PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

R. CUSIN

Une démonstration concernant le théorème d'interpolation généralisé aux ensembles d'énoncés

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1966, tome 3, fascicule 2
, p. 62-70

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1966__3_2_62_0>

UNE DEMONSTRATION CONCERNANT LE THEOREME D'INTERPOLATION GENERALISE AUX ENSEMBLES D'ENONCES.

Par R. CUSIN

1 - Introduction.

Les notations employées ainsi que les théorèmes énoncés dans ce paragraphe sont précisés dans [5] et [1].

Nous nous plaçons dans le cadre du calcul des prédicats restreint du premier ordre et sans égalité. Le langage utilisé comprend :

- Les individus notés a, b, b, ... ; on suppose que l'ensemble formé est infini. Nous le noterons I.

- Les variables x, y, z, ... formant un ensemble infini X.

- Les prédicats r_n^p , n étant l'indice et p le poids.

- Les connecteurs $\neg$ $\wedge$ $\vee$ $\exists$ $\forall$.

- Les énoncés (ou w.f.f. ne comportant aucune variable libre), qui forment un ensemble noté E.

- Les théorèmes formant un ensemble noté T. Ces théorèmes sont obtenus à partir d'un système de schémas d'axiomes et de règles de détachement classiques.

Nous définissons en outre le symbole $\rightarrow$ en convenant que l'énoncé $A\rightarrow B$ représente l'énoncé $(\neg A)\vee B$.

Nous aurons besoin dans la suite des deux notions fondamentales suivantes :

1) La notion de système déductif complet (en abrégé sdc).

Nous nommerons ainsi toute partie V de E telle que :

a) - $T \subset V \neq E$

b) - V est stable pour la règle de modus ponens : $A \in V$ et $A \to B \in V$ implique $B \in V$.

c) - Pour tout $A \in E$, si $A \notin V$ alors $\neg A \in V$ et si $\neg A \notin V$ alors $A \in V$.

2) La notion de validation.

Toute application $g : E \to \{o,1\}$; $\{o,1\}$ étant considéré comme l'anneau booléien $Z/(2)$, et vérifiant :

$$
I \left\{
\begin{array}{l}
g(\neg A) = \neg g(A) \\
g(A \wedge B) = g(A).g(B) \\
g(A \vee B) = g(A) \cup g(B) \\
g(\exists x[f^x]) = \sup\limits_{a \in I} g((a/x)f^x) \\
g(\forall x[f^x]) = \inf\limits_{a \in I} g((a/x)f^x)
\end{array}
\right.
$$

détermine un ensemble V_g , défini par $V_g = g^{-1}(\{1\})$, que l'on nomme, validation .
Un langage L du premier ordre sera encore appelé dans la suite une logique.
Une sur-logique L^+ de L est, par définition, une logique construite sur un ensemble I^+ d'individus, $I^+ \supset I$, les ensembles des variables, des connecteurs, des prédicats, restant les mêmes.

Enfin, un ensemble $\mathcal{I}$ d'énoncés est dit compatible si $\mathcal{I}$ est inclus dans au moins un sdc V de E, il est incompatible dans le cas contraire. On a alors : les deux théorèmes fondamentaux suivants :

Théorème 1 : (th. de complétude de Gödel) :

> Pour que $A \in T$, il faut et il suffit que $g(A) = 1$ pour toute application $g : E \to \{o,1\}$ vérifiant les propriétés I précédentes.

<u>Théorème 2</u> : (Théorème de Lowenheim-Skolem) :

Tout ensemble compatible I d'énoncés est contenu dans une validation d'une sous-logique. En outre, si l'ensemble des symboles utilisés (ens. des individus, des variables, des prédicats des connecteurs) o pour cardinal $\aleph_\alpha$ $(\alpha \geq 0)$, alors l'ensemble I^+ des individus de la sur-logique L^+ de L peut être pris de sorte que sa cardinalité n'excède pas $\aleph_\alpha$.

2 - <u>Théorème d'interpolation</u>.

Le théorème d'interpolation, donné par Craig [2] en 1957, puis renforcé par Lyndon [4] , en 1959, s'énonce sous la forme suivante :

<u>Théorème d'interpolation</u> [version de Lyndon].

Soient A et C des énoncés d'une logique L et tels que $A \to C \in T$. Si $\neg A \notin T$ (T étant l'ensemble des théorèmes) et si $C \notin T$, alors il existe un énoncé B tel que :

i) - $A \to B \in T$ (ce qui équivaut à $A \vdash B$) et $B \to C \in T$,

ii) - chaque occurrence d'un symbole de prédicat de B a une occurrence à la fois dans A et dans C avec le même signe, positif ou négatif.

