PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

A. PRELLER

Interpolation et amalgamation

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1969, tome 6, fascicule 1
, p. 49-64

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1969__6_1_49_0>

© Université de Lyon, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1969 t. 6-1

INTERPOLATION ET AMALGAMATION

A. PRELLER

Introduction.

Ce travail expose une partie de ma thèse de doctorat ès-sciences, intitulée "Logique Algébrique Infinitaire". Une autre partie de cette thèse est publiée sous le titre " THE SYNTAX AND SEMANTICS OF INFINITARY LANGUAGES", dans "Lecture Notes of Mathematics", vol. 72, 1968, Springer Verlag. Le présent travail est conçu comme suite de cet article de sorte que nous adoptons les mêmes notations et supposons connus les définitions et résultats de cet article. Nous allons établir ici la relation entre les notions "Interpolation" et "Amalgamation" dans la catégorie des algèbres quantifiées.

1. DEFINITION : Soient A une $(X \cup C,\alpha,\beta)$-algèbre, κ un cardinal plus petit que α, $I = X \cup C$. Nous appelerons prédicat toute application R de I^{κ} dans A qui commute aux substitutions, c.à.d. telle que $R\sigma = \sigma R$ quel que soit $\sigma \in I_X$.

Avec la terminologie de (2), un prédicat est un morphisme d'un $(X \cup C,\alpha)$-ensemble de la forme I^{κ} dans A ou encore une $(X \cup C,\alpha)$-application de I^{κ} dans A.

2. LEMME. Soit (s,t) une jolie famille de la $(X \cup C,\alpha,\beta)$-algèbre A et définie sur ξ-ensemble (K,L). Alors il existe une famille de prédicats de A $(R_{\ell})_{\ell \in L}$ telle qu'il existe une famille $(\tau_{\ell})_{\ell \in L}$ avec $\tau_{\ell} \in X^{\kappa_{\ell}}$ et $t(1,\ell) = R_{\ell}(\tau_{\ell})$ pour $\ell \in L$, et vérifiant

Cet ouvrage est la propriété
du Service ...
de la Faculté ...

1) si ℓ_1 , $\ell_2 \in L$ et $0 \leq i \leq \xi$ sont tels que $\ell_{1j} = \ell_{2j}$ pour $0 \leq j \leq s\ell_1^i$ et $i \leq j \leq \xi$, alors $R_{\ell_1} = R_{\ell_2}$, $\tau_{\ell_1} = \tau_{\ell_2}$.

2) $\tau_\ell(\kappa_\ell) \cap (\bigcup_{s\ell^i < j < i} K_j) = \emptyset$ pour $\ell \in L$, $o < i \leq \xi$.

3) $|\bigcup_{\ell \leq \ell_1^{i+1}} K_i \quad \tau_\ell(\kappa_\ell)| < \beta$ pour $0 \leq i \leq \xi$ et $\ell_1^{i+1} \in L^{i+1}$.

Démonstration : En effet, il existe une famille de $\nearrow\alpha$-supports J_ℓ de $t(1,\ell)$, $\ell \in L$, ayant les propriétés

1*) si ℓ_1 , $\ell_2 \in L$ et $0 \leq i \leq \xi$ sont tels que $\ell_{1j} = \ell_{2j}$ pour $0 \leq j \leq s\ell_1^i$ et $i \leq j \leq \xi$ alors $J_{\ell_1} = J_{\ell_2}$.

2*) $J_\ell \cap (\bigcup_{s\ell^i < j < i} K_j) = \emptyset$ pour $\ell \in L$, $0 \leq i \leq \xi$.

3*) $|\bigcup_{\ell \leq \ell_1^{i+1}} K_i \cap J_\ell| < \beta$ pour $0 \leq i \leq \xi$, $\ell_1^{i+1} \in L^{i+1}$

(Nous omettons la démonstration de ce fait).

Soit $\mathcal{J} = \{J_\ell;\ \ell \in L\}$. Donc $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$. Pour $J \in \mathcal{J}$ soit $\kappa_J = |J|$ et τ_J une bijecti[on] de κ_J sur J. Pour $\ell \in L$ posons $\kappa_\ell = \kappa_J$, $\tau_\ell = \tau_J$ avec $J = J_\ell$. Nous définissons le prédicat R_ℓ par $R_\ell(\tau_\ell) = t(1,\ell)$. Comme $\tau_\ell(\kappa_\ell) = J_\ell$ on voit facilement qu'il y a une et une seule application R_ℓ de I^{κ_ℓ} dans A qui commute aux substitution[s] et vérifie $R_\ell(\tau_\ell) = t(1,\ell)$. Montrons que $(R_\ell)_{\ell \in L}$ et $(\tau_\ell)_{\ell \in L}$ vérifient 1) : Soient i, $0 \leq i \leq \xi$, ℓ_1 , $\ell_2 \in L$ et $\ell_{1j} = \ell_{2j}$ sauf peut-être si $s\ell_1^i < j < i$. Alors $J_{\ell_1} = J_{\ell_2} = J$, donc $\tau_{\ell_1} = \tau_{\ell_2}$ et, aussi $t(1,\ell_1) = t(1,\ell_2)$, donc $R_{\ell_1} = R_{\ell_2}$.

