PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

P. BETHOUX
P. CHEMARIN

# Quelques problèmes linéaires de statistique concernant un processus stochastique de moyenne inconnue

*Publications du Département de Mathématiques de Lyon*, 1967, tome 4, fascicule 2
, p. 149-166
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1967__4_2_A5_0>

Publication du
Département de
Mathématiques
Lyon 1967 t.4-2

# QUELQUES PROBLEMES LINEAIRES DE STATISTIQUE CONCERNANT UN PROCESSUS STOCHASTIQUE DE MOYENNE INCONNUE

Soit $\{x_t, t \in T\}$ un processus stochastique du second ordre pour une famille de probabilités, de manière que :

(i) on peut prendre la moyenne $\rho$ du processus comme paramètre repérant un élément de la famille de probabilités considérée.

(ii) la covariance de $\{x_t, t \in T\}$ sous la loi $P_\rho$

$$E_\rho\left[(x_t - \rho(t))\overline{(x_s - \rho(s))}\right]$$

est une fonction numérique sur $T \times T$, $R(t,s)$, indépendante de $\rho$ et connue.

Plusieurs auteurs ont étudié les divers problèmes de Statistique qui peuvent se poser à partir de l'observation d'une réalisation du processus stochastique considéré, lorsque l'on suppose que $\rho$ appartient à priori à un sous-espace vectoriel donné, de dimension finie de l'espace des fonctions numériques définies sur T. Voir par exemple [1] et [2].

Nous avons essayé ici de reprendre ces mêmes problèmes en supposant que $\rho$ appartient à une partie quelconque de l'espace auto-reproduisant associé à $R(t,s)$.

Soient

- $\{x_t, t \in T\}$ un processus stochastique réel ou complexe sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

- $M$ un ensemble de fonctions numériques définies sur $T$.

- Une famille de probabilités sur $(\Omega, \mathcal{F})$, $(P_\rho)_{\rho \in M}$ telle que, si $E_\rho(x)$ désigne l'espérance mathématique par rapport à $P_\rho$ de la variable aléatoire $x$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$, on ait :

  - $E_\rho(x_t) = \rho(t)$ pour tout $t \in T$ et pour tout $\rho \in M$

  - $E_\rho\left[(x_t - \rho(t))\overline{(x_s - \rho(s))}\right] = R(t,s)$ pour tous les $s$ et $t \in T$ et pour tout $\rho \in M$.

Nous envisageons dans la suite les <u>problèmes suivants</u> : la fonction $R(t,s)$ et l'ensemble $M$ sont connus. En supposant que le processus $\{x_t, t \in T\}$ est régi par l'une (inconnue) des lois $P_\rho$, on cherche au vu d'une réalisation de $\{x_t, t \in T\}$ à estimer $\rho(t_o)$ pour $t_o \in T$, un paramètre numérique plus général fonction de $\rho$, ou encore la valeur prise par une variable aléatoire $y$ dont, sous la loi $P_\rho$, la moyenne est une fonctionnelle connue de $\rho$ et dont la variance et la covariance avec $x_t$ sont indépendantes de $\rho$ et données.

# I - QUELQUES DEFENITIONS ET LEMMES

<u>Espace auto-reproduisant lié à R</u>

Pour $s \in T$, désignons par $R^s$ la fonction définie sur $T$ par :

$$R^s(t) = R(t,s) \qquad (I.1)$$

L'espace vectoriel engendré par les $R^s$ avec $s \in T$, est un espace préhilbertien $\mathcal{E}$ avec le produit scalaire défini par :

$$< R^s, R^t > = R(t,s) \qquad (I.2)$$

La convergence en norme dans $\mathcal{E}$ entraîne la convergence ponctuelle, donc l'espace de Hilbert $\Phi(R)$ complété de $\mathcal{E}$ est constitué par l'ensemble des fonctions numériques sur T qui sont des limites ponctuelles de suites de Cauchy en norme d'éléments de $\mathcal{E}$. $\Phi(R)$ est appelé l'espace auto-reproduisant associé à R. Voir par exemple [2] et [4].

De plus, on peut constater :

(i) que pour chaque $\varphi \in \Phi(R)$, on a

$$\varphi(t) = < \varphi, R^t > \text{ pour tout } t \in T \qquad (I.3)$$

(ii) qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction numérique $\varphi$ définie sur T appartienne à $\Phi(R)$ est qu'il existe une constante $K_\varphi$ telle que

$$\left| \sum c_\nu \ \varphi(t_\nu) \right|^2 \leq K_\varphi \sum_{\nu,\nu'} c_\nu \overline{c_{\nu'}} R(t_\nu, t_{\nu'}) \qquad (I.4)$$

quels que soient la famille finie $\{t_\nu\}$ de valeurs de T et les nombres $c_\nu$.