<u>Remarque</u> : Lyndon définit le signe d'un symbole de prédicat d'un énoncé A de la façon suivante :

une occurrence d'un symbole r_n^p de prédicat apparaissant dans l'écriture d'un énoncé A est dite <u>positive</u> si ce symbole est dans le champ d'un nombre pair (éventuellement nul) de signe $\neg$; dans le cas contraire, l'occurrence est dite <u>négative</u>.

En 1963, Henkin publia une généralisation de ce théorème aux ensembles d'énoncés [3]. Sa démonstration est indépendante de celle de Lyndon et n'utilise pas le fait que le résultat soit vrai pour deux ensembles réduits à un énoncé chacun. Comme corollaire, Henkin établit l'équivalence entre la notion de déductibilité de l'ensemble K d'énoncés sous les hypothèses de I ($I \vdash K$) et la notion sémantique de conséquence (que nous allons préciser). Nous nous proposons ici de suivre une autre voie ; nous établirons l'équivalence entre la déductibilité sans hypothèse et la notion de conséquence, puis nous utiliserons le théorème de Lyndon pour obtenir celui d'Henkin. Pour cela, nous sommes amenés à poser la définition suivante :

<u>Définition 1</u> : Soient I et K des ensembles d'énoncés ; nous dirons que I <u>mène sémantiquement à</u> K (ou encore que K est une <u>conséquence</u> de I), et nous noterons $I \models K$, si toute validation de toute sur-logique quelconque L^+ de L contenant I rencontre K.

<u>Proposition 1</u>. Dire que K est une conséquence de I équivaut à dire que K se déduit de I au sens de la déductibilité sous hypothèse ;

Autrement dit : $I \models K \Leftrightarrow I \vdash K$.

<u>Preuve</u> : Rappelons que $I \vdash K$ signifie, par définition, que $\{I, K\}$ est incompatible, ce qui équivaut à dire qu'il existe un ensemble fini $A_1, \ldots, A_n$ d'énoncés de I et un ensemble fini $B_1, \ldots, B_m$ d'énoncés de K, tels que

$A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \vdash B_1 \vee \ldots \vee B_m$.

1) - $I \vdash K \Rightarrow I \models K$.

Supposons que $I \vdash K$ et que $I \not\models K$ (ce qui signifie que K n'est pas une conséquence de I) ; alors, il existe une validation V_h^+ d'une sur-logique L^+ de L telle que $I \subset V_h^+$ et telle que $K \cap V_h^+ = \emptyset$. Il en résulte que $\neg K \subset V_h^+$, et par suite que $I \cup \neg K \subset V_h^+$. Ceci est imposible puisque $I \cup \neg K$ est incompatible.

N.B. $\neg K$ est une abréviation qui signifie : l'ensemble des négations des énoncés de K.

2) - $I \models K \Rightarrow I \vdash K$.

Raisonnons encore par l'absurde. Si $I \cup \neg K$ est non incompatible, alors il est contenu dans un sdc V de E ; mais puisque tout sdc peut être immergé dans une validation d'une sur-logique de L (§1 th. 2), il s'ensuit qu'il existe une L^+ validation V_h^+ de L^+ telle que $I \cup \neg K \subset V_h^+$. Comme d'autre part $I \models K$ et que $I \subset V_h^+$, il en résulte l'existence d'un $B \in K$ tel que $B \in V_h^+$ et comme d'après ce qui précède $\neg B \in V_h^+$, on obtient une contradiction.

Théorème d'interpolation [version d'Henkin].

> Soient I et K des ensembles d'énoncés tels que $I \models K$ et tels que, I ne soit pas incompatible et qu'il existe une validation V_{h_o} de L telle que $K \cap V_{h_o} = \emptyset$. Alors, il existe un énoncé B qui vérifie :
>
> i) - $I \vdash B$ et $B \vdash K$,
>
> ii) - tout symbole de prédicat ayant une occurrence positive ou négative dans B a une occurrence de même signe à la fois dans au moins une formule de I et une formule de K.

Preuve : Supposons que $I \models K$, et remarquons que l'on peut se contenter du cas où $I \cap K = \emptyset$ car sinon la preuve est triviale. D'après la proposition 1 on a $I \vdash K$, ce qui équivaut à dire qu'il existe $A_1, \ldots, A_n$ appartenant à I et $C_1, \ldots, C_m$ appartenant à K tels que : $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \vdash C_1 \vee \ldots \vee C_n$. Posons alors $A = A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$ et $C = C_1 \vee \ldots \vee C_n$; on a $A \vdash C$, ce qui équivaut à dire que $A \to C \in T$. D'après le théorème de Lyndon (applicable ici puisque A n'est pas incompatible et que C n'est pas un théorème), nous savons qu'il existe un énoncé B formé des symboles de prédicats occurrant dans A et C avec les mêmes signes, et tel que :

$A\to B \in T$ et $B\to C \in T$. Ce qui précède implique que $I \vdash B$ et $B \vdash K$; et comme en outre la condition ii) du théorème d'Henkin est évidemment satisfaite, le théorème est prouvé.

