

C. TISSERON

**Objets quasi-injectifs dans une catégorie abélienne avec  
générateur et limites inductives exactes**

*Publications du Département de Mathématiques de Lyon*, 1967, tome 4, fascicule 2  
, p. 145-148

[http://www.numdam.org/item?id=PDML\\_1967\\_\\_4\\_2\\_A4\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PDML_1967__4_2_A4_0)

© Université de Lyon, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# OBJETS QUASI-INJECTIFS DANS UNE CATEGORIE ABELIENNE

## AVEC GENERATEUR ET LIMITES INDUCTIVES EXACTES

par C. TISSERON

Suivant une suggestion de G. Maury on remarque ici comment certains résultats obtenus directement en [3] sur les objets quasi-injectifs d'une catégorie abélienne avec générateur et limites inductives exactes peuvent se déduire de la caractérisation d'une telle catégorie donnée en [2].

Rappelons que l'on démontre en [2] qu'une catégorie abélienne  $\mathcal{D}$  avec un générateur  $U$  et des limites inductives exactes est équivalente à une sous-catégorie pleine  $\mathcal{C}$  de la catégorie des modules à droite sur l'anneau  $A = \text{End}(U)$ , l'injection  $I : \mathcal{C} \rightarrow \text{Mod } A$  ayant un adjoint à gauche exact que l'on notera  $R$ , on a donc un isomorphisme  $\text{hom}(RM, N) \rightarrow \text{hom}(M, IN)$  pour des objets  $M$  de  $\text{Mod } A$  et  $N$  de  $\mathcal{C}$ , naturel en  $M$  et  $N$  qui induit un morphisme fonctoriel  $\alpha : {}_1\text{Mod } A \rightarrow I.R$  ; comme  $\mathcal{C}$  est une sous-catégorie pleine on peut toujours supposer que  $\alpha_M : M \rightarrow RM$  est l'identité pour les objets de  $\mathcal{C}$ , ce que l'on fera dans la suite.

Notons qu'un monomorphisme de  $\mathcal{C}$  reste un monomorphisme dans  $\text{Mod } A$  et que  $I$  préserve les objets injectifs, ie un objet de  $\mathcal{C}$  injectif dans  $\mathcal{C}$  est aussi injectif dans  $\text{Mod } A$ .

Rappelons encore qu'un objet  $M$  d'une catégorie  $\mathcal{A}$  est dit quasi-injectif si pour tout sous-objet  $N \xrightarrow{i} M$  de  $M$  dans  $\mathcal{A}$  :

$$\text{hom}(i, M) : \text{hom}(M, M) \longrightarrow \text{hom}(N, M) \text{ est surjective}$$

Les propositions suivantes sont bien connues pour une catégorie de modules et on les démontre pour  $\mathcal{D}$  en se plaçant dans la sous-catégorie  $\mathcal{C}$  de  $\text{Mod } A$  équivalente à  $\mathcal{D}$ .

- 1 - Lemme : " a) Un morphisme  $N \rightarrow M$  de  $\mathcal{C}$  est une extension essentielle de  $N$  dans  $\mathcal{C}$  si et seulement si  $IN \rightarrow IM$  est une extension essentielle de  $IN$  dans  $\text{Mod } A$ .
- " b) Un objet  $M$  de  $\mathcal{C}$  est quasi-injectif (dans  $\mathcal{C}$ ) si et seulement si  $IM$  est un objet quasi-injectif de  $\text{Mod } A$ .

Les conditions suffisantes sont évidentes.

- Si  $i : N \rightarrow M$  est essentiel dans  $\mathcal{C}$  soit  $u : M \rightarrow P$  un morphisme de  $\text{Mod } A$  tel que  $u \circ i$  soit un monomorphisme, alors  $R(u \circ i) = R(u) \circ i$  est un monomorphisme donc  $R(u)$  aussi et puisque  $R(u) = \alpha_P \circ u$ ,  $u$  est un monomorphisme, ce qui prouve a).

- Soit  $N \xrightarrow{i} M$  un sous-objet de  $M$  dans  $\text{Mod } A$  où  $M$  est un objet quasi-injectif de  $\mathcal{C}$ .

