J. DAZORD

Anneau filtre de Gelfand

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1966, tome 3, fascicule 1
, p. 41-53
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1966__3_1_41_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1966 t. 3-1

ANNEAU FILTRE DE GELFAND (x)

J. DAZORD

Nous considérons exclusivement des anneaux commutatifs à élément unité. Un anneau de Zariski est un anneau nothérien $\mathfrak{a}$-adique dont le radical est ouvert. L'étude des algèbres de Gelfand ([1]) nous a permis de constater qu'un anneau de Zariski n'est autre qu'un anneau noétherien $\mathfrak{a}$-adique de Gelfand. Dès lors il nous a paru naturel de rechercher les propriétés des anneaux de Zariski qui peuvent être étendues aux anneaux de Gelfand.

Nous nous bornerons aux filtrations linéaires. Nous conviendrons donc d'appeler anneau filtré la donnée d'un couple $(A,(\mathfrak{a}_n))$ où A est un anneau et $(\mathfrak{a}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite décroissante d'idéaux de A constituant une filtration compatible avec la structure d'anneau de A, c'est-à-dire vérifiant les propriétés :

(1) $\mathfrak{a}_n \mathfrak{a}_p \subset \mathfrak{a}_{n+p}$ pour tout $(n,p)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}$

(2) $\mathfrak{a}_0 = A$

Nous savons qu'il existe sur A une topologie et une seule compatible avec sa structure d'anneau pour laquelle $(\mathfrak{a}_n)$ constitue un système fondamental (dénombrable) de voisinages de o.

Etant donné deux anneaux filtrés $(A,(\mathfrak{a}_n))$ et $(B,(\mathfrak{B}_n))$, un homomorphisme $h : A \rightarrow B$ est dit compatible avec les filtrations de A et B si l'on a : $h(\mathfrak{a}_n)\ \mathfrak{B}_n$ pour tout $n\in\mathbf{N}$. La catégorie des anneaux filtrés a pour objets les

(x) Cet article fait partie d'un travail de recherche sous la responsabilité de G Maury anneaux filtrés et pour morphismes les homomorphismes compatibles avec les filtrations. La catégorie des anneaux $\mathfrak{a}$-adiques est définie, de façon naturelle, comme sous-catégorie pleine de la précédente.

(o.1) Proposition : La catégorie des anneaux filtrés est une sous-catégorie de la catégorie des anneaux topologiques. La catégorie des anneaux $\mathfrak{a}$-adiques est une sous-catégorie pleine de la catégorie des anneaux topologiques.

En effet, un homomorphisme compatible avec les filtrations est continu. D'autre part, pour qu'un homomorphisme d'anneaux $\mathfrak{a}$-adiques soit continu, il faut et il suffit qu'il soit compatible avec les filtrations ([2]).

Nous nous proposons tout d'abord de caractériser les filtrations $\mathfrak{a}$-adiques parmi les filtrations quelconques.

1. Filtration quelconque et filtration $\mathfrak{a}$-adique.

Il est bien connu qu'étant donné un anneau Noethérien $\mathfrak{a}$-adique A, un A-module de type fini E et un sous-module F de E, la topologie $\mathfrak{a}$-adique de F, est induite par la topologie $\mathfrak{a}$-adique de E. Plus généralement, étant donnée un A-module E et un A-module de type fini E' munis de la filtration $\mathfrak{a}$-adique tout homomorphisme f : E $\to$ E' est un morphisme strict.

Si la topologie définie par la filtration $(\mathfrak{a}_n)$ n'est pas la topologie grossière, nous supposerons désormais que $\mathfrak{a}_1$ est un idéal propre. Nous dirons que la filtration $(\mathfrak{a}_n)$ est plus fine que la filtration $(\mathfrak{b}_n)$ si la filtration $(\mathfrak{a}_n)$ définit sur A une topologie plus fine que $(\mathfrak{b}_n)$; si ces deux topologies coïncident, nous dirons que les filtrations $(\mathfrak{a}_n)$ et $(\mathfrak{b}_n)$ sont équivalentes.

(1.1) Lemme : La filtration $\mathfrak{a}_1$-adique est plus fine que la filtration $(\mathfrak{a}_n)$.

