PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

G. MAURY

Enveloppe quasi-injective d'un objet dans une catégorie abélienne de Grothendick à générateur

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1966, tome 3, fascicule 4
, p. 67-74
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1966__3_4_67_0>

ENVELOPPE QUASI-INJECTIVE D'UN OBJET DANS UNE CATEGORIE ABELIENNE DE GROTHENDICK A GENERATEUR.

G. MAURY

Introduction : La notion de module quasi-injectif a été introduite par Johnson [1] . Celui-ci a établi pour tout module l'existence d'une enveloppe quasi-injective [1] et [2] . L'existence d'une enveloppe injective pour un objet d'une catégorie abélienne $\mathcal{C}$ à générateur, de Grothendick est prouvé dans [3] (on pourra aussi se reporter au chapitre 6 du cours [5]. Il est normal de se demander si dans la catégorie $\mathcal{C}$ tout objet a une enveloppe quasi-injective, question qui ne parait pas avoir été résolue.

Remarquons que si $\mathcal{C}$ est "équivalent" à une catégorie de modules, ce qui a lieu si et seulement si $\mathcal{C}$ possède un petit générateur projectif [4] il est prévisible à coup sûr que le résultat escompté est vrai. Il est moins évident si la catégorie $\mathcal{C}$ possède un générateur, sans autre hypothèse sur ce générateur.

On pourra se reporter à l'ouvrage [4] ou au cours [5] pour les propriétés classiques des catégories abéliennes de Grothendick à générateur. Dans la suite $\mathcal{C}$ désignera une telle catégorie.

1 - Préliminaire :

Définition 1 : Un objet M de $\mathcal{C}$ sera dit quasi-injectif si et seulement si pour tout sous-objet N de M (dont un représentant est le monomorphisme $i : N \to M$) et pour tout morphisme $f : N \to M$ il existe un morphisme $h : M \to M$ tel que $f = h.i$.

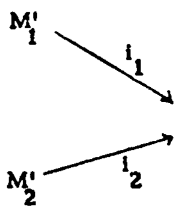
<u>Définition 2</u> : On appelle endomorphisme de M un morphisme h appartenant à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M;M)$, $M \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

<u>Définition 3</u> : Soit h un endomorphisme de M et N un sous-objet de M, de représentant $i : N \longrightarrow M$, on appelle restriction de h à N le morphisme $hi = h'$. N sera dit stable par h si $\mathrm{Im}\, h' = \mathrm{Im}\, hi \leq \mathrm{Im}\, i = i$ ou encore $h(N) \leq N$.

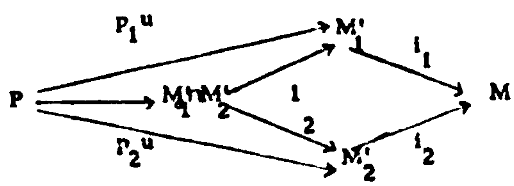
Démontrons d'abord les lemmes suivants que d'aucuns considéreront comme évidents :

<u>Lemme 1</u> : Soient M'_1 et M'_2 deux sous-objets de M, tels que $M'_1 \cap M'_2 = 0$. Posons $P = M'_1 \oplus M'_2$. Alors $P = M'_1 \vee M'_2$.

<u>Démonstration</u> : Soient $i_1 = M'_1 \rightarrow M$ et $i_2 : M'_2 \longrightarrow M$ des représentants des sous-objets M'_1 et M'_2 de M. On sait que si l'on a $\varphi = i_1p_1 + i_2p_2$; $\mathrm{Im}\, \varphi = M'_1 \vee M'_2$, p_1 ,p_2 représentant $M'_1 \oplus M'_2$ comme produit direct de M'_1 et M'_2 , (voir par exemple le chapitre 2 du cours [5]). Montrons que φ est un monomorphisme si $i_1 \cap i_2 = 0$: soit u tel que $\varphi u = 0$ c'est à dire tel que $i_1p_1u = -i_2p_2u$. Considérons le diagramme suivant, où l'on a remarque que $i_1 \cap i_2$ est le produit fibré du diagramme



il existe un morphisme unique τ tel que $p_1u = l_1\tau$, $-p_2u = l_2\tau$. Mais par hypothèse $M'_1 \cap M'_2 = 0$, donc $p_1u = p_2u = 0$ d'où u = 0 car u = 0 est le seul morphisme tel que $p_1u = p_2u = 0$. Nous venons de prouver que φ est un monomorphisme



donc $\varphi = \mathrm{Im}\varphi$ et les sources respectives de φ et $\mathrm{Im}\varphi$ c'est à dire $M'_1 \oplus M'_2$ et $M'_1 \vee M'_2$ sont isomorphes.