<u>Définitions I.1</u> : "On désignera

" -par X l'espace vectoriel engendré par les $x_t$ pour $t \in T$

" -par Z le quotient, par la relation d'équivalence "égale

" presque-sûrement $P_\rho$ pour tout $\rho \in M$", de l'espace des

" variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F})$ qui sont limites,

" en moyenne quadratique $P_\rho$ pour tout $\rho \in M$, d'une suite

" d'éléments de X.

<u>Lemme I.1</u> : "Si $M \subset \Phi(R)$

" $$(x,y) = E_\rho\left[(x - E_\rho(x))\overline{(y - E_\rho(y))}\right] \qquad (I.5)$$

" définit sur Z un produit scalaire avec lequel Z est un

" espace de Hilbert.

" $\rho \to E_\rho(x)$ est une forme linéaire bornée sur Z.

Notons que pour tous les x et $y \in Z$

(I.5) $E_\rho\left[(x - E\rho(x))\overline{(y - E\rho(y))}\right]$ ne dépend pas de $\rho \in M$.

De (I.4) on déduit que pour tout $x \in X$,

$$|E\rho(x)|^2 \leqslant K\rho(x,x) \qquad (I.6)$$

Cette relation se prolonge à tout $z \in Z$ (I.6'), et alors

$$E\rho(|z|^2) = \mathrm{var}(z) + |E\rho(z)|^2 \leqslant (1 + K\rho)(z,z) \qquad (I.7)$$

ce qui montre que

$(x,y) = \mathrm{cov}(x,y)$ est une forme hermitienne, définie positive sur Z.

Etablissons que Z muni du produit scalaire (I.5) est complet.

Soit $\{x_n\}$, $n = 1,2,\ldots$ une suite de Cauchy au sens de la norme $\|\cdot\|$ dérivant de ce produit scalaire.

Il résulte de (I.7) que $x_n$ est de Cauchy en moyenne quadratique $P_\rho$, pour tout $\rho \in M$.

Soit alors $\mathfrak{X}_n$ un représentant de $x_n$. D'après l'inégalité de Tchébichev, pour tout $\varepsilon > 0$

$$P_\rho\left\{\omega : |\mathfrak{X}_n(\omega) - \mathfrak{X}_m(\omega)| \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} E\rho\,|\mathfrak{X}_n - \mathfrak{X}_m|^2 \qquad (I.8)$$

$$\leqslant \frac{1 + K\rho}{\varepsilon^2}\|x_n - x_m\|^2 \text{ compte tenu de (I.7)} \qquad (I.9)$$

Alors suivant un procèdé classique, soit $n_k$ un suite strictement croissante d'entiers telle que

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\|^2 < \frac{1}{2^{3k}} \quad \text{pour tout } k \in N \qquad (I.10)$$

Si

$$M_k = \left\{\omega : |\mathfrak{X}_{n_{k+1}}(\omega) - \mathfrak{X}_{n_k}(\omega)| > \frac{1}{2^k}\right\} \qquad (I.11)$$

on constate que $\mathfrak{X}_{n_k}(\omega)$ converge sur $B = \liminf_{k \to +\infty} M_k^c$ et que

$$P_\rho(B^c) = 0 \quad \text{pour tout } \rho \in M.$$

Si on pose

$$\left.\begin{aligned} \hat{x}(\omega) &= \lim_{k \to +\infty} \hat{x}_{n_k}(\omega) && \text{si } \omega \in B \\ \hat{x}(\omega) &= 0 && \text{si } \omega \notin B \end{aligned}\right\} \qquad (I.12)$$

$\hat{x}_{n_k} \longrightarrow \hat{x}$ presque-sûrement $P_\rho$ pour tout $\rho \in M$.

Il en résulte que $\hat{x}_n \longrightarrow \hat{x}$ en moyenne quadratique $P_\rho$ pour tout $\rho \in M$ et comme chaque $\hat{x}_n$ est limite en moyenne quadratique $P_\rho$ pour tout $\rho \in M$ d'éléments de X, il en est de même de $\hat{x}$.

$\hat{x}$ est donc un représentant d'un élément x de Z et

$\|x - x_n\|^2 = \operatorname{var}(\hat{x} - \hat{x}_n) \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

La relation (I.6') exprime que la forme linéaire sur Z

$$x \longrightarrow E_\rho(x) \quad \text{est bornée.}$$

<u>Lemme I.2</u> : "L'application I qui à $z \in Z$ associe la fonction
" numérique définie sur T par
" $$(Iz)(t) = (x_t, z) \qquad (I.13)$$
" est une bijection de Z sur $\Phi(R)$ et
" $$\langle Iz_1, Iz_2 \rangle = (z_2, z_1) \qquad (I.14)$$

En remarquant que

$$Ix_s = R^s \qquad \text{pour tout } s \in T \qquad (I.15)$$

$$\langle R^s, R^t \rangle = (x_t, x_s) \qquad \text{pour tous les } s \text{ et } t \in T \qquad (I.16)$$

$$I\left(\sum_i \alpha_i\, x_{s_i}\right) = \sum_i \overline{\alpha}_i\, Ix_{s_i} \qquad (I.17)$$

on déduit immédiatement que I est une bijection du quotient $X^*$ de X par la relation d'équivalence "égale presque-sûrement $P_\rho$ pour tout $\rho \in M$ " sur $\mathcal{E}$ et que (I.14) est vraie pour $z_1$ et $z_2$ appartenant à $X^*$.

