PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

DANIEL PONASSE

Quelques remarques topologiques sur l'espace des interprétations

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1967, tome 4, fascicule 3
, p. 33-37
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1967__4_3_33_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1967 t. 4-3

QUELQUES REMARQUES TOPOLOGIQUES SUR L'ESPACE DES INTERPRETATIONS

Daniel PONASSE

Introduction.

Il convient tout d'abord de signaler que les quelques résultats qui suivent ont été démontrés en collaboration avec deux de mes élèves, Mle A. PRELLER et M. R. CUSIN.

Nous nous placerons dans le cadre du calcul des prédicats du premier ordre, sans égalité. Les notations suivantes seront utilisées :

E : ensemble des énoncés (sans variable libre) $A, B, \ldots,$ construits à partir de l'ensemble des énoncés élémentaires Λ, du type $r_n^p a_1 \ldots a_p$ (r_n^p prédicat de poids p, $a_1, \ldots, a_p$ individus), au moyen des connecteurs $\neg\ \wedge\ \vee \rightarrow\ \leftrightarrow\ \exists\ \forall$.

T : ensemble des énoncés démontrables, à partir des schémas d'axiomes et de règles de détachement classiques.

E/R : anneau booléien quotient de E par la relation d'équivalence R : $A \leftrightarrow B \in T$ (ou $A \vdash B$ et $B \vdash A$), ϕ désignera l'application canonique $E \rightarrow E/R$. Si $\alpha = \phi(A)$, $\beta = \phi(B)$, les opérations dans E/R sont définies par :

$$\neg\alpha = \phi(\ A)\ ,\ \alpha.\beta = \phi(A \wedge B), \ldots, (a/b)\alpha = \phi((a/b)A),\ \exists a\alpha = \phi(\exists x\ [(x/a)A])$$
$$= \operatorname{Sup}_b (b/a)\alpha.$$

X : espace booléien dual de E/R, c'est-à-dire l'ensemble des ultrafiltres U. Si σ est l'application de Stone : $\sigma(\alpha) = \{U : \alpha \in U\}$, la topologie de X est celle engendrée par les $\sigma(\alpha)$ qui sont alors les ofs de X.

$\mathcal{U}$L : ensemble des ultrafiltres validants de E/R, c'est-à-dire les ultra-filtres U tels que : $\exists a_\alpha \in U \Rightarrow$ il existe b tel que $(b/a)_\alpha \in U$.

Les ultrafiltres validants sont directement rattachés aux systèmes de valeurs de vérité $h : A \longrightarrow \mathbb{U}$ ($\mathbb{U}$: anneau booléien $Z/(2)$) de la façon suivante.: une application quelconque h se prolonge en $\tilde{h}$ sur E, telle que $\tilde{h}(\neg A) = \neg\tilde{h}(A)$, $\tilde{h}(A \wedge B) = \tilde{h}(A).\tilde{h}(B),\ldots,\tilde{h}(\exists x[f^x]) = \operatorname{Sup}_a \tilde{h}((a/x)f^x)$. Ensuite $\tilde{h}$ donne au quotient un homomorphisme (validant) $h : E/R \to \mathbb{U}$; h est alors la fonction caractéristique d'un ultrafiltre validant et réciproquement.

C'est ce sous-espace $\mathcal{U}$ de X que nous considérons ici comme espace des interpretations.

Forme topologique du théorème de complètude.

Le théorème de complétude classique :

"Tout énoncé universellement valide est un énoncé démontrable".

est équivalent à :

" $\mathcal{U}$ est partout dense dans X".

En effet :

- D'après le théorème de complètude, soit $\sigma(\alpha)$ un of non vide, $\alpha = \phi(A)$, donc $\neg A \notin T$, $\neg A$ n'est pas universellement valide, donc il existe un système de valeurs de vérité h tel que $\tilde{h}(\neg A) = o$, soit $\tilde{h}(A) = 1 = \bar{h}(\alpha)$, donc α appartient à au moins un ultrafiltre validant U, soit $U \in \sigma(\alpha)$, d'où $\sigma(\alpha) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$.

