AIMÉ FUCHS

Sur le théorème de Khintchine

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1966, tome 3, fascicule 1
, p. 31-40
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1966__3_1_31_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1966 t. 3-1

SUR LE THEOREME DE KHINTCHINE

Aimé FUCHS

0. Introduction :

Le présent travail ne prétend pas à l'originalité, il essaie tout simplement de rendre un peu plus claire la démonstration classique du théorème de Khintchine et du théorème central limite que l'on trouvera par exemple dans (I). L'outil essentiel dont on se servira est une application qui à une variable aléatoire (v.a.) X associe une v. a. X' au moyen d'un processus de Poisson. Cette application a la propriété essentielle que l'image correspondante X' de X est toujours indéfiniment divisible. En dehors de cette propriété elle en possède d'autres qui ont leur intérêt propre mais étranger au sujet qui nous préoccupe, ainsi le fait de transformer un système de v. a. uniformément asymptotiquement négligeables en un système qui a la même propriété.

Dans tout l'exposé on ne s'intéressera qu'aux lois de probabilités des v. a. qui interviennent de sorte qu'en toute rigueur on pourrait se dispenser de parler de v. a. et n'utiliser que la notion de fonction caractéristique. Nous n'avons pas pensé devoir opérer ainsi, le langage des v. a. étant bien plus commode.

1. Rappel de quelques propriétés :

Définition 1 : Une variable aléatoire (v.a.) réelle X est dite indéfiniment divisible (i.d.) si pour tout entier $n \geq 1$ il existe un système de n s v.a. réelles indépendantes, de même loi de probabilités (l.p.),

soit $(X_1, \ldots, X_n)$ et tel que :

$$X = X_1 + \ldots + X_n .$$

En fait nous nous intéresserons seulement aux l.p. des v.a. qui interviennent ; ceci nous permettra d'adopter la définition légèrement plus générale suivante (I p. 247).

Définition 2 : Soit ϕ la fonction caractéristique (f.c.) d'une v.a. réelle X.

La l.p. de X est dite i.d. si pour tout entier $n \geq 1$ il existe une f.c. ϕ_n telle que

$$\phi = (\phi_n)^n .$$

On dira alors que la f.c. ϕ elle-même est i.d.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que ϕ^λ soit une f.c. pour tout $\lambda > 0$.

Théorème de représentation de Lévy-Khintchine :

Soit ϕ une f.c. i.d. . Alors ϕ ne peut s'annuler sur $\mathbb{R}$ et son logarithme (on prend la détermination principale) admet une représentation de la forme

$$\mathrm{Log}\,\phi(t) = i\gamma t + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right) \frac{1+u^2}{u^2}\, dG(u) = (\gamma, G)$$

où $\gamma \in \mathbb{R}$ et G est une fonction croissante bornée (on pose $G(-\infty) = 0$).

En outre cette représentation est unique.

Théorème de convergence : Soit $\{X_n\}$ une suite de v.a. réelles i.d. . Associons lui la suite des f.c. correspondantes $\{\phi_n = (\gamma_n, G_n)\}$.

1) Si X_n converge en loi vers une v.a. limite X, cette limite est elle-même i.d. et sa f.c. ϕ peut donc s'écrire sous la forme $\phi = (\gamma, G)$.

2) Une condition nécessaire et suffisante pour que la suite de v.a. X_n converge en loi vers une v.a. limite X est que

a $\Upsilon_n \to \Upsilon$	b $<f,G_n> \to <f,G>$ quelle que soit f continue bornée où $<f,G> = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\, G(x)$

2. Traitement d'un exemple.

Considérons une famille de v.a. $\{X_{nk}\}$ $n\geq 1$; $k = 1,\ldots,n$ que nous disposerons comme suit

$$
(\mathrm{I}) \qquad
\begin{array}{llll}
X_{11} & & & \\
X_{21} & X_{22} & & \\
\cdot & \cdot & & \\
\cdot & \cdot & & \\
X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nn} \\
\cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & & \cdot
\end{array}
$$

Supposons en outre que dans chaque ligne les v.a. soient indépendantes et adoptons pour X_{nk} (n et k fixés) la l.p. suivante :

$$
X_{nk} = \left|
\begin{array}{ll}
1 \text{ avec probabilité } p_{nk} & 0<p_{nk}<1 \\
 & \\
0 \text{ avec probabilité } 1-p_{nk} & n\geq 1 \;;\; k = 1,\ldots,n
\end{array}
\right.
$$

Posons ensuite $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_{nk}$; $\alpha_n = \sup_{k=1}^{n} p_{nk}$; $a_n = \sum_{k=1}^{n} p_{nk} = E\,(S_n)$.

