PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

DANIEL PONASSE

Une démonstration du théorème de complétude de Godel

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1966, tome 3, fascicule 1
, p. 2-8
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1966__3_1_2_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1966 t. 3-1

UNE DEMONSTRATION DU THEOREME DE COMPLETUDE DE GODEL (*)

Daniel PONASSE

INTRODUCTION .

Il existe de nombreuses démonstrations du théorème de Gödel, certaines sont de nature uniquement syntactique et sémantique, d'autres utilisent des méthodes algèbriques et topologiques. C'est une démonstration de ce dernier type que nous présentons ici.

Nous nous placerons uniquement dans le cadre du calcul des prédicats restreint du premier ordre, sans égalité. Le langage utilisé comprendra :

- les individus a, b, c,... formant un ensemble I infini
- les variables x, y, z,... formant un ensemble X infini
- les prédicats r_n^p (p étant le poids)
- les connecteurs $\neg \wedge \vee \rightarrow \leftrightarrow \exists \forall$
- les énoncés (ou w.f.f. ne comportant aucune variable libre) formant un ensemble E, et comprenant l'ensemble $\mathfrak{a}$ des énoncés élémentaire du type $r_n^p\, a_1\, a_2 \ldots a_p$
- les énoncés démontrables, formant un ensemble T, définis à partir d'un système de schémas d'axiomes et de règles de détachement classiques.

Par ailleurs la relation d'équivalence R : $A \leftrightarrow B \in T$, permettra de construire l'anneau booléien quotient E/R avec les opérations habituelles (ϕ désignant l'application canonique :

(*) Conférence présentée aux "Journées d'Algèbre et Logique" de la Faculté des Sciences de Clermont - Ferrand (15-16 janvier 1966).

si $\alpha = \phi(A)$ et $\beta = \phi(B)$ $\quad \neg\alpha = \phi(\neg A) \quad \alpha\beta = \phi(A \wedge B), \ldots$

$$\exists a\alpha = \phi(\exists x[(x/a)A]) = \operatorname{Sup}_b (b/a)\alpha$$

Les deux notions qui joueront un rôle fondamental sont

1°) Système déductif complet.(notion syntactique) : toute partie V de E telle que :

a) $T \subset V \neq E$

b) V est stable pour la règle de modus ponens, c'est-à-dire si $A \in V$ et $A \to B \in V$, alors $B \in V$.

Ces 2 premières propriétés définissant les systèmes déductifs.

c) V est complet, c'est-à-dire pour tout $A \in E$: $A \in V$ ou $\neg A \in V$.

On montre qu'il existe des systèmes déductifs complets, qui sont d'ailleurs les systèmes déductifs maximaux (pour l'inclusion). En outre T est l'intersection de tous les systèmes déductifs complets.

Par passage au quotient, les s.d. et les s.d.c. deviennent les filtres et les ultrafiltres de E/R.

2°) Validation . (notion sémantique) rattachée à la notion de système de valeurs de vérité : toute application $h : \mathfrak{A} \to \mathbb{U} = \{0,1\}$ (anneau booléien $Z/(2)$) on montre qu'une telle application h se prolonge de façon unique en $\tilde{h} : E \to \mathbb{U}$, vérifiant :

$\tilde{h}(\neg A) = \neg\tilde{h}(A) \quad \tilde{h}(A \wedge B) = \tilde{h}(A)\tilde{h}(B) \ldots \quad \tilde{h}(\exists x[f^x]) = \operatorname{Sup}_a \tilde{h}((a/x)f^x)$.

Une validation est alors un ensemble $V_h = \tilde{h}^{-1}(1)$ de fonction caractéristique $\tilde{h}$.

Le théorème de compatibilité montre alors :

Si $A \in T$: $\tilde{h}(A) = 1$ pour tout h (on dit que A est universellement valide)

Il en résulte que les validations sont des s.d.c. particuliers, et elles sont entièrement caractérisées par sept propriétés du type :

$$A \in V_h \Leftrightarrow \neg A \notin V_h$$

$$A \wedge B \in V_h \Leftrightarrow A \in V_h \text{ et } B \in V_h$$

....

$$\exists x\, [f^x] \in V_h \Leftrightarrow \text{il existe } a \in I : (a/x) f^x \in V_h$$

$$\forall x\, [f^x] \in V_h \Leftrightarrow \text{pour tout } a \in I : (a/x) f^x \in V_h .$$

Par passage au quotient, les validations deviennent les ultrafiltres validants, c'est-à-dire les ultrafiltres possèdant la propriété supplémentaire :

$$\exists a\alpha \in U \Rightarrow \text{il existe } b \text{ tel que } (b/a)\alpha \in U$$

ou $$\forall a\alpha \notin U \Rightarrow \text{il existe } b \text{ tel que } (b/a)\alpha \notin U$$

Le problème de complétude s'énonce alors de la façon suivante :

Tout énoncé universellement valide est démontrable , c'est-à-dire :

Si A appartient à toutes les validations, alors $A \in T$.