Lemme 2 : Soit N un sous-objet de M il existe un sous-objet maximal N' de M tel que $N \cap N' = 0$ et alors M est extension essentielle de $N \oplus N'$.

Démonstration : Soit la famille $\mathcal{F}$ des sous-objets N' de M tels que $N \cap N' = 0$. Il y a déjà 0. Elle est inductive car soit $\{N_i\}_{i\in I}$, I ensemble d'indices une famille d'objets appartenant à $\mathcal{F}$ et croissante, alors $(\bigcup_{i\in I} N_i) \cap N =$ $= \bigcup_{i\in I} (N_i \cap N) = 0$ et ainsi $\bigcup_{i\in I} N_i$ appartient à $\mathcal{F}$. Soit N' un élément maximal de $\mathcal{F}$. Montrons maintenant que M est extension essentielle de $N \oplus N'$: ce résultat est cité sans démonstration à propos de la démonstration de la proposition 12 page 362 dans la thèse [3]:

Nous aurons besoin d'établir deux points :

1er point : Si M'_1, M'_2, M'_3 sont des objets d'une catégorie abélienne $\mathcal{C}$ on a $M'_1 \oplus (M'_2 \oplus M'_3) = (M'_1 \oplus M'_2) \oplus M'_3$.

Il suffit de se reporter à la définition de la somme directe (voir par exemple [5] chapitre 1).

2ème point : Si $M' = M'_1 \vee M'_2 = M'_1 \oplus M'_2$, M'_1 et M'_2 étant des sous-objets de M alors $M'_1 \cap M'_2 = 0$. Soient e_1 et e_2 les monomorphismes canoniques de M'_1 et M'_2 dans M' respectivement, p_1 et p_2 les surjections canoniques de M' sur M'_1 et M'_2 respectivement. On a $1_{M'} = e_1p_1 + e_2p_2$ et $p_1e_2 = 0$, $p_2e_1 = 0$ donc $e_2 \leqslant \mathrm{Ker}\, p_1$. De plus $\mathrm{Ker}\, p_1 = e_2p_2 \,\mathrm{Ker}\, p_1$ donc $\mathrm{Ker}\, p_1 \leqslant e_2$ et $e_2 = \mathrm{Ker} p_1$ de même $e_1 = \mathrm{Ker}\, p_2$. On a donc $M'_1 = M'/M'_2 = M''_2$ et $M'_2 = M/M'_1 = M''_1$ et $M''_1 \cap M''_2 \;=\; M'/M'_1 \vee M'_2 = M'/M' = 0 = M'_1 \cap M'_2$ (voir par exemple cours [5] chapitre 2).

Ceci étant supposons qu'il existe un sous-objet $\mathcal{P}$ de M $\mathcal{P} \neq 0$ tel que

(1) $\mathcal{P} \cap (N \oplus N') = \mathcal{P} \cap (N \vee N') = 0$ (lemme 1).

D'après le lemme 1 et le 1er point on a $\mathcal{L} \oplus (N \oplus N') = \mathcal{L} \vee (N \vee N') = (\mathcal{L} \oplus N') \oplus N =$
$= (\mathcal{L} \vee N') \vee N$ ($\mathcal{L} \oplus N' = \mathcal{L} \vee N'$ car $\mathcal{L} \cap N' = 0$ d'après (1)). Il en résulte $(\mathcal{L} \vee N') \cap N = 0$ d'après le 2ème point donc $\mathcal{L} \vee N' = N'$ d'après la maximalité de N' donc $\mathcal{L} \leq N' \leq N' \vee N$ et $\mathcal{L} \cap (N \vee N') = \mathcal{L} \neq 0$ et ceci contredit (1).

2 - Les théorèmes :

Théorème 1 : Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne de Grothendick à générateur.

Un objet M de $\mathcal{C}$ est quasi-injectif si et seulement si tout morphisme d'un sous-objet N' de M dans M se prolonge en un endomorphisme de M., lorsque M est extension essentielle de N'.

Démonstration : La condition est évidemment nécessaire.