On a alors le théorème suivant [cf II].

Théorème : Une condition nécessaire et suffisante pour que la suite de v.a. $\{S_n\}$ converge en loi vers une v.a. de Poisson $\mathcal{P}$ est que

$$
\begin{cases}
\alpha_n \to 0 \\
a_n \to \lambda>0
\end{cases}
\qquad (\lambda \text{ est le paramètre de la v.a. de Poisson limite}).
$$

Remarque :

Nous avons donné cet exemple parce que nous voyons apparaître, de façon naturelle la condition $\alpha_n \to 0^{(n \to \infty)} \Leftrightarrow \sup_{k=1}^{n} P\{|X_{nk}| > \varepsilon\} \to 0^{(n \to \infty)}$ pour tout $\varepsilon > 0$ qui est une condition imposant des restrictions sérieuses aux v.a. X_{nk} qui constituent le schéma I. C'est la condition que nous adopterons dans la suite lorsque nous poserons le problème général conduisant au théorème de Khintchine.

3. Position du problème :

L'exemple précédent nous amène à poser le problème suivant :

Problème : Soit $\{X_{nk}\}$, $n \geq 1$, $k = 1,\ldots,n$ une famille de v.a. telle que pour tout n fixé les v.a. $X_{n1},\ldots,X_{nn}$ soient indépendantes et "petites en probabilité" en un sens que nous préciserons dans un instant.

Posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_{nk}$.

a. Quelle est la classe $(\mathfrak{C})$ des v.a. que l'on peut obtenir comme limites en loi de suites du type S_n.

b. Si la classe $(\mathfrak{C})$ n'est pas vide, et si $X \in (\mathfrak{C})$, quelles sont des conditions nécessaires et suffisantes pour que $S_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ ($\mathcal{L}$: converge en loi).

Précisions apportées à ce problème :

Nous avons déjà signalé que les v.a. $\{X_{nk}\}$ doivent être soumises à une condition supplémentaire, autre que la seule indépendance pout tout n fixé. Il est en effet facile de voir que sinon toute v.a. X pourrait être considérée comme limite en loi d'une suite du type S_n.

Nous adopterons comme condition supplémentaire la condition que nous avons rencontrée naturellement lors du traitement de l'exemple (§ 2).

Définition : Le système $\{X_{nk}\}$ est dit uniformément asymptotiquement négligeable (u. a. n.) si l'on a

$$(1) \quad \sup_{k=1}^{n} P\{|X_{nk}| \geq \varepsilon\} \to 0 \qquad (n \to \infty) \qquad \forall\, \varepsilon > 0 .$$

Critère u.a.n. (cf. III p. 302)

Une condition nécessaire et suffisante pour que le système de v.a. $\{X_{nk}\}$ soit u.a.n. est que, en désignant par ϕ_{nk} la f.c. de X_{nk} :

$$(1') \quad \sup_{k=1}^{n} |\phi_{nk}(t) - 1| \to 0 \quad (n \to \infty)$$ uniformément dans tout intervalle fini de variation de t.

4. Théorème de Khintchine : Soit $\{X_{nk}\}$; $n \geq 1$; $k = 1,\ldots,n$ une famile de v.a. telle que pour tout n fixé les v.a. $X_{n1},\ldots,X_{nn}$ soient idépendantes. Posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_{nk}$.

Si le système des X_{nk} est u.a.n. la classe ($\mathcal{C}$) des v.a. limites en loi de somme du type S_n coïncide avec celle des v.a. i.d. .

Nous donnerons une démonstration de ce théorème se basant sur l'application qui à une v.a. donnée X associe une v.a. i.d. X' de la façon suivante :

a . Soit X une v.a. de f.c. ϕ ; associons lui une v.a. X' de f.c. $\phi' = e^{\phi-1}$

$$\begin{cases} X \\ \phi \end{cases} \to \begin{cases} X \\ \phi' = e^{\phi-1} \end{cases} .$$

On sait que si ϕ est une f.c. il en est de même de $\phi' = e^{\phi-1}$ (théorème de Finetti) et il est immédiat que la f.c. ϕ' est i.d. .

L'application que nous venons de définir admet l'interprétation suivante.

Soient $\{X_n\}$ une suite de v.a. indépendantes dont chacune a même l.p. que X et N une v.a. de Poisson de paramètre 1, indépendante de la suite $\{X_n\}$. Alors la v.a. $X' = \sum_{n=1}^{N} X_n$ admet pour f.c. $\phi' = e^{\phi-1}$. Ce procédé de construction de X' à partir de X peut se réaliser de la manière suivante : Considérons un processus de Poisson stationnaire de paramètre 1 ; alors le nombre de tops dans $[0, 1]$ est une v.a. N qui est poissonnienne de paramètre 1. Associons au n-ième top la v.a; X_n et soit X' la somme des effets relatifs à tous les tops se produisant dans $[0,1]$: alors $X' = \sum_{n=1}^{N} X_n$.