Soit z quelconque $\in Z$, $z = \lim_{n \to +\infty} z_n$ avec $z_n \in X^*$.

On constate immédiatement que Iz est limite ponctuelle des fonctions $Iz_n$ constituant une suite de Cauchy en norme. Donc Iz est limite en norme de $Iz_n$, par suite (I.14) est vraie pour $z_1$ et $z_2$ quelconques appartenant à Z et I est une bijection de Z sur $\Phi(R)$.

Lemme 1.3 : "Soient :

" - V le sous-espace de Hilbert de Z engendré par les

" $v_\rho = I^{-1}(\rho)$, $\rho \in M$ .

" - x' la projection orthogonale dans Z de $x \in Z$ sur V .

" On a :

$$\text{(I.19)} \quad \begin{cases} E\,\rho(x') = E\,\rho(x) & \text{pour tout } \rho \in M. \\ \operatorname{var}(x') \leq \operatorname{var}(x) & \text{l'égalité n'ayant lieu que si } x \in V. \end{cases}$$

x' est défini par

$x' \in V$ et $([x - x'], v_\rho) = 0$ pour tout $\rho \in M$.

D'où $E\,\rho(x') = E\,\rho(x)$ pour tout $\rho \in M$.

Le reste se déduit de l'application du théorème de Pythagore :

$$\operatorname{var}(x) = \|x\|^2 = \|x'\|^2 + \|x - x'\|^2 = \operatorname{var} x' + \|x - x'\|^2$$

## II - ESTIMATION LINEAIRE

Définition II.1 : "Les éléments de Z seront appelés les estimateurs linéaires à partir de l'observation de $\{x_t, t \in T\}$.

### A - Estimation linéaire d'un paramètre numérique

Soit $\alpha = h(\rho)$ un paramètre numérique à estimer.

Théorème II.1 : "Si, pour comparer les estimateurs linéaires, on

" prend un critère tel que :

$$\text{(II.1)} \quad \begin{cases} E\rho(x') = E\rho(x) & \text{pour tout } \rho \in M \\ \operatorname{var}(x') < \operatorname{var}(x) \end{cases}$$

" entraîne x' meilleur que x, alors on peut se limiter à la

" famille des estimateurs linéaires qui appartiennent à V.

Ceci est la traduction du lemme I.3.

<u>Remarque</u> : Il en est en particulier ainsi, si l'on cherche à minimiser la fonction $\rho \to E_\rho |x - h(\rho)|^2$.

En effet, $E_\rho |x - h(\rho)|^2 = \text{var } x + |E\rho(x) - h(\rho)|^2$ (II.2)

<u>Théorème II.2</u> : "Une condition nécessaire et suffisante pour que
" $\alpha = h(\rho)$ admette un estimateur linéaire non biaisé est que
" h soit la restriction à M d'une forme linéaire et bornée sur
" le sous-espace V' de $\Phi$ (R) engendré par M .
" La différence de deux estimateurs linéaires non biaisés est
" orthogonale à V .

Supposons que $\alpha = h(\rho)$ admette un estimateur linéaire $\hat{\alpha}$ tel que

$$E_\rho(\hat{\alpha}) = h(\rho) \qquad \text{pour tout } \rho \in M$$

alors
$$h(\rho) = (\hat{\alpha}, v_\rho)$$
$$= \langle \rho, I\hat{\alpha} \rangle \quad \text{pour tout } \rho \in M \qquad \text{(II.3)}$$

ce qui exprime que $h(\rho)$ est la restriction à M de la forme linéaire et continue sur $\Phi$ (R)

$$\varphi \to \langle \varphi, I\hat{\alpha} \rangle .$$

Réciproquement, supposons que h(.) soit la restriction à M d'une forme linéaire et continue sur V '. Alors il existe g $\in$ V ' tel que

$$h(\rho) = \langle \rho, g \rangle \qquad \text{pour tout } \rho \in M \qquad \text{(II.4)}$$
$$= (I^{-1}g, v_\rho) = E_\rho(I^{-1}g)$$

$I^{-1}g$ est un estimateur linéaire non biaisé (appartenant d'ailleurs à V ) de $\alpha = h(\rho)$.