Démontrons qu'elle est suffisante. Soit N' un sous-objet de M, $i : N \longrightarrow M$ un représentant de N. Soit f appartenant à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N,M)$. D'après le lemme 2 il existe un N' sous-objet de M, maximal parmi ceux dont l'intersection avec N est nul. Alors d'après le lemme 2, M est extension maximal de $N \oplus N'$. Soient e_1 et e_2 les morphismes $N \longrightarrow N \oplus N'$ et $N' \longrightarrow N \oplus N'$ canoniques, il existe $\bar{f} : N \oplus N' \longrightarrow M$ tel que $\bar{f}.e_1 = f$ et $\bar{f}.e_2 = 0$, $\bar{f}$ par hypothèse se prolonge en un endomorphisme g de M : si n désigne un représentant du sous-objet $N \oplus N'$ de M on a :

$$\bar{f} = g.n \qquad \text{et} \qquad \bar{f}.e_1 = f = gne_1$$

alors f est par définition la restriction de g à N et par suite M est bien quasi-injectif.

Théorème 2 : Pour qu'un objet de $\mathcal{C}$ soit quasi-injectif il faut et il suffit qu'il soit stable par tout endomorphisme de son enveloppe injective $\hat{M}$.

Démonstration : Etablissons d'abord une remarque, considérons le diagramme suivant à colonnes exactes. D'après la formule Ker $v \cap \mathrm{Im}\, u = u(\mathrm{Ker}(vu))$ et d'après les définitions de $u(M)$, $u^{-1}(M)$ (se reporter au chapitre 3 du cours [5]) on peut écrire $u(M) \cap M = \mathrm{Im}(ui) \cap \mathrm{Ker}\, q = \mathrm{Im}(ui\ \mathrm{Ker}(qui))$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
M \arrow[d, "i"'] & M \arrow[d, "i"] \\
\hat{M} \arrow[r, dashed, "u"] & \hat{M} \arrow[d, "q"] \\
 & \hat{M}/M \arrow[d] \\
 & 0
\end{tikzcd}$$

Posons $A = u^{-1}(M) \cap M$,

$A = \mathrm{Ker}(qu) \cap i = u^{-1}(M) \cap M =$

$\mathrm{Im}(i.\mathrm{ker}(qui))$

$= i.\mathrm{Ker}(qui)$

$u(A) = \mathrm{Im}(ui\ \mathrm{Ker}(qui)) = u(M) \cap M$.

On peut trouver $A \leq M$ tel que $u(A) \leq M$. Il suffit de prendre en effet $A = u^{-1}(M) \cap M$, on a $u(A) = u(M) \cap M$ et de plus si l'on suppose $u(M) \cap M \neq 0$, on a $u(A) \neq 0$.

Cette remarque nous servira ci-dessous.

Montrons d'abord que la condition énoncée par le théorème est suffisante. Si $N \leq M \leq \hat{M}$, $\hat{M}$ désignant l'enveloppe injective de M (voir chapitre 6 du cours [5]), et si f appartient à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N,M)$, on peut tracer le diagramme ci-dessous : f se prolonge en un endomorphisme h de $\hat{M}$ puisque cet objet est injectif. Par hypothèse $\mathrm{Im}(hi) \leq i$. Considérons la restriction de h à N soit hij on peut écrire $hi = i\tau$ donc $hij = i\tau j = if$ et $\tau j = f$.

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "j"] \arrow[d] & M \arrow[r, "i"] & \hat{M} \arrow[lldd, dashed, "h"] \\
M \arrow[d] & & \\
\hat{M} & &
\end{tikzcd}$$

Or τ appartient à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M,M)$: on voit donc que f se prolonge en un endomorphisme de M (a savoir τ) : M est bien quasi-injectif.

La condition est nécessaire : si M est quasi-injectif, soit f un endomorphisme de $\hat{M}$ (diagramme ci-contre).

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f'"'] & M \arrow[r, "i"] \arrow[dl, "g"] & \hat{M} \arrow[ddll, "f"', "h"] \\
M \arrow[d, "i"'] & & \\
\hat{M} & &
\end{tikzcd}$$

Posons $N = M \cap \bar{f}^{1}(M)$, j un représentant du sous-objet N de M : $if' = fij$, f' se prolonge à son tour en un endomorphisme g de M qui se prolonge en un endomorphisme h de $\hat{M}$ puisque $M \leqslant \hat{M}$ et que $\hat{M}$ est injectif : $gj = f'$ et $hi = ig$.