La relation : $\mathfrak{a}_1^n \subset \mathfrak{a}_n$ s'établit, en effet, immédiatement à partir de la relation de compatibilité (1).

(1.2) Lemme : pour que la filtration $(\mathfrak{a}_n)$ soit équivalente à une filtration $\mathfrak{a}$-adique il faut et il suffit que le produit de deux idéaux ouverts de $(A,(\mathfrak{a}_n))$ soit un idéal ouvert.

En effet, si le produit de deux idéaux ouverts de $(A, (\mathfrak{a}_n))$ est un idéal ouvert, $\mathfrak{a}_1^n$ est ouvert pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(1.3) Proposition : Soit $(A,(\mathfrak{a}_n))$ un anneau filtré. Supposons que pour tout A-module E, tout A-module de type fini E' et tout homomorphisme $f : E \to E'$, f soit un morphisme strict, E et E' étant munis des filtrations déduites de la filtration de A. Alors la filtration $(\mathfrak{a}_n)$ est équivalente à une filtration $\mathfrak{a}$-adique.

Nous prendrons : $E' = A$, $E = I$ où I est un idéal ouvert de A. Soit J un autre idéal ouvert. Il existe n et p dans N tels que : $\mathfrak{a}_n \subset I$ et $\mathfrak{a}_p \subset J$. De plus, il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que : $\mathfrak{a}_s \cap I \subset \mathfrak{a}_p I$. Ainsi : $IJ \supset \mathfrak{a}_p I \supset \mathfrak{a}_s \cap I \supset \mathfrak{a}_s \cap \mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}_t$ avec $t = \mathrm{Max}(n,s)$, ce qui démontre la proposition en vertu de (1.2).

Etant donné l'anneau filtré $(A,(\mathfrak{a}_n))$ nous aurions démontré le même résultat en formulant ainsi l'hypothèse : pour tout A-module de type fini E et tout sous-module F de E la topologie de F définie par la filtration $(\mathfrak{a}_n F)$ coïncide avec la topologie induite sur F par la topologie de E définie par la filtration $(\mathfrak{a}_n E)$.

Dans le cas d'un anneau Noethérien, nous obtenons alors une caractérisation des filtrations $\mathfrak{a}$-adiques :

(1.4) Proposition : Soit $(A,(\mathfrak{a}_n))$ un anneau filtré Noethérien . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1 - la filtration $(\mathfrak{a}_n)$ est équivalente à une filtration $\mathfrak{a}$-adique.

2 - pour tout A-module E, tout A-module de type fini E' et tout homomorphisme $f : E \to E'$, f est un morphisme strict, E et E' étant

munis des filtrations déduites de la filtration de A.

2. Anneau linéairement topologisé de Gelfand.

Rappelons qu'un anneau linéairement topologisé est un anneau topologique tel qu'il existe un système fondamental de voisinages de 0 formé d'idéaux de A. Un anneau de Gelfand est un anneau topologique A tel que le groupe U des éléments inversibles de A soit, pour la topologie induite par A, un groupe (multiplicatif) topologique ouvert dans A. Autrement dit :

(2.1) Définition : On dit qu'un anneau topologique A est un anneau de Gelfand si :

(a) le groupe des éléments inversibles U de A est ouvert,

(b) l'application : $x \to x^{-1}$ est continue dans U.

(2.2) Lemme : Soit A un anneau linéairement topologisé dont le radical est $\mathfrak{m}$, le groupe des éléments inversibles U. Les assertions suivantes : sont équivalentes :

1 - $\mathfrak{m}$ est ouvert.

2 - U est ouvert.

Soit $\mathfrak{V}$ le système fondamental de voisinages de 0 qui définit la topologie linéaire de A. Etant donné un idéal $\mathfrak{a} \in \mathfrak{V}$ nous savons que la relation : $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$ équivaut à : $1 + \mathfrak{a} \subset U$. Le lemme résulte alors du fait que pour que U soit ouvert, il faut et il suffit que 1 soit intérieur à U.

Dès lors, dans le cas d'un anneau linéairement topologisé A ; il suffit que U soit ouvert pour que A soit un anneau de Gelfand, ce que l'on peut énoncer :

(2.3) Proposition : Soit A un anneau linéairement topologisé de radical $\mathfrak{m}$

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1 - A est un anneau de Gelfand.