Si $\hat{\alpha}_1$ et $\hat{\alpha}_2$ sont deux estimateurs linéaires non biaisés de $\alpha = h(\rho)$,

$$(\hat{\alpha}_1, v_\rho) = E_\rho(\hat{\alpha}_1) = E_\rho(\hat{\alpha}_2) = (\hat{\alpha}_2, v_\rho) \text{ pour tout } \rho \in M$$

D'où $\hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_2$ est orthogonal à V .

Remarque : D'après la dernière assertion du théorème II.2 et le lemme I.3, s'il existe un estimateur linéaire non biaisé de $\alpha = h(\rho)$, il y en a un seul de variance minimum.

Cas particuliers :

1) Estimation de $\rho(t_o)$ avec $(t_o \in T)$

$\rho \rightarrow \rho(t_o)$ est la restriction à M de la forme linéaire et continue sur $\Phi(R)$ :

$$\varphi \rightarrow \langle \varphi, R^{t_o} \rangle$$

On aurait d'ailleurs pu exhiber un estimateur linéaire non biaisé évident : $x_{t_o}$.

L'estimateur linéaire non biaisé de variance minimum est la projection orthogonale dans Z de $x_{t_o}$ sur V.

2) Si M est un sous-espace vectoriel de $\Phi(R)$, de dimension finie, alors toute forme linéaire sur M admet des estimateurs linéaires non biaisés et parmi ceux-ci un seul de variance minimum. Ce cas a été étudié en détail. Voir [1].

3) Supposons que M soit un sous-espace de Hilbert séparable de $\Phi(R)$ (Remarquons que dans la plupart des cas pratiques $\Phi(R)$ est séparable).

Désignons par $(\rho_j)$ $j = 1,2,\ldots$ une base de $M = V'$. Ecrivons :

$$\rho = \sum_{j=1}^{+\infty} a_j \rho_j \qquad \text{(II.5)}$$

$a_j(\rho)$ est une forme linéaire et continue sur M. Elle admet des estimateurs linéaires non biaisés. Désignons par $\hat{a}_j$ celui de variance minimum ($\hat{a}_j \in V$).

Soit $(u_j)$ la base conjuguée de la base $(\rho_j)$

$$u_j \in M , \quad \langle \rho_i, u_j \rangle = \delta_{i,j} \qquad i,j = 1,2,\ldots$$

On a :

$$a_j(\rho) = \langle \rho, u_j \rangle$$

D'où $\qquad \hat{a}_j = I^{-1}(u_j) \qquad$ (II.6)

On a alors le théorème suivant :

<u>Théorème II.3</u> : "L'estimateur linéaire et non biaisé de variance
" minimum de toute forme $h(\rho)$ linéaire et continue sur $M$,
" est donné par :
" $$\hat{h} = \sum_{j=1}^{+\infty} \hat{a}_j h(\rho_j)$$

$h(\rho)$ étant une forme linéaire et continue sur $M$, soit $H$ l'unique élément de $M$ tel que

$$h(\rho) = \langle \rho, H \rangle \qquad \text{pour tout } \rho \in M \qquad \text{(II.7)}$$

L'estimateur linéaire et non biaisé, de variance minimum de $h(\rho)$ est

$$I^{-1}(H)$$

$H$ s'écrit sur la base $u_j$ de $M$

$$H = \sum_{j=1}^{+\infty} \langle H, \rho_j \rangle u_j = \sum_{j=1}^{+\infty} \overline{h(\rho_j)}\, u_j$$

Compte tenu de la continuité de $I^{-1}$ et de son anti-linéarité

$$I^{-1}(H) = \sum_{j=1}^{+\infty} h(\rho_j)\, I^{-1}(u_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{+\infty} \hat{a}_j\, h(\rho_j) \qquad \text{(II.8)}$$

<u>Remarque</u> : $\hat{h}_n = \sum_{j=1}^{+n} \hat{a}_j h(\rho_j)$ tend quand $n \to +\infty$ vers $\hat{h}$ dans $Z$, ce qui implique d'après (I.7) que $\hat{h}_n \to \hat{h}$ en moyenne quadratique $P_\rho$ pour tout $\rho \in M$. Il sera donc légitime d'approcher $\hat{h}$ par $\hat{h}_n$ qui est l'estimateur linéaire et non biaisé, de variance minimum de la forme $h_n$ égale à $h$ sur le sous-espace $M_n$ engendré par $\rho_1, \dots, \rho_n$ et nulle sur $M \ominus M_n$.