CALCULS PRELIMINAIRES .

Nous allons considérer des notions moins restrictives que celle de validation. Soit A un énoncé, I_A sa base (ensemble fini des individus dont il dépend), $a \in I_A$, et soit V un s.d.c. Nous dirons que :

V est $(\exists,A,a)$-validant si $\exists x[(x/a)A] \notin V$ ou s'il existe b tel que $(b/a)A \in V$

V est $(\forall,A,a)$-validant si $\forall x[(x/a)A] \in V$ ou s'il existe b tel que $(b/a)A \notin V$

V est (A,a)-validant s'il est à la fois $(\exists,A,a)$-validant et $(\forall,A,a)$-validant

V est A-validant s'il est (A,a)-validant pour tout $a \in I_A$

et si $J \subset E$

V est J-validant s'il est A-validant pour tout $A \in J$.

Les validations sont donc les s.d.c. E-validants.

Dans l'anneau quotient E/R nous obtenons les notions correspondantes d'ultrafiltres $(\exists,\alpha,a)$-validant, etc.....

Si σ désigne l'application de Stone de E/R dans l'espace booléien dual X

(ensemble des ultrafiltres de E/R) : $\sigma(\alpha) = \{U \in X : \alpha \in U\}$.

L'ensemble des ultrafiltres $(\exists,\alpha,a)$-validants est alors : $\sigma(\neg\exists a\alpha) \cup \bigcup_b \sigma((b/a)\alpha)$;
soit $\mathcal{U}_{\exists\alpha a}$ cet ensemble, c'est un ouvert de X (réunion d'ofs.), en outre il est partout dense, en effet :

Soit U un ultrafiltre quelconque, supposons qu'il ne soit pas adhérent à $\mathcal{U}_{\exists\alpha a}$: il existe un of $\sigma(\beta) \subset \complement\mathcal{U}_{\exists\alpha a}$ tel que $U \in \sigma(\beta)$, c'est-à-dire $\beta \in U$.

Soit b un individu : si $(b/a)\alpha \neq 0$, soit U' un ultrafiltre contenant $(b/a)\alpha$, donc $U' \in \mathcal{U}_{\exists\alpha a}$, donc $\beta \notin U'$, d'où $\neg\beta \in U'$ il en résulte :

$$(b/a)\alpha \leqslant \neg\beta \text{ pour tout } b$$

d'où $\exists a\alpha \leqslant \neg\beta$, or $\exists a\alpha \in U$ donc $\neg\beta \in U$ ce qui est contradictoire.

En ce qui concerne les ensembles d'ultrafiltres $(\forall,\alpha,a)$-validants, (α,a)-validants, et α-validants, on a les formules immédiates suivantes :

$$\mathcal{U}_{\forall\alpha a} = \mathcal{U}_{\exists\neg\alpha a} \qquad \mathcal{U}_{\alpha a} = \mathcal{U}_{\exists\alpha a} \cap \mathcal{U}_{\forall\alpha a} \qquad \mathcal{U}_{\alpha} = \bigcap_{I_\alpha} \mathcal{U}_{\alpha a} \text{ (intersection finie)}$$

L'espace booléien X étant un espace de Baire, il en résulte que tous ces ensembles sont des ouverts partout denses.

Nous établirons également :

<u>1er lemme fondamental</u> : $J \subset E$;

$S_J(E)$: ensemble des sous-énoncés de J, dans E.

Si V est un sdc $S_J(E)$-validant, alors il existe une validation V_h telle que $V_h \cap S_J(E) = V \cap S_J(E)$

Le principe de la démonstration est le suivant :

Soit H la fonction caractéristique de V, h sa restriction à $\mathfrak{A}$ et $\bar{h}$ le prolongement à E définissant la validation V_h.

On montre par récurrence sur l'ordre de $B \in S_J(E)$: $H(B) = \bar{h}(B)$

- vrai par définition si $B \in \mathfrak{A}$

– si $B = \neg C$ on a aussi $C \in S_J(E)$ donc $H(C) = \tilde{h}(C)$ d'où $H(B) = \tilde{h}(B)$

....

– si $B = \exists x[f^x]$, pour tout a : $(a/x)f^x \in S_J(E)$ donc $H((a/x)f^x) = \tilde{h}((a/x)f^x)$,

or V étant $S_J(E)$-validant : $H(B) = 1 \Leftrightarrow$ il existe a tel que $E((a/x)f^x) = 1$

$$\Leftrightarrow \tilde{h}(B) = 1$$

Corollaire : il y a équivalence entre :

. J est contenu dans une validation (resp. toute validation)

. J est contenu dans un sdc $S_J(E)$-validant (resp. tout sdc $S_J(E)$-validant).

Ce résultat a été établi pour une partie J quelconque, car il pourra ainsi être utilisé par le théorème plus général de Löwenheim-Skolem, mais pour le théorème de Gödel il suffira de prendre pour J l'ensemble réduit à un énoncé A.

COMPLETUDE DANS LE CAS DENOMBRABLE.

Nous supposons ici que l'ensemble I des individus est dénombrable, par suite pour tout énoncé A, $S_A(E)$ sera dénombrable ; soit $S_A(E) = \{A_n\}_N$.

Dans E/R $\alpha = \phi(A)$ $\alpha_n = \phi(A_n)$

$\bigcap_N \mathcal{U}_{\alpha_n}$ est partout dense (propriété de Baire)

donc si $A \notin T$: $\sigma(\neg\alpha) \neq \emptyset$ et il existe $U \in \sigma(\neg\alpha) \cap \bigcap \mathcal{U}_{\alpha_n}$

soit $V = \overline{\phi}^{-1}(U)$ c'est un sdc $S_A(E)$-validant et $\neg A \in V$, c'est-à-dire $A \notin V$. Il résulte alors du corollaire précédent que A n'est pas universellement valide.

COMPLETUDE DANS LE CAS GENERAL.

I est un ensemble quelconque.

Nous utiliserons alors la notion de sous-logique : soit I^* une partie infinie de I, nous appelerons sous-logique construite sur I^* l'ensemble E^* des énoncés du calcul des prédicats construits avec I^* (avec les mêmes variables, prédicats et connecteurs que pour E).

Cet ensemble E^* coïncide d'ailleurs avec $E(I^*) = \{A \in E : I_A \subset I^*\}$.
T^* désignera l'ensemble des énoncés démontrables de E^* et $T(I^*) = T \cap E^*$.
On vérifie aisément $T^* \subset T(I^*)$.
(L'inclusion inverse, qui est exacte, résultera du théorème de complétude).

Si s est une application $I \to I^*$, pour tout énoncé $A \in E$ on pourra définir l'énoncé $s(A) \in E^*$.

On a alors :

<u>2ème lemme fondamental</u> : soit s une application surjective $I \to I^*$. Si V^* est une validation de E^*, alors $\overset{-1}{s}V^* = \{A \in E : s(A) \in V^*\}$ est une validation de E.

En effet :

1) si $A \in \overset{-1}{s}V^*$: $s(A) \in V^*$ donc $\neg s(A) = s(\neg A) \notin V^*$: $\neg A \notin \overset{-1}{s}V^*$ et réciproquement;

....

5) si $\exists x[f^x] \in \overset{-1}{s}V^*$: $s(\exists x[f^x]) = \exists x[s(f^x)] \in V^*$, donc il existe $a \in I^*$ tel que $(a/x)s(f^x) \in V^*$, or s étant surjective : $a = s(a')$, $a' \in I$ alors $(a/x)s(f^x) = s((a'/x)f^x) \in V^*$ donc $(a'/x)f^x \in \overset{-1}{s}V^*$, et réciproquement.

Notons que la fonction caractéristique de $\overset{-1}{s}V^*$ est $h^*_o s$.

La démonstration du théorème général de complétude en résulte :

Si A est universellement valide, on choisit un domaine dénombrable $I^* \supset I_A$ et une application surjective $s : I \to I^*$ constante sur I_A : $s(A) = A$.

Alors pour toute validation V^* de E^* : $A \in \overset{-1}{s}V^*$ donc $A \in V^*$

A est donc universellement valide dans E^* et d'après le cas dénombrable $A \in T^*$ or $T^* \subset T \cap E^*$, donc $A \in T$.

<u>Remarque</u> : si $B \in T \cap E^*$: $B \in T$ donc B appartient à toute validation de E, donc à toute validation de E^* , donc à T^*. On a donc l'égalité : $T^* = T \cap E^*$.

Remarque : le 2ème lemme fondamental admet une forme atténuée qui est la suivante :

Si s est une application quelconque : $I \to I^{*}$ et si V^{*} est un sdc de E^{*} alors $\overset{-1}{s}V^{*}$ est un sdc de E.

La vérification ne présente aucune difficulté.

Daniel PONASSE
Professeur à la Faculté des Sciences
de Lyon
Département de Mathématiques
15, quai Claude Bernard.