et Appl. 1954).

[8] L. WAELBROECK : Théorie des algèbres localement convexes (Université de Montréal. 1962).