<u>Exemple</u> : Considérons l'exemple suivant :

- $T$ est l'intervalle $[0,T]$ , $x_t$ est réel.
- $R(t,s) = \min(t,s)$ pour $0 \leqslant t,s \leqslant T$

On sait ( [1] ) que $\Phi(R)$ est constitué des fonctions absolument continues sur $[0,T]$ et de dérivée de carré intégrable sur $[0,T]$ par rapport à la mesure de Lebesgue et que

$$\langle f,g \rangle = \int_0^T f'(t)g'(t)dt \quad \text{pour } f \text{ et } g \in \Phi(R).$$

$\Phi(R)$ est séparable et une base orthogonale est constituée par les éléments $\varphi_n$ suivants :

$$\begin{cases} \varphi_0(t) = t \\ \varphi_{2k}(t) = \int_0^t \cos\left(\frac{2\pi k}{T} u\right) du \\ \varphi_{2k-1}(t) = \int_0^t \sin\left(\frac{2\pi k}{T} u\right) du \end{cases} \qquad k \geqslant 1$$

Supposons que $M$ soit constitué des fonctions de $\Phi(R)$ périodiques de période $\frac{T}{m}$ (m entier fixé). Ce problème a été considéré par H.B. Mann dans [3] .

$M$ est un sous-espace vectoriel de $\Phi(R)$. Il est fermé car la convergence au sens de la norme de $\Phi(R)$ entraîne la convergence ponctuelle et toute limite ponctuelle de fonctions de période $\frac{T}{m}$ est de période $\frac{T}{m}$.

Or une base de $M$ est constituée par les fonctions,

$\varphi_{2m}, \varphi_{2m-1}, \varphi_{4m}, \varphi_{4m-1}, \ldots$

D'autre part

$$I^{-1}(f) = \int_0^T f'(u)dx_u$$

$\rho \in M$ s'écrit :

$$\rho = \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \varphi_{2km} + b_k \varphi_{2km-1})$$

$$a_k = \frac{2}{T} \langle \rho, \varphi_{2km} \rangle, \quad b_k = \frac{2}{T} \langle \rho, \varphi_{2km-1} \rangle \qquad k \geqslant 1$$

les estimateurs linéaires et non biaisés de $a_k$ et $b_k$ sont respectivement :

$$\hat{a}_k = \frac{2}{T} \int_0^T \cos \frac{2\pi mkt}{T}\, dx_t \quad \text{et} \quad \hat{b}_k = \frac{2}{T} \int_0^T \sin \frac{2\pi mkt}{T}\, dx_t$$

En particulier, l'estimateur linéaire et non biaisé de variance minimum de $\rho(t_o)$ est

$$\hat{\rho}(t_o) = \frac{1}{\pi m} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \Big[ \sin \frac{2\pi mkt_o}{T} \int_0^T \cos \frac{2\pi mku}{T}\, dx_u + \left(1 - \cos \frac{2\pi mkt_o}{T}\right) \int_0^T \sin \frac{2\pi mku}{T}\, dx_u \Big]$$

B - Problème de filtrage

Envisageons le problème suivant :

Soit y une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F})$ telle que la variance de y et sa covariance avec chaque $x_t$ $(t \in T)$ sous la loi $P_\rho$, soient indépendantes de $\rho$ (la covariance de y avec n'importe quel élément de Z est alors aussi indépendante de $\rho$). Nous supposerons que cette variance et ces covariances sont données ainsi que la fonction $\rho \rightarrow E_\rho(y)$ sur M.

Cherchons à l'aide d'un estimateur linéaire à partir de $(x_t, t \in T)$ à approcher "au mieux" y.

Soient

$\psi$ la fonction de $\Phi(R)$ telle que $\psi(t) = \mathrm{cov}(x_t, y)$

$y_o = I^{-1}(\psi)$ , $y_1 = y - y_o$

et écrivons

$$y_o = y_o' + y_o'' \qquad y_o' \in V \ , \quad y_o'' \perp V$$

et pour $z \in Z$, $z = z' + z''$ $\qquad z' \in V$ , $z'' \perp V$

On a pour $z \in Z$ :

$$E_\rho(|y - z|^2) = \mathrm{var}(y - z) + |E_\rho(y) - E_\rho(z)|^2$$

en tenant compte que, sous la loi $P_\rho$, $\rho \in M$, la covariance de $y_1$ avec n'importe quel élément de Z est nulle, on a :

$$\mathrm{var}(y - z) = \mathrm{var}(y_o - z) + \mathrm{var}(y_1).$$

D'où

$$E_\rho\left(|y - z|^2\right) = \mathrm{var}(y_1) + \mathrm{var}(y'_o - z') + \mathrm{var}(y''_o - z'') + \left|E_\rho(y) - E_\rho(z')\right|^2$$

Et l'on peut énoncer le résultat suivant :

<u>Théorème II.4</u> : "Si z est un estimateur linéaire de y, n'appartenant
" pas au sous-espace de Z, $y''_o + V$, alors $z_1$ donné par
" $$z_1 = y''_o + z'$$
" est uniformément meilleur que z au sens des moindres carrés,
" c'est à dire :
" $$E_\rho\left(|y - z_1|^2\right) < E_\rho\left(|y - z|^2\right) \quad \text{pour tout } \rho \in M$$

Examinons en particulier le cas des estimateurs non biaisés de y (z est un estimateur non biaisé de y si $E_\rho(y) = E_\rho(z)$ pour tout $\rho \in M$).