De même les conditions 2) et 3) se déduisent facilement des propriétés 2*) et 3*).

3. DEFINITION : Soit $(R_\ell)_{\ell\in L}$ une famille de prédicats de A, I^{κ_ℓ} l'ensemble de définition de R_ℓ et $\tau_\ell \in I^{\kappa_\ell}$ pour $\ell\in L$. Nous dirons que $(s,(R_\ell,\tau_\ell)_{\ell\in L})$ définit la jolie famille (s,t) qui elle-même est définie sur le ξ-ensemble (K,L), si les conditions 1), 2) et 3) du lemme 2 sont vérifiées et si de plus $R_\ell(\tau_\ell) = t(1,\ell)$ pour $\ell\in L$. Nous dirons que (s,t) est fortement contradictoire si (s,t) est définie par $(s,(R_\ell,\tau_\ell)_{\ell\in L})$ qui en plus vérifie la condition suivante que nous désignerons par f-c :

Pour toute fonction de choix $c\in C(\xi,K,L)$ il existe ψ_1 , $\psi_2 \in I_N$ et q_1 , $q_2 \in Q$ de sorte que $R_{(\bar{c}_2(\psi_1,q_1),q_1)} = (R_{(\bar{c}_2(\psi_2,q_2),q_2)})'$ et $\bar{c}_1(\psi_1,q_1)\otimes\psi_1\tau_{(\bar{c}_2(\psi_1,q_1),q_1)} = \bar{c}_1(\psi_2,q_2)\otimes\psi_2\tau_{(\bar{c}_2(\psi_2,q_2),q_2)}$.

Nous dirons qu'un élément a de A est fortement contradictoire, s'il existe une jolie famille (s,t) de A fortement contradictoire avec $a = J(\xi,s,t)$. Nous dirons que A est faiblement jolie, en abrégé f-jolie, si tout élément fortement contradictoire de A est nul. Rappelons qu'un élément a de A est dit contradictoire, s'il existe une jolie famille (s,t) de A telle que $a = J(\xi,s,t)$ et qui soit contradictoire, c.à.d., (tc) est contradictoire pour toute fonction de choix $c\in C(\xi,K,L)$.

Il est clair que tout élément fortement contradictoire de A est contradictoire et si A est jolie, alors A est faiblement jolie. (cf. (2) 4.1).

4. DEFINITION : La sous catégorie pleine de Q formées des f-jolies (resp. jolies) algèbres quantifiées est désignée par f - J - Q (resp. J - Q).

La sous catégorie pleine de $Q_{(X\cup C,\alpha,\beta)}$ formée des f-jolies (resp. jolies) $(X\cup C,\alpha,\beta)$-algèbres est désignée par $f - J - Q_{(X\cup C,\alpha,\beta)}$ (resp. $J - Q_{(X\cup C,\alpha,\beta)}$).

Un morphisme de $Q_{(X\cup C,\alpha,\beta)}$ est appelé un $(X\cup C,\alpha,\beta)$-homomorphisme.

5. PROPOSITION. (i) Toute $(X\cup C,\alpha,\beta)$-sous-algèbre d'une f-jolie $(X\cup C,\alpha,\beta)$-algèbre est f-jolie.

(ii) Soient A_1 , A_2 des $(X\cup C,\alpha,\beta)$-algèbres, h un $(X\cup C,\alpha,\beta)$-homomorphisme de A_1 dans A_2. Si A_1 est f-jolie, alors aussi la $(X\cup C,\alpha,\beta)$-sous-algèbre $h(A_1)$ de A_2.

Démonstration : Posons $B = h(A_1)$. Remarquons d'abord que pour tout $b\in B$, tout support J de b il existe $a\in A_1$ de sorte que $ha = b$ et que J supporte encore a. En effet, soit $a_0\in A$ tel que $h(a_0) = b$. Si $J = X$, nous pouvons prendre $a = a_0$. Si $J \neq X$, soient $x\in X-J$, J_0 un $\nearrow\alpha$-support de a_0 et $\sigma\in I_{J-J_0}$ tel que $\sigma(J-J_0) = \{x\}$. Alors $a = \exists\{x\}\sigma a_0$ possède les propriétés voulues. Dônnons-nous une jolie famille (s,t) de B, définie sur (K,L) et fortement contradictoire; par exemple, supposons que $(s,(R_\ell,\tau_\ell)_{\ell\in L})$ définit (s,t) et vérifie la condition f-c de la définition 3. Pour un prédicat R de B nous désignons par κ_R le cardinal plus petit que α pour lequel I^{κ_R} est l'ensemble de définition de R. Remarquons que $\kappa_{R_1} = \kappa_{R_2}$ si $R_1 = R_2'$. Soit $\mathcal{R} = \{R_\ell \ ; \ \ell\in L\}$. Nous pouvons partager $\mathcal{R}$ en deux parties disjointes $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ de sorte que $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ ne contiennent pas à la fois un prédicat et sa négation et que $R\in\mathcal{R}_2$ entraine $R'\in\mathcal{R}_1$. Pour $R\in\mathcal{R}_1$ choisissons une injection χ_R de κ_R dans I. Désignons par J_R l'image $\chi_R(\kappa_R)$ de κ_R par χ_R. J_R supporte χ_R dans I^{κ_R}. De plus, choisissons $a_R\in A_1$ de sorte que $h(a_R) = R(\chi_R)$ et que J_R supporte a_R. Si au contraire $R\in\mathcal{R}_2$, nous posons $\chi_R = \chi_{R'}$ (qui est déjà défini), $J_R = \chi_R(\kappa_R)$ (qui est égal à $\chi_{R'}(\kappa_{R'})$), $a_R = a_{R'}'$. Cela nous permet de définir une $(X\cup C,\alpha)$-application Q_R de I^{κ_R} dans A_1 par $Q_R(\chi_R) = a_R$, pour $R\in\mathcal{R}$. Si maintenant $\ell\in L$ nous posons $Q_\ell = Q_R$ où $R = R_\ell$. Retenons que $R_{\ell_1} = R_{\ell_2}'$ entraine $Q_{\ell_1} = Q_{\ell_2}'$. Définissons finalement une application v de $I_X\times L$ dans A_1 par $v(\sigma,\ell) = Q_\ell(\sigma\tau_\ell)$ pour $\sigma\in I_X, \ell\in L$. Alors (s,v) est une jolie famille de A_1 définie sur (K,L) et fortement contradictoire. De plus, $h(v(\sigma,\ell)) = t(\sigma,\ell)$ quels que soient $\sigma\in I_X$, $\ell\in L$.

Par conséquent, $J(\xi,s,t) = J(\xi,s,hv) = h(J(\xi,s,v)) = h(o) = 0$. Ceci montre que B est f-jolie et achève la démonstration.

6. PROPOSITION : Le foncteur "oubli" canonique de $f\text{-}J\text{-}Q_{(X\cup C,\alpha,\beta)}$ (resp. $J\text{-}Q_{(X\cup C,\alpha,\beta)}$) dans $J_{(X\cup C,\alpha)}$ possède un adjoint à gauche J (resp. f-J). Si f-JE (resp. JE) est la f-jolie (resp. jolie) $(X\cup C,\alpha,\beta)$-algèbre libre sur le $(X\cup C,\alpha)$-ensemble E et ψ_E la $(X\cup C,\alpha)$-application canonique de E dans f-JE (resp. JE), alors f-JE (resp. JE) est engendrée par $\psi_E(E)$.

Démonstration : Par (2), critère 2.9.

7. DEFINITION : Soit A une $(X\cup C,\alpha,\beta)$-algèbre. Une partie $\mathfrak{m}$ de A est appelée un $(X\cup C,\alpha,\beta)$-idéal de A, si les conditions suivantes sont vérifiées :

(1) $\mathfrak{m}$ est un idéal de l'algèbre de Boole sous-jacente de A, stable pour la formation des $\nearrow\alpha$-suprémum, c.à.d. des suprémums de la forme $\bigvee_{u\in U} a_u$ où $|U|<\alpha$.

(2) Si $a\in\mathfrak{m}$, $\sigma\in I_X$, alors $\sigma a\in\mathfrak{m}$

(3) Si $K\subset X$ avec $|K|<\beta$, si $a\in\mathfrak{m}$, alors $\exists K a\in\mathfrak{m}$.

8. PROPOSITION : Si $\mathfrak{m}$ est un $(X\cup C,\alpha,\beta)$-idéal de la $(X\cup C,\alpha,\beta)$-algèbre A, alors l'algèbre quotient $A/\mathfrak{m}$ est munie de manière unique d'une $(X\cup C,\alpha,\beta)$-structure telle que la surjection canonique p de A sur $A/\mathfrak{m}$ soit un $(X\cup C,\alpha,\beta)$-homomorphisme. Réciproquement, si h est un $(X\cup C,\alpha,\beta)$-homomorphisme de A dans B, alors $\mathfrak{m} = h^{-1}(\{0\})$ est un $(X\cup C,\alpha,\beta)$-idéal de A et l'isomorphisme canonique g de $A/\mathfrak{m}$ sur h(A), contenu dans B, vérifiant h = gp est image de h (au sens catégorique).

9. PROPOSITION : Soit $A = TE$ la $(X\cup C,\alpha,\beta)$-algèbre libre sur E où E est un $(X\cup C,\alpha)$-ensemble; l'ensemble des éléments contradictoires de A est l'ensemble des éléments de A annulés par tout homomorphisme validant à valeurs dans 2. Cet ensemble est un $(X\cup C,\alpha,\beta)$-idéal de A et $JE = A/\mathfrak{m}_\theta$. Dém. cf (2), 4-2 , 4-3.

10. PROPOSITION : Soit $E = \coprod_{u\in U} I^{\kappa_u}$, $\kappa_u<\alpha$ pour $u\in U$, A la $(X\cup C,\alpha,\beta)$-algèbre libre sur E. Alors un élément a de A est fortement