2 - $\mathfrak{m}$ est ouvert.

Pour tout $\mathfrak{a} \in \mathcal{B}$, $(1+\mathfrak{a})$ est un voisinage de 1. Il suffit de démontrer la continuité de l'application : $x \to x^{-1}$ au point 1 et pour cela de considérer des voisinages $\mathfrak{a}$ de 0 inclus dans $\mathfrak{m}$, puisque $\mathfrak{m}$ est un voisinage ouvert de 0. La proposition résulte alors de la relation : $(1+\mathfrak{a})^{-1} \subset 1 + \mathfrak{a}$ (pour tout idéal $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$).

Etant donné un anneau filtré $(A,(\mathfrak{a}_n))$, il résulte de la relation : $R(\mathfrak{a}_n) = R(\mathfrak{a}_1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ($R(\mathfrak{a}_n)$ désigne la raçine de l'idéal $\mathfrak{a}_n$; l'égalité se démontre à partir de la relation de compatibilité (1)) que pour qu'un idéal semi-premier de A soit ouvert, il faut et il suffit qu'il contienne $\mathfrak{a}_1$. Ainsi :

(2.4) <u>Proposition</u> : Soit $(A;(\mathfrak{a}_n))$ un anneau filtré. les assertions suivantes sont équivalentes :

1 - A est un anneau de Gelfand.

2 - $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{m}$

En particulier, un anneau de Zariski n'est autre qu'un anneau Noethérien $\mathfrak{a}$-adique de Gelfand.

3. Caractérisation d'un anneau filtré de Gelfand.

Nous savons que pour qu'un anneau $\mathfrak{a}$-adique Noethérien A soit un anneau de Zariski, il faut et il suffit que tout idéal de A soit fermé. Un énoncé analogue ne peut pas être obtenu pour un anneau de Gelfand : un tel anneau n'est, en effet, pas nécessairement séparé (l'idéal (o) n'est alors pas fermé). C'est en étudiant les idéaux non partout denses de A que nous pourrons obtenir une caractérisation d'un anneau de Gelfand.

(3.1) <u>Lemme</u> : Soit $(A,(\mathfrak{a}_n))$ un anneau filtré, I un idéal de A. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1 - I est partout dense.

2 - I et $\mathfrak{a}_1$ sont étrangers.

En effet, dire que I et $\mathfrak{a}_1$ sont étrangers, c'est-à-dire que I et $R(\mathfrak{a}_1)$ le sont. Le lemme résulte alors de la relation : $R(\mathfrak{a}_n) = R(\mathfrak{a}_1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et de l'expression de l'adhérence de I : $\mathrm{adh}(I) = \bigcap_n (I + \mathfrak{a}_n)$.

Désormais, lorsque nous parlerons d'un idéal, il s'agira d'un idéal distinct de A.

(3.2) Proposition : Soit $(A(\mathfrak{a}_n))$ un anneau filtré. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1 - A est un anneau de Gelfand.

2 - Aucun idéal de A n'est partout dense.

3 - Aucun idéal maximal de A n'est partout dense.

Soit U le groupe des éléments inversibles de A.

$1 \Rightarrow 2$ Soit I un idéal de A. Nous avons : $I \subset A-U$. Comme U est ouvert, nous en déduisons : $\mathrm{adh}(I) \subset A-U$.

$3 \Rightarrow 1$ Soit $(\mathfrak{m}_j)_{j\in J}$ la famille des idéaux maximaux de A. Pour tout $j \in J$, $\mathfrak{m}_j$ et $\mathfrak{a}_1$ ne sont pas étrangers, donc : $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{m}_j$. Soit : $\mathfrak{a}_1 \subset \bigcap_j \mathfrak{m}_j = \mathfrak{m}$, ce qui démontre la proposition en vertu de (2.4).

Notons qu'un idéal maximal non partout dense d'un anneau filtré n'est pas seulement fermé mais également ouvert en vertu de (3.1).

(3.3) Corollaire : Soit A un anneau Noethérien $\mathfrak{a}$-adique. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1 - A est un anneau de Zariski.

2 - Aucun idéal de A n'est partout dense.