<u>Théorème II.5</u> : "Une condition nécessaire et suffisante pour
" qu'il existe des estimateurs linéaires non biaisés de y est
" que $h(\rho) = E_\rho(y)$ soit la restriction sur M d'une forme
" linéaire et continue sur V'.
" Alors, pour tout estimateur linéaire et non biaisé z de y,
" $E_\rho\left(|y - z|^2\right)$ est indépendant de $\rho$
" et est minimimum si et seulement si
" $$z = y''_o + \hat{h}$$
" où $\hat{h}$ est l'estimateur linéaire et non biaisé de variance
" minimum de $h(\rho)$.

Ceci se déduit immédiatement de ce qui précède et du paragraphe A.

## III - CAS GAUSSIEN

On se place ici dans le cas où le processus $\{x_t, t \in T\}$ a une loi temporelle de Laplace-Gauss pour chaque $P_\rho$, $\rho \in M$.

### A - Résultats préliminaires

<u>R. P. 1</u> : "Toute famille d'éléments de Z a une loi temporelle de " Laplace-Gauss pour chaque $P_\rho$, $\rho \in M$.

Ceci résulte de la stabilité de la loi de Laplace-Gauss pour une transformation linéaire et une limite en moyenne quadratique.

<u>R. P. 2</u> : "Toute famille d'éléments de l'orthogonal $V^\perp$ de V " dans Z a une loi temporelle de Laplace-Gauss indépendante " de $\rho$.

Si $x \in V^\perp$ $E_\rho(x) = (x, v_\rho) = 0$ pour $\rho \in M$.

Par ailleurs, $V^\perp \subset Z$ implique var x et cov(x,y) indépendantes de $\rho$ pour x et $y \in V^\perp$ (cf. I.5').

<u>R. P. 3</u> : "Si $(x_i)$ et $(y_k)$ sont deux familles finies de V et $V^\perp$ " respectivement, alors $(x_i)$ et $(y_k)$ sont indépendantes pour " chaque $P_\rho$, $\rho \in M$.

En effet, $x_i \in V$ et $y_k \in V^\perp$ implique

$$\text{cov}(x_i, y_k) = (x_i, y_k) = 0$$

Nous nous proposons d'établir que la famille $(v_\rho)_{\rho \in M}$ est une statistique exhaustive pour $(P_\rho)_{\rho \in M}$.

Comme nous ne supposons connue que la loi temporelle de $\{x_t, t \in T\}$, nous poserons la définition suivante :

<u>Définition III. 1</u> : "Un système de variables aléatoires (y,y',...) " définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, P_\rho)$ est une statistique exhaustive de " $\{x_t, t \in T\}$ pour $(P_\rho)_{\rho \in M}$ si :

" - $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{F}_1$) désignant la sous $\sigma$-algèbre de $\mathcal{F}$ engendrée
" par $(y,y',\ldots)$ (resp. $\{x_t, t \in T\}$).
" - $P_\rho^{\mathcal{A}}$ désignant la probabilité conditionnelle de $F \in \mathcal{F}_1$
" par rapport à $\mathcal{A}$, il existe une fonction $f(\omega,F)$ définie sur
" $\Omega \times \mathcal{F}_1$, telle que pour tout $F \in \mathcal{F}_1$, $\omega \to f(\omega,F)$
" appartienne à la classe d'équivalence de $P_\rho^{\mathcal{A}}(F)$ pour tout
" $\rho$ de $M$.

<u>Définition III. 2</u> : "On dira qu'une famille d'éléments de $Z$ est
" une statistique exhaustive pour $(P_\rho)_{\rho \in M}$ si tout système
" de représentants des éléments de cette famille possède cette
" propriété.

<u>Théorème III. 1</u> : "La famille $(v_\rho)_{\rho \in M}$ constitue une statistique
" exhaustive de $\{x_t, t \in T\}$ pour $(P_\rho)_{\rho \in M}$.

Considérons un système $(u_\rho)_{\rho \in M}$ de représentants de $(v_\rho)_{\rho \in M}$.

<u>Lemme III. 1</u> : "Il existe une famille de variables aléatoires
" $\{q_t, t \in T\}$ telle que :
" 1°) Pour tout $t \in T$, $q_t$ représente un élément de $V^\perp$
" 2°) La $\sigma$-algèbre $G$ engendrée par $(u_\rho)_{\rho \in M}$ et $(q_t)_{t \in T}$
" contient $\mathcal{F}_1$.