En injectant de la sorte une v.a. donnée X dans un processus de Poisson on récolte une v.a. X' qui est en outre i.d.

b . L'application $X \to X'$ que nous venons de définir est intéressante parce que certaines propriétés essentielles de X restent conservées. Ceci se conçoit intuitivement en remarquant qu'en moyenne il y a un top dans l'intervalle $[0,1]$. Un calcul élémentaire montre que

1) Si E(X) existe et est finie, il en est de même de E(X') et $E(X) = E(X')$.

2) Si X est une v.a. du second ordre centrée, il en est de même de X' et Var X = Var X'.

c . Partons à présent du système de v.a. $\{X_{nk}\}$ de (3) et faisons lui subir l'application définie ci-dessus

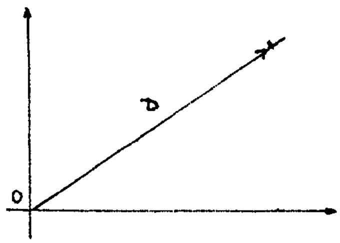
$$\begin{cases} X_{nk} \\ \phi_{nk} \end{cases} \to \begin{cases} X'_{nk} \\ \phi'_{nk} = e^{\phi_{nk}-1} \end{cases} .$$

Il est clair que l'on peut toujours choisir les X'_{nk} de telle sorte que pour tout $n\geq 1$ les v.a. $X'_{n1}, \ldots, X'_{nn}$ soient indépendantes. Cette application est également intéressante dans ce cas car nous allons montrer que si la famille $\{X_{nk}\}$ est u.a.n. il en est de même de la famille $\{X'_{nk}\}$. Pour le voir nous nous baserons sur le lemme suivant :

<u>Lemme</u> : Pour tout $\alpha\in\mathbb{C}$ avec $|\alpha|\leq 1$ on a l'inégalité

$$|e^{\alpha-1}-1|\leq|\alpha-1|.$$

<u>Démonstration</u> : Pour $z_0\in\mathbb{C}$ on a $e^{z_0}-1=\int_D e^z\,dz$

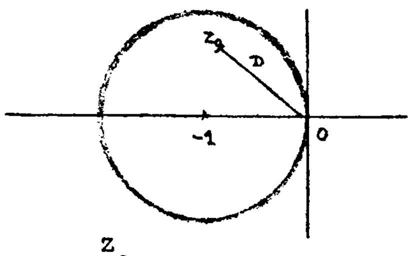


où D est le segment joignant 0 à z_0 et orienté de 0 vers z_0 ; il en résulte :

$$|e^{z_0}-1|\leq|z_0|\sup_{z\in D}|e^z| = |z_0|\sup_{z\in D} e^{\Re z} = |z_0|\, e^{\sup_{z\in D}\Re z}.$$

Prenons alors $z_0=\alpha-1$ $(|\alpha|\leq 1)$;

c'est-à-dire $z_0\in\mathcal{C}(-1,1)$ = cercle de centre -1 et de rayon 1



d'où $\sup_{z\in D}\Re z = 0$ et $|e^{z_0}-1|\leq|z_0|$ d'où le lemme en remplaçant z_0 par $\alpha-1$.

Appliquons à présent ce lemme à la f.c. ϕ_{nk} (on sait que $|\phi_{nk}(t)|\leq 1$ $\forall t\in\mathbb{R}$)

$$|e^{\phi_{nk}-1}-1| = |\phi'_{nk}-1|\leq|\phi_{nk}-1|$$

$$\Rightarrow (2)\quad \sup_{k=1}^{n}|e^{\phi_{nk}-1}-1| = \sup_{k=1}^{n}|\phi'_{nk}-1|\leq\sup_{k=1}^{n}|\phi_{nk}-1|.$$

Si alors le système $\{X_{nk}\}$ est u.a.n. le critère u.a.n. affirme que $\sup\limits_{k=1}^{n} |\phi_{nk}(t)-1| \to 0(n\to\infty)$ uniformément dans tout intervalle fini de variation de t. Il en résulte alors de l'inégalité (2) que l'on a la même propriété en remplaçant les ϕ_{nk} par les ϕ'_{nk} et alors le même critère affirme que le système des $\{X'_{nk}\}$ est u.a.n. Nous énoncerons donc

<u>Proposition</u> : Soit $\{X_{nk}\}$ un système de v.a. (tel que pour tout n les $X_{n1}, \ldots, X_{nn}$ soient indépendantes) et qui est u.a.n. . Associons lui un système de v.a. $\{X'_{nk}\}$ par l'application décrite ci-dessus. Alors le système $\{X'_{nk}\}$ est encore <u>u.a.n.</u> mais en outre chaque X'_{nk} est <u>i.d.</u> . Donc non seulement on n'a rien perdu d'essentiel (à savoir la propriété u.a.n.) en substituant les X'_{nk} aux X_{nk} mais on a obtenu une famille de v.a. <u>i.d.</u> , c'est-à-dire ayant des propriétés plus riches que la famille de départ.