Une autre caractérisation d'un anneau de Zariski A utilise les A-modules du type fini. Dans le cas d'un anneau filtré de Gelfand nous pouvons énoncer :

(3.4) Proposition : Soit $(A,(\mathfrak{a}_n))$ un anneau filtré. Les assertions suivantes :

1 - A est un anneau de Gelfand.

2 - Pour tout A-module de type fini non nul E, la topologie définie par la filtration $(\mathfrak{a}_n E)$ déduite de la filtration de A n'est pas grossière.

3 - Pour tout A-module de type fini E, tout sous-module propre F de E est non partout dense, E étant muni de la filtration déduite de A.

1 ⇒ 2 si la topologie définie par la filtration $(\mathfrak{a}_n E)$ était grossière, nous aurions : $E = \mathfrak{a}_1 E$. En vertu de (2.4) et du lemme de Nakayama, nous aurions alors : $E = 0$;

2 ⇒ 3 la filtration quotient par F de la filtration de E est la filtration déduite sur E/F par la filtration de A ([3]). Dès lors, Si F était partout dense, la filtration déduite $(\mathfrak{a}_n E/F)$ serait grossière, E/F n'étant pas nul.

3 ⇒ 1 cela résulte de (3.2) en prenant : $E = A$.

De même que la proposition (3.2), la proposition (3.4) permet de modifier l'énoncé des deux caractérisations classiques d'un anneau de Zariski A utilisant les A-modules de type fini.

4. "Gelfandification" d'un anneau filtré.

Le théorème suivant permet d'associer à tout anneau filtré non grossier un anneau filtré de Gelfand, unique à un isomorphisme d'anneaux filtrés près, par un processus analogue à celui de la Zariskification d'un anneau $\mathfrak{a}$-adique.

(4.1) Théorème : Soit $(A, (\mathfrak{a}_n))$ un anneau noethérien filtré non grossier. Il existe un anneau filtré $(A', (\mathfrak{a}'_n))$ et un morphisme $h : A \to A'$ tels que :

(a) $(A', (\mathfrak{a}'_n))$ est un anneau de Gelfand.

(b) h est un morphisme strict.

(c) pour tout morphisme u de $(A, (\mathfrak{a}_n))$ dans un anneau de Gelfand

où j_A est l'homomorphisme canonique $j_A : A \to \hat{A}$, $\hat{\mathfrak{a}}_n$ désignant le séparé complété du sous-anneau $\mathfrak{a}_n$ de A. Etant donné un anneau filtré séparé et complet $(B,(\mathcal{B}_n))$ et un homomorphisme d'anneaux filtrés $f : A \to B$, f est factorisé de façon unique par $\hat{A}$: $f = u \circ j_A$ où u est un homomorphisme continu de $\hat{A}$ dans B. Montrons que u est un homomorphisme d'anneaux filtrés, c'est-à-dire que le problème universel qui définit le séparé complété de l'anneau filtré $(A(\mathfrak{a}_n))$ a une solution dans la catégorie des anneaux filtrés.

Comme f est un homomorphisme d'anneaux filtrés, nous avons :

$$f(\mathfrak{a}_n) = u(j_A(\mathfrak{a}_n)) \subset \mathcal{B}_n \text{ , pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

D'où : $\quad j_A(\mathfrak{a}_n) \subset u^{-1}(\mathcal{B}_n)$

u est continu, $\mathcal{B}_n$ est fermé, donc $u^{-1}(\mathcal{B}_n)$ est fermé dans $\hat{A}$:

$$\hat{\mathfrak{a}}_n = \mathrm{adh}_{\hat{A}}(j_A(\mathfrak{a}_n)) \subset u^{-1}(\mathcal{B}_n)$$

D'où : $\quad u(\hat{\mathfrak{a}}_n) \subset \mathcal{B}_n$.

(5.1) Proposition : Un anneau filtré séparé et complet est un anneau de Gelfand.