Projetons la classe $\tilde{x}_t$ de $x_t$ sur $V$

$$\tilde{x}_t = v_t + \tilde{q}_t \qquad v_t \in V, \; \tilde{q}_t \in V^\perp \qquad \text{(III.1)}$$

Choisissons un représentant $u_t$ de $v_t$ qui soit mesurable par rapport à $\mathcal{A}$ $\sigma$-algèbre engendrée par $(u_\rho)_{\rho \in M}$ et définissons $q_t$ par

$$q_t = x_t - u_t \qquad \text{(III.2)}$$

$q_t$ représante $\tilde{q}_t$ et $x_t = u_t + q_t$ est $G$-mesurable donc $\mathcal{F}_1 \subset G$.

<u>Conséquence</u> : "Le système $\{u_\rho, \rho \in M ; q_t, t \in T\}$ est une " statistique exhaustive pour $(P_\rho)_{\rho \in M}$.

Désignons par

- $\mathcal{B}_M, \mathcal{B}_T, \mathcal{B}_M \times \mathcal{B}_T$ les $\sigma$-algèbres des boréliens de $R^M$, $R^T$ et $R^M \times R^T$ respectivement.

- Y la transformation mesurable de $(\Omega, G)$ dans $(R^M \times R^T, \mathcal{B}_M \times \mathcal{B}_T)$ définie par :

$$Y(\omega) = (u_\rho(\omega), \rho \in M ; q_t(\omega), t \in T) \qquad \text{(III.3)}$$

- $\mu_\rho$ la probabilité définie sur $(R^M \times R^T, \mathcal{B}_M \times \mathcal{B}_T)$ par $\mu_\rho = P_\rho Y^{-1}$.

- $\nu_\rho$ la probabilité définie sur $(R^M, \mathcal{B}_M)$ par

$$\nu_\rho(B_M) = P_\rho\left[Y^{-1}(B_M \times R^T)\right] = \mu_\rho(B_M \times R^T) \text{ pour } B_M \in \mathcal{B}_M.$$

- $\lambda$ la probabilité définie sur $(R^T, \mathcal{B}_T)$ par

$$\lambda(B_T) = P_\rho\left[Y^{-1}(R^M \times B_T)\right] = \mu_\rho(R^M \times B_T) \quad \text{pour } B_T \in \mathcal{B}_T.$$

D'après R. P. 2, $\lambda$ est indépendante de $\rho$.

<u>Lemme III. 2</u> : "L'espace probabilisé $(R^M \times R^T, \mathcal{B}_M \times \mathcal{B}_T, \mu_\rho)$ est " le produit des espace probabilisés $(R^M, \mathcal{B}_M, \nu_\rho)$ et " $(R^T, \mathcal{B}_T, \lambda)$.

Soit d'abord $C_M \times C_T$ un rectangle mesurable dont les "côtés" $C_M$ et $C_T$ appartiennent respectivement aux algèbres $U_M$ et $U_T$ des cylindres à base finie de $R^M$ et $R^T$. Désignons par $B_p$ (resp. $B_k$) le borélien de $R^p$ (resp. $R^k$) base de $C_M$ (resp. $C_T$).

$$\mu_\rho(C_M \times C_T) = P_\rho\Big\{\omega : (u_{\rho_1}(\omega) \ldots u_{\rho_p}(\omega)) \in B_p \quad \text{et}$$
$$(q_{t_1}(\omega) \ldots q_{t_k}(\omega)) \in B_k\Big\}.$$

D'après R. P. 3, les $u_{\rho_i}$ et les $q_{t_j}$ sont indépendantes, donc :

$$\mu_\rho(C_M \times C_T) = P_\rho\left\{\omega : (u_{\rho_1}(\omega) \ldots u_{\rho_p}(\omega) \in B_p\right\}$$
$$\times P_\rho\left\{\omega : (q_{t_1}(\omega) \ldots q_{t_k}(\omega)) \in B_k\right\} = \nu_\rho(C_M) \times \lambda(C_T)$$

Pour $C_M$ fixé, $\mu_\rho(C_M \times B_T)$ et $\nu_\rho(C_M) . \lambda(B_T)$ sont deux mesures sur $(R^T, \mathcal{B}_T)$ coïncidant sur l'algèbre $U_T$. Elles coïncident donc sur $\sigma(U_T) = \mathcal{B}_T$.

$\mu_\rho(C_M \times B_T) = \nu_\rho(C_M) . \lambda(B_T)$ pour $C_M \in U_M$ et $B_T \in \mathcal{B}_T$.

Alors pour $B_T$ fixé, $\mu_\rho(B_M \times B_T)$ et $\nu_\rho(B_M) . \lambda(B_T)$ sont deux mesures coïncidant sur $U_M^{\cdot}$, donc sur $\sigma(U_M) = \mathcal{B}_T$.

Ainsi pour tout rectangle mesurable $B_M \times B_T$ de $R^M \times R^T$, on a : $\mu_\rho(B_M \times B_T) = \nu_\rho(B_M) \lambda(B_T)$ (III.4).

Soient :

- $A \in \mathcal{A}$ et $B_M \in \mathcal{B}_M$ tels que $A = Y^{-1}(B_M \times R^T)$
- $F \in \mathcal{F}_1$ et $E \in \mathcal{B}_M \times \mathcal{B}_T$ tels que $F = Y^{-1}(E)$

$$P_\rho(A \cap F) = \mu_\rho[(B_M \times R^T) \cap E]$$
$$= \int_{R^M \times R^T} \chi_{B_M \times R^T}(u,q) \, \chi_E(u,q) \, d\mu_\rho(u,q)$$

Appliquons le théorème de Fubini et remarquons que

$$\chi_{B_M \times R^T}(u,q) = \chi_{B_M}(u)$$

$$P_\rho(A \cap F) = \int_{R^M} \chi_{B_M}(u) \left[\int_{R^T} \chi_E(u,q) \, \lambda(dq)\right] \nu_\rho(du)$$
$$= \int_{B_M} \left[\int_{R^T} \chi_E(u,q) \, \lambda(dq)\right] \nu_\rho(du) \qquad \text{(III.5)}$$

et $g_E(u) = \int_{R^T} \chi_E(u,q) \, \lambda(dq)$ est $\mathcal{B}_M$-mesurable. On remarque qu'en outre elle ne dépend pas de $\rho$.

Considérons la transformation mesurable $S$ de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(R^M, \mathcal{B}_M)$ telle que $S(\omega) = (u_\rho(\omega)) \quad \rho \in M$.

On a $S^{-1}(B_M) = A$ et $\nu_\rho = P_\rho\, S^{-1}$ (III.6)

Effectuons dans (III.5) le changement de variable indiqué dans (III.6) :

$$P_\rho\,(A \cap F) = \int_A g_E(S(\omega))\, P_\rho\,(d\omega) \quad \text{pour } A \in \mathcal{A} \qquad \text{(III.7)}$$

$f(\omega, F) = g_E(S(\omega))$ est une fonction $\mathcal{A}$-mesurable de $\omega$ et elle ne dépend pas de $\rho$. D'après (III.7) c'est une version de $P_\rho^{\mathcal{A}}(F)$.

On peut préciser en outre que pour tout $\omega$, $f(\omega, F)$ est une vraie probabilité sur $\mathcal{F}_1$.

<u>Remarque</u> : Si l'on introduit sur $(\Omega, \mathcal{F}_1)$ la mesure $P_o$ telle que $\{x_t, t \in T\}$ soit gaussien centré avec $E_o(x_t\, \overline{x}_s) = R(t,s)$ on a pour $t \in T$ : $\int x_t v_\rho\, dP_o = \int x_t\, dP_\rho$.

En désignant par $P'_\rho$ la restriction de $P_\rho$ à $\mathcal{F}_1$ et en appliquant les résultats contenus dans [5], on a

$$\log \frac{P'_\rho\,(d\omega)}{P_o\,(d\omega)} = v_\rho\,(\omega) - \frac{1}{2} \langle \rho, \rho \rangle$$

donc
$$\frac{P'_\rho\,(d\omega)}{P_o\,(d\omega)} = \exp(-\tfrac{1}{2} \langle \rho, \rho \rangle)\, \exp(v_\rho\,(\omega))$$

Or la fonction $\exp(-\frac{1}{2} \langle \rho, \rho \rangle) \exp(v_\rho\,(\omega))$ est mesurable par rapport à la $\sigma$-algèbre engendrée par $(v_\rho)_{\rho \in M}$.

En appliquant alors les résultats de HALMOS et SAVAGE : An. Math. Stat. Vol. 20 (1949) p. 225 à 241, on obtient immédiatement que $(v_\rho)_{\rho \in M}$ est une statistique exhaustive pour $(P_\rho)_{\rho \in M}$. Toutefois la démonstration précédente permet d'affirmer en outre que la probabilité conditionnelle par rapport aux $(v_\rho)_{\rho \in M}$ est régulière.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] J. HAJEK : On linear estimation theory for an infinite number of observations. Theory of probability and its applications. Vol. VI, n° 2, 1961, p 166 à 177.

[2] J. HAJEK : Linear statistical problems in stochastic processes. Czech. Mat. Journal, T. 12, n° 3, 1962, p 404 à 444.

[3] H.B. MANN : A theory of estimation for the fundamental random process and the Ornstein Uhlenbeck process. Sankhya, Vol. 13, 1954, p 325 à 350.

[4] J. NEVEU : Bases mathématiques du calcul des probabilités. Masson 1964.

[5] Yu ROZANOV : On the density of one Gaussian mesure with respect to another. Theory of probability and its applications. 7, 1962, p 82 à 87.

[6] J. FELDMANN : Equivalence and perpendicularity of Gaussian process. Pacific J. Math., 8, 1958, p 699 à 709.