Le diagramme suivant où les flèches verticales sont des isomorphismes

$$\begin{array}{ccc}
 \text{hom}_{\mathcal{C}}(M, M) & \xrightarrow{\text{hom}(Ri, M)} & \text{hom}_{\mathcal{C}}(IN, M) \\
 \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
 \text{hom}_{\text{Mod } A}(M, M) & \xrightarrow{\text{hom}(i, M)} & \text{hom}_{\text{Mod } A}(IN, M)
 \end{array}$$

montre que  $\text{hom}(i, M)$  est surjective puisque  $\text{hom}(Ri, M)$  l'est, ce qui prouve b).

- 2 - Proposition : " Un objet  $M$  d'une catégorie  $\mathcal{D}$  avec générateur et limites inductives exactes est quasi-injectif dès que pour tout sous-objet  $N \xrightarrow{i} M$  dont  $M$  est extension essentielle  $\text{hom}(M, M) \rightarrow \text{hom}(N, M)$  est surjective.

Soit  $M$  un objet de  $\mathcal{C}$  vérifiant la condition de la proposition et  $N \xrightarrow{i} M$  un sous-objet de  $M$  dans  $\text{Mod } A$  dont  $M$  est extension essentielle, puisque  $i = R(i) \circ \alpha_N$  avec  $R(i)$  et  $\alpha_N$  moniques  $R(i) : RN \rightarrow M$  est une extension essentielle dans  $\mathcal{C}$  donc par hypothèse  $\text{hom}(R(i), M)$  est surjective et le diagramme du lemme montre que  $\text{hom}(i, M)$  l'est aussi.

Ceci prouve que  $M$  est quasi-injectif dans  $\text{Mod } A$ , donc dans  $\mathbb{C}$ .

On sait que la catégorie  $\mathbb{D}$  est à enveloppes injectives et on a :

- 3 - Proposition : "Un objet  $M$  de  $\mathbb{D}$  est quasi-injectif si et seulement  
 " si il est stable par tout endomorphisme de son enveloppe  
 " injective.

Pour un objet  $M$  de  $\mathbb{C}$  la proposition résulte immédiatement de 1 - b en remarquant que si  $M \xrightarrow{i} J$  est l'enveloppe injective de  $M$  dans  $\mathbb{C}$ ,  $c$ 'est aussi une enveloppe injective de  $M$  considéré comme objet de  $\text{Mod } A$ .

- 4 - Proposition : "Tout objet d'une catégorie abélienne  $\mathbb{D}$  à généra-  
 " teur et limites inductives exactes admet une enveloppe quasi-  
 " injective.

Soit  $M$  un objet de  $\mathbb{C}$ ,  $i : M \rightarrow J$  son enveloppe injective dans  $\mathbb{C}$ .

Il est clair que toute famille de sous-objets d'un objet de  $\mathbb{C}$  admet une borne inférieure dans  $\mathbb{C}$  qui se calcule d'ailleurs comme dans  $\text{Mod } A$ , ie en prenant l'intersection ; et la famille  $F$  des sous-objets de  $J$  dans  $\mathbb{C}$  contenant  $M$  et stables par tout endomorphisme de  $J$  est stable par intersection ; si  $M'$  en est son plus petit élément  $M'$  est quasi-injectif et est extension essentielle de  $M$ .

Si  $P$  est un objet quasi-injectif de  $\mathbb{C}$  extension essentielle de  $M$  on peut prendre pour enveloppe injective de  $M$ , celle de  $P$  et ainsi  $M'$  est inférieur à  $P$  ce qui précise le sens du résultat.

**BIBLIOGRAPHIE**  
~~=====~~

- [1] GABRIEL : Des catégories abéliennes. Bull. Soc. Math. de France 1962.
- [2] POPESCO-GABRIEL : Caractérisation des catégories abéliennes à générateur et limites inductives exactes. (C R Acad. Sc. Paris, 27 avril 1964).
- [3] G. MAURY : Objets **quasi-injectifs** dans une catégorie de Grothendieck, (Pub. Math. de Lyon, t. 3, fasc. 4, 1966).
- [4] MITCHELL : Theory of categories (Academic Press, 1965).

TISSERON Claude  
Assistant  
Département de Mathématiques  
Faculté des Sciences de Lyon