Soit $(A,(\mathfrak{a}_n))$ l'anneau filtré considéré. Comme la topologie de A est définie par un système fondamental dénombrable de voisinages de 0 et comme A est séparé, A est métrisable. Nous pouvons prendre comme distance sur A l'ultramétrique invariante par translation définie par : $d(o,x) = 2^{-n}$ si $x \in \mathfrak{a}_n - \mathfrak{a}_{n+1}$ et $d(x,y) = d(0,x-y)$. La topologie $\mathfrak{a}_1$-adique est plus fine que la topologie définie par la filtration $(\mathfrak{a}_n)$, donc séparée : $\bigcap_n \mathfrak{a}_1^n = 0$. Soit $a \in \mathfrak{a}_1$. Nous avons : $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = 0$. Comme A est un espace ultramétrique complet, la série de terme général a^n est convergente. Soit $b = \sum\limits_{n=o}^{+\infty} a^n$. Nous pouvons écrire :

$$(1-a)b = (1-a) \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{p=o}^{n} a^p \right) = \lim_{n \to +\infty} \left((1-a) \sum_{p=o}^{n} a^p \right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} (1-a^{n+1}) = 1 - \lim_{n \to +\infty} a^{n+1} = 1 .$$

Ainsi pour tout $a \in \mathfrak{a}_1$, $(1-a)$ est inversible, ce qui équivaut à écrire : $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{m}$.

(5.2) <u>Corollaire</u> : Soient $(A,(\mathfrak{a}_n))$ un anneau filtré noethérien, $(A_S,(\mathfrak{a}_n^e))$ son Gelfandifié. Les séparés complétés de A et A_S sont isomorphes

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & B \\
& A_S \arrow[ur, "u"] \arrow[d, "j_{A_S}"'] & \\
& \hat{A}_S \arrow[uur, "u'"'] &
\end{tikzcd}$$

$\hat{A}_S$ désigne le séparé complété de A_S.

Soient $(B,(B_n))$ un anneau filtré séparé et complet, $f : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux filtrés. B est un anneau de Gelfand. f est donc factorisé de façon unique par A_S : $f = u \circ h$, u étant un homomorphisme d'anneaux filtrés. u est lui-même factorisé de façon unique par $\hat{A}_S$: $u = u' \circ j_{A_S}$ u' étant également un homomorphisme d'anneaux filtrés et j_{A_S} désignant l'homomorphisme canonique $j_{A_S} : A_S \to \hat{A}_S$. Ainsi le couple $(\hat{A}_S, j_{A_S} \circ h)$ est solution du problème universel qui définit le séparé complété de A, ce qui démontre que $\hat{A}$ et $\hat{A}_S$ sont des anneaux filtrés isomorphes.

L'homomorphisme $j_A : A \to \hat{A}$ permet de munir $\hat{A}$ d'une structure de A-module. Nous noterons $\hat{A} \otimes_A$ le foncteur Mod_A dans Mod_A qui à tout A-module E associe le A-module $\hat{A} \otimes_A E$ et à tout homomorphisme $u : E \to E'$ associe l'homomorphisme $1_{\hat{A}} \otimes u : \hat{A} \otimes_A E \to \hat{A} \otimes_A E'$.

Nous dirons qu'un foncteur $F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}'$ réfléchit l'objet nul si, étant donné un objet A de $\mathbf{C}$, la condition $F(A) = o$ entraine : $A = 0$.

(5.3) <u>Proposition</u> : Si $(A,(\mathfrak{a}_n))$ est un anneau filtré de Gelfand, le foncteur $\hat{A}\otimes_A : \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_A$ réflechit l'objet nul.

Comme le foncteur $\hat{A}\otimes_A$ commute aux limites inductives, il suffit de considérer un A-module E de type fini tel que : $\hat{A}\otimes_A E = 0$. Or nous avons la suite exacte ([4])

$$\hat{A}\otimes_A E \xrightarrow{\alpha_E} \hat{E} \longrightarrow 0$$

(si l'on considère l'homomorphisme canonique $j_E : E \to \hat{E}$, E étant muni de la filtration déduite de la filtration de A, α_E est l'application $\hat{A}$-linéaire définie par l'application A-bilinéaire $(a,x) \to aj_E(x)$ de $\hat{A}\times E$ dans $\hat{E}$). Ainsi : $\hat{E} = 0$, donc : $\mathrm{adh}_E(0) = E$. Or, A étant un anneau de Gelfand, en vertu de (3.4), le sous-module (0) de E ne peut être partout dense qu'à la condition $E = 0$.

(5.4) <u>Proposition</u> : Soit $(A,(\mathfrak{a}_n))$ un anneau filtré de Gelfand. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1 - $\hat{A}$ est un A-module plat

2 - $\hat{A}$ est un A-module fidèlement plat.