Remarques.

a) - Les hypothèses I non incompatible et K possèdant une intersection vide avec au moins une validation V_h de L sont nécessaires ; sinon, comme le prouvent les contre-exemples suivants, le théorème n'est plus vrai.

1)- Prendre pour I, $I = \{A, \neg A\}$ et pour K, $K = \{C\}$, où A et C sont des énoncés quelconques sans aucun symbole de prédicat commun.

Il est clair que $I \vDash K$, bien que pourtant il soit impossible de trouver B satisfaisant à i) et ii).

2)- Prendre pour I, $I = \{A\}$ et pour K, $K = \{C, \neg C\}$ ou A est un énoncé non incompatible et C un énoncé sans aucun symbole de prédicat commun avec A. Il est clair que $I \vDash K$ (car toute validation contient soit C soit $\neg C$), bien qu'il soit impossible de trouver B satisfaisant à i) et ii).

b) - Dans la preuve du théorème d'Henkin, nous affirmons que $A = A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$ est non incompatible et que $C = C_1 \vee \ldots \vee C_m$ n'est pas un théorème. Ces affirmations reposent sur le fait que si A était incompatible, alors I le serait, et que si C était un théorème, en particulier, $C_1 \vee \ldots \vee C_m \in V_{h_o}$ (théorème de compatibilité sémantique : cf th. 1 § 1), V_{h_o} étant l'une des validations telle que $K \cap V_{h_o} = \emptyset$. Mais alors, comme $\neg C_1 \in V_{h_o}, \ldots, \neg C_m \in V_{h_o}$, $\neg C_1 \wedge \ldots \wedge \neg C_m \in V_{h_o}$ et donc $\neg(C_1 \vee \ldots \vee C_m) \in V_{h_o}$; ce qui serait contradictoire. Par suite, $C \notin V_{h_o}$, et donc C n'est pas un théorème.

c) - Il semblerait que du théorème de Lyndon on puisse tirer un résultat positif concernant l'algèbre de Tarski-Lindembaum obtenue par passage au quotient, et relatif au fait que cette algèbre est sans trou (un treillis est dit <u>sans trou,</u> si $a<b$ implique l'existence d'un élément c tel que $a<c<b$). Malheureusement, l'existence de l'énoncé "intermédiaire" affirmée par ce théorème, ne nous permet pas de conclure (tout au moins de façon évidente) à ce résultat. En effet, si $A\to C \in T$ et si $C\to A \notin T$, il n'est pas certain que l'on n'ait pas, par exemple, $A \; B \in T$ (où B est l'énoncé "intermédiaire"), ou $B\leftrightarrow C \in T$. On peut trouver de nombreux contre-exemples, dont le suivant :

$$A = r_n^1(a)\wedge[r_m^1(b)\vee\neg r_m^1(b)] \qquad \text{a, b, c, distincts}$$
$$C = r_n^1(a)\vee r_k^1(c). \qquad \text{m, n, k, distincts.}$$

Il est clair que $A\to C \in T$ (on peut utiliser la th. 1 § 1 pour le voir), mais que $C\to A \notin T$; il est clair en outre, que A n'est pas incompatible et que C n'est pas un théorème ; enfin, l'énoncé B ne peut être que $r_n(a)$, et alors : $A\leftrightarrow B \in T$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. BOURTOT & R. CUSIN : Une démonstration du théorème de Löwenheim-Skolem. Pub. de L'Inst. de Math. Fac. Sc. LYON - 1966. t. 3 fasc. 1.

[2] W. CRAIG : Linear reasoning - The Hournal of Sym. Log. vol. 22 (1957) , p. 250-268.

[3] L. HENKIN : Extension of the Craig-Lyndon interp. theo. The Journ. of Sym. Log. Vol 28 (1963), p. 201-216.

[4] R. LYNDON : An interpol. theor. in the predicate calculus. Pac. Jour. of Math. vol. 9 (1959) p. 129-142.

[5] D. PONASSE : Une démonstration du théorème de Gödel Publ. de l'Inst. de Math. de LYON. 1966. t. 3 fasc. 1.

Manuscrit remis le 1 juin 1966

R. CUSIN
Assistant
Département de Mathématiques
15 quai Claude Bernard
LYON