- Réciproquement, si $\mathcal{U}$ est partout dense : soit A un énoncé universellement valide et $\alpha = \phi(A)$. Si on suppose $\alpha \neq 1$, alors $\neg\alpha \neq 0$, donc $\sigma(\neg\alpha) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$, donc il existe h tel que $\tilde{h}(\neg A) = 1$, soit $\tilde{h}(A) = o$ ce qui est contradictoire. Donc $\alpha = 1$, c'est-à-dire $A \in T$.

Etude de l'intérieur de $\mathcal{U}$.

On a les résultats suivants :

1°) S'il y a une infinité de prédicats de poids non nuls, alors $\overset{o}{\mathcal{U}} = \emptyset$.

Cela revient à prouver : si $\alpha \neq 0$ alors $\sigma(\alpha) \not\subset \mathcal{U}$

En effet :

Soit $\alpha = \phi(A) \neq 0$, donc il existe h tel que $\bar{h}(\alpha) = \tilde{h}(A) = 1$

Soient r_n^p un prédicat de poids non nul ne figurant pas dans A et a un individu n'ayant aucune occurrence dans A. Définissons le système de valeurs de vérité g par :

$$\begin{cases} g(u) = h(u) & \text{pour tout énoncé élémentaire } u \text{ non dominé par } r_n^p \\ g(r_n^p a a_2 \dots a_p) = 1 & \text{quels que soient } a_2, \dots, a_p \\ g(r_n^p b a_2 \dots a_p) = o & \text{si } b \neq a, \text{ quels que soient } a_2, \dots, a_p \end{cases}$$

g définit alors un ultrafiltre validant U et $\alpha \in U$ car $\tilde{g}(A) = \tilde{h}(A) = 1$.

Soit B l'énoncé : $\exists x_2 \dots \exists x_p [r_n^p a x_2 \dots x_p]$ $\quad$ ($B = r_n^1 a$ si $p = 1$)

et $\beta = \phi(B)$. On a $\tilde{g}(B) = 1$ donc $\beta \in U$ et a fortiori $\exists a\beta \in U$, mais pour tout $b \neq a$ $\tilde{g}((b/a)B) = o$ donc $(b/a)\beta \notin U$, soit $\neg(b/a)\beta \in U$.

Soit i(a) le sous-anneau de E/R constitué par les éléments indépendants de a, $U \cap i(a)$ est un ultrafiltre de i(a) qui contient α et $\exists a\beta$ et tous les $\neg(b/a)\beta$ pour $b \neq a$.

$W = (U \cap i(a)) \cup \{\neg\beta\}$ est une partie compatible de E/R, en effet si on avait :

$$\gamma . \neg\beta = o \qquad \text{pour } \gamma \in U \cap i(a)$$

alors $\gamma \leq \beta$ donc $(b/a)\gamma = \gamma \leq (b/a)\beta$ pour tout b, en particulier pour $b \neq a$ on aurait $(b/a)\beta \in U \cap i(a)$, ce qui est contradictoire.

W étant compatible, est contenue dans un ultrafiltre V de E/R. On a :

$$\alpha \in V \text{ , donc } V \in \sigma(\alpha)$$

$\exists a\ \beta \in V$, mais $\beta \notin V$ (car $\neg\beta\in V$) et pour tout $b \neq a$: $(b/a)\beta \notin V$, car $\neg((b/a)\beta \in V$.

Donc V n'est pas validant.

Donc $\sigma(\alpha) \not\subset \mathcal{U}$.

2°) S'il n'y a qu'un nombre fini de prédicats, alors $\overset{o}{\mathcal{U}} \neq \emptyset$.

En effet : soient $r_{n_1}^{p_1},\ldots,r_{n_q}^{p_q}$ tous les prédicats, posons :

$$A = \forall x_1 \ldots \forall x_{p_1} [r_{p_1}^{p_1} x_1 \ldots x_{p_1}] \wedge \ \ldots \ \wedge \forall x_1 \ldots \forall x_{p_q} [r_{p_q}^{p_q}\ x_1 \ldots x_{p_q}]$$

et $\alpha = \phi(A)$.

On vérifie immédiatement que α est un atome de E/R, donc $\sigma(\alpha)$ est réduit à un point {U} (point isolé de X), U est nécessairement un ultrafiltre validant car $\alpha \neq o$, donc $\sigma(\alpha) \subset \mathcal{U}$.