Comme la catégorie Mod_A est abélienne, pour que le foncteur $\hat{A}\otimes_A$ soit fidèlement exact, il faut et il suffit qu'il réfléchisse l'objet nul et soit exact. La proposition résulte alors de (5.3).

Nous savons que si $\hat{A}$ est fidèlement plat, l'homomorphisme canonique $j_A : A \to \hat{A}$ est injectif. A est donc séparé. En particulier, le séparé complété d'un anneau filtré $(A,(\mathfrak{a}_n))$ n'est pas nécessairement un A-module plat, contrairement à ce qu'on établit dans le cas d'un anneau Noethérien $\mathfrak{a}$-adique :

(5.5) <u>Corollaire</u> : Soit $(A,(\mathfrak{a}_n))$ un anneau filtré de Gelfand non séparé. $\hat{A}$ n'est pas un A-module plat.

La proposition qui suit permet de se limiter au cas d'un anneau de Gelfand pour étudier la platitude de $\hat{A}$, lorsque A est noethérien :

(5.6) <u>Proposition</u> : Soit $(A,(\mathfrak{a}_n))$ un anneau filtré Noethérien, A_S son Gelfandifié, $\hat{A}$ le séparé complété de A. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1 - $\hat{A}$ est A-plat.

2 - $\hat{A}$ est A_S-plat.

3 - $\hat{A}$ est A_S-fidèlement plat.

Comme $\hat{A} = \hat{A}_S$ les assertions 2 et 3 sont équivalentes en vertu de (5.4).

$3 \Rightarrow 1$. En effet $\hat{A}$ est A_S-fidèlement plat et A_S est A-plat.

$1 \Rightarrow 2$. Soit $(\hat{A})_S$ le module de fractions du A-module $\hat{A}$ défini par S. Comme $\hat{A}$ est A-plat, $(\hat{A})_S$ est A_S-Plat. Considérons l'homomorphisme canonique $j_A : A \to \hat{A}$. Nous savons que $(\hat{A})_S)$ est isomorphe au A_S-module $(\hat{A})_{j_A(S)}$ ([5]), c'est-à-dire $\hat{A}$ puisque les éléments de $j_A(S)$ sont inversibles dans la A-algèbre $\hat{A}_S = \hat{A}$, ce qui démontre que $\hat{A}$ est A_S-plat.

Notons, en particulier, que si l'anneau filtré $(A,(\mathfrak{a}_n))$ est tel que $\hat{A}$ est A-plat, le Gelfandifié de A est séparé.

Etudions, enfin, un anneau filtré $(A,(\mathfrak{a}_n))$ tel que $\hat{A}$ est A-fidèlement plat.

(5.7) <u>Proposition</u> : Soit $(A,(\mathfrak{a}_n))$ un anneau filtré. Si le séparé complété $\hat{A}$ de A est un A-module fidèlement plat, A est un anneau de Gelfand séparé.

Comme $\hat{A}$ est fidèlement plat, pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, il existe un idéal maximal $\mathfrak{n}$ de $\hat{A}$ tel que : $\mathfrak{m} = j_A^{-1}(\mathfrak{n})$ où j_A est l'homomorphisme canonique $j_A : A \to \hat{A}$. $\hat{A}$ étant un anneau de Gelfand, $\mathfrak{n}$ est fermé. Ainsi, tout idéal maximal de A est fermé : A est un anneau de Gelfand en vertu de (3.2) De plus, j_A étant injectif, A est séparé.

BIBLIOGRAPHIE

1 R. OUZILOU : Algèbres involutives à adverse continu. Publications du Département de mathématiques T.2. fasc. 1 - Lyon 1965.

2 P. SAMUEL : Algèbre locale. Mémorial des Sciences Mathématiques. fasc. 123. Gauthier-Villars. - Paris 1953.

3 N. BOURBAKI : Algèbre commutative. ch. 3 § 2, n° 1, p. 20 Hermann - Paris 1961.

4 N. BOURBAKI : Algèbre commutative . ch. 3 § 3 , n° 4, p. 68 Hermann - Paris 1961 .

5 N. BOURBAKI : Algèbre commutative . ch. 2 § 2, n° 2, Prop. 6 p. 84 - Hermann - Paris 1961.