Supposons que nous ayons montré que en posant $u = h - f$, $u(M) = 0$, alors on peut écrire $hi - fi = 0$ ou encore $hi = fi = ig$ et $\mathrm{Im}(fi) \leqslant \mathrm{Im}(ig) \leqslant i$, ceci prouve que M est stable par f.

Tout revient donc à prouver que $u(M) = 0$. Si $u(M) \neq 0$ comme $\hat{M}$ est extension essentielle de M, $u(M) \cap M \neq 0$ alors d'après la remarque du début il existe A tel que $A \leqslant M$, $u(A) \leqslant M$ et $u(A) \neq 0$: soit a un représentant du sous-objet A de M :

$$u(A) = \mathrm{Im}\left[(f-h)ia\right] \leqslant i \text{ entraine } (f-h)ia = i\tau,$$

$$fia = i(\tau - ga) = i\tau'. \text{ Je dis que } ia \leqslant ij = \bar{f}^{1}(M) \cap M \text{ car}$$

$$\bar{f}^{1}(M) = \mathrm{Ker}(qf) \text{ et } qfia = qi\tau' = 0 \text{ entraine}$$

$$ia \leqslant \bar{f}^{1}(M) = \ker(qf) \text{ et } ia \leqslant i,$$

on a donc bien $ia \leqslant \bar{f}^{1}(M) \cap M = ij$ et $ia = ijj'$. Enfin on peut écrire :

$$fia = fijj' = if'j' = igjj' = hijj' = \mathbf{hia}$$

$(fi-hi)a = 0$ et $u(A) = 0$ ce qui contredit $u(A) \neq 0$. Ceci prouve bien que $u(M) = 0$.

<u>Corollaire</u> : Dans une catégorie $\mathcal{C}$ abélienne de Grothendick à générateur, tout objet admet une enveloppe quasi-injective.

<u>Démonstration</u> : Soit M un objet de $\mathcal{C}$, $\hat{M}$ son enveloppe injective. Soit $\mathcal{F}$ la famille des sous-objets de $\hat{M}$ contenant M et qui sont stables par les endomorphismes de $\hat{M}$, $\hat{M}$ appartient à $\mathcal{F}$.

L'intersection d'une famille finie ou non d'éléments de $\mathcal{F}$ appartient encore à $\mathcal{F}$: en effet soit $(M_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments appartenant à $\mathcal{F}$ et soit M' leur intersection (elle existe puisque la catégorie est de Grothendick donc cocomplète) : soit f un endomorphisme de $\hat{M}$:

$$f\Big(\bigcap_{i\in I} M_i\Big) \leqslant \bigcap_{i\in I} f(M_i) \leqslant \bigcap_{i\in I} M_i$$

(voir chapitre 3 du cours [5]) M' est la plus petite extension quasi-injective de M : en effet M' contient évidemment M et M extension essentielle de M l'est de M' donc est l'enveloppe injective de M' : d'après le théorème 2, M' est quasi-injectif . D'ailleurs M' est extension <u>essentielle</u> de M (on a $M \leqslant M' \leqslant \hat{M}$ et $\hat{M}$ est extension essentielle de M.) Soit maintenant P une extension essentielle de M quasi-injective, $\hat{P}$ est extension essentielle de M donc $\hat{P} = \hat{M}$ et P appartient à la famille $\mathcal{F}$ donc contient M' :

M' est donc la plus petite extension essentielle de M quasi-injective : on l'appelle l'enveloppe quasi-injective de M.

<u>Remarque</u> : Il est facile d'établir l'existence d'une enveloppe quasi-injective pour un objet M d'une catégorie de Grothendick localement petite (sans l'hypothèse d'un générateur) lorsque cet objet admet une enveloppe injective.

BIBLIOGRAPHIE

[1] JOHNSON : Quasi-injective moduls and irreduable rings. Journal of London Mathematical Society vol. 36 1961.

[2] RAVEL J. : Article d'exposition : Modules quasi-injectifs (1965 Section de Documentation, Faculté des Sciences de LYON).

[3] GABRIEL : Bul. Soc. Math. France 90 - 1962, 323 - 448.

[4] MITCHELL : Theory of categories, Academic Press, 1965.

[5] MAURY G. : Introduction à la théorie des catégories. 2ème partie du cours de 3ème cycle 1965-1966. Faculté des Sciences de Lyon.