N.B. Ceci prouve que dans le cas 1°), E/R ne possède aucun atome (cest-à-dire X n'a aucun point isolé).

<u>Rapports entre $\mathcal{U}$ et l'espace de Cantor $\mathbb{U}^A$</u>

Soit Γ l'application : $\mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{U}^A$

$U \longmapsto h$ tel que $\bar{h}$ soit la fonction caractéristique de U.

Γ est bijective.

Γ est continue sur $\mathcal{U}$, en effet :

si $\Omega = \prod_{u\in a} \Omega_u$ est un ensemble élémentaire non vide de U^A

$\Omega_u = \mathbb{U}$ sauf un nombre fini d'indices $u_1,\ldots,u_n$. Posons alors :

$A_i = u_i$ si $\Omega_{u_i} = \{1\}$

$= \neg u_i$ si $\Omega_{u_i} = \{o\}$

et $A = A_1 \wedge \ldots \wedge A_r$ et $\alpha = \phi(A)$. On vérifie alors : $\bar{\Gamma}^1(\Omega) = \sigma(\alpha) \cap \mathcal{U}$: of de $\mathcal{U}$.

Mais Γ n'est certainement pas bicontinue car sinon $\mathcal{U}$ serait compact et par suite $\mathcal{U} = X$, ce qui est inexact. On peut alors étudier les points de discontinuité de $\bar{\Gamma}^1$. On a les résultats suivants :

1°) Tout point $h \in \mathbb{U}^A$, possédant la propriété suivante :

$\left\{\begin{array}{l}\text{Il existe un énoncé élémentaire } v \text{ de poids non nul et un individu } a \\ \text{figurant dans } v \text{ tel que } h((b/a)v) = h(v) \text{ pour tout individu } b.\end{array}\right.$

est un point de discontinuité de $\overset{-1}{\Gamma}$.

En effet :

soit par exemple $h(v) = o$, posons $A = \exists x\, [(x/a)v]$ alors $\tilde{h}(A) = o$. Soit $\alpha = \phi(A)$, donc $\neg\alpha \in U$ si $U = \overset{-1}{\Gamma}(h)$, donc $\sigma(\neg\alpha) \cap \mathcal{U}$ est voisinage de U.

Soit alors $\Omega = \Pi\Omega_u$ un voisinage élémentaire quelconque de h, $\Omega_u = \mathbb{U}$ sauf pour un nombre fini d'indices, donc il existe un individu b_1 tel que $\Omega_{v_1} = \mathbb{U}$ où $v_1 = (b_1/a)v$, donc on peut trouver $g \in \Omega$ tel que $g(v_1) = 1$, par suite $\alpha \in \overset{-1}{\Gamma}(g)$, donc $\overset{-1}{\Gamma}(g) \notin \sigma(\alpha) \cap \mathcal{U}$.

2°) S'il y a au moins un prédicat de poids $\geqslant 2$, alors $\overset{-1}{\Gamma}$ est discontinue en tout point $h \in \mathbb{U}^A$.

Il suffit de considérer h ne possédant pas la propriété précédent, alors si v est un énoncé élémentaire de poids $\geqslant 2$ et a, b deux individus différents figurant dans v, en posant $A = \forall y \exists x\, [(y/b)(x/a)v]$, on a nécessairement $\tilde{h}(A) = 1$, donc $\sigma(\alpha) \cap \mathcal{U}$ est un voisinage de $\overset{-1}{\Gamma}(h)$, et on montre comme précédemment que dans tout voisinage élémentaire de h, il existe g tel que $\tilde{g}(A) = o$.

N.B. La discontinuité de $\overset{-1}{\Gamma}$ en tout point h signifie :

Pour tout système de valeurs de vérité h, il existe un énoncé A tel $\tilde{h}(A) = 1$ et pour toute partie finie $\mathcal{A}^\circ$ de $\mathcal{A}$ il existe g coïncidant avec h sur $\mathcal{A}^\circ$ mais avec $\tilde{g}(A) = o$.

Manuscrit remis le 31 janvier 1967.

Daniel PONASSE
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences de Lyon.