<u>d</u> . Associonssà la somme $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_{nk}$ la somme $S'_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X'_{nk}$ de v.a. <u>indépendantes</u> et <u>i.d.</u> . On sait que S'_n est également <u>i.d.</u> . Formons la différence $\text{Log}\,\phi_{S_n} - \text{Log}\,\phi_{S'_n}$.

Le théorème de Khintchine s'établit alors sans difficulté à partir du lemme de comparaison que nous énoncerons de la façon suivante (cf I).

<u>Lemme</u> : Soit $\{X_{nk}\}$ un système de v.a. du type ci-dessus et que nous supposerons <u>u.a.n.</u> . Si S_n converge en loi vers une v.a. limite X, alors

$$\text{Log}\phi_{S_n}(t) - \text{Log}\phi_{S'_n}(t) \to 0$$

cette dernière convergence étant uniforme dans tout intervalle fini de variation de t.

Il en résulte que si $\text{Log}\phi_{S_n}(t) \to \text{Log}\phi_X(t)$ uniformément dans tout intervalle fini de t on a également $\text{Log}\phi_{S'_n}(t) \to \text{Log}\phi_X(t)$ dans les mêmes conditions. Mais d'après un théorème de P. Lévy ceci équivaut à dire que $S'_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. Mais S'_n est une suite de v.a. i.d. et l'on sait que la limite en loi de v.a. i.d. est elle même i.d. ; donc X est i.d. c.q.f.d.

5. Application au théorème central limite :

Il ressort de (4), en utilisant les mêmes notations, que si $\{X_{nk}\}$ est un système de v.a. tel que pour tout $n>1$ les v.a. $X_{n1}, \ldots, X_{nn}$ soient indépendantes et qui est en outre u.a.n. les deux conditions suivantes sont équivalentes :

a. $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_{nk} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$

(X nécessairement i.d.) ;

b. $S'_n = \sum_{k=1}^{n} X'_{nk} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$

or établir des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'on ait (1) est établir un théorème central limite. On voit qu'il est équivalent d'établir des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'on ait b. Mais ce dernier point est trivial parce que la suite S'_n est une suite de v.a. i.d. et que le théorème de convergence que nous avons rappelé en (1) donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite de v.a. i.d. converge en loi vers une v.a. limite (elle-même i.d.).

S'_n et X étant i.d. on peut écrire les représentations de Lévy-Khintchine :

$$\begin{cases} \operatorname{Log}\phi_{S'_n} = (\gamma_n, G_n) & \gamma_n \in R \quad G_n \text{ croissante bornée} \\ \operatorname{Log}\phi_X = (\gamma, G) & \gamma \in R \quad G \text{ croissante bornée;} \end{cases}$$

Alors une condition nécessaire et suffisante pour que $S'_n \to X$ est que

$$\begin{cases} \gamma_n \to \gamma \\ \langle f, G_n \rangle \to \langle f, G \rangle & \text{quelle que soit } f \text{ continue bornée.} \end{cases}$$

On notera que les quantités γ_n et G_n peuvent s'exprimer en fonction de la l.p. des X_{nk} ; en les exprimant de cette manière on obtient l'énoncé classique du théorème central limite :

Théorème : Une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_{nk}$ converge en loi vers v.a. limite nécessairement i.d. est qu'il existe un nombre $\gamma \in \mathbb{R}$ et une fonction croissante bornée G tels que

$$\begin{cases} \gamma_n \to \gamma \\ \langle f, G_n \rangle \to \langle f, G \rangle \quad \text{quelle que soit f continue bornée.} \end{cases}$$

BIBLIOGRAPHIE

1 : GNEDENKO & KOLMOGOROFF : Limit distributions for sums of independent random variables. Addison-Wesley (1954).

II : A. FUCHS & N. ROBY : Sur le domaine d'attraction de la loi de Poisson Public. I S U P (vol. 9, fasc. 4 ; 1960).

III : LOEVE M. : Probability Theory. 3rd Ed. , D. Van Nostrand (1963).

Aimé FUCHS
Professeur à la Faculté des Sciences
Palais de l'Université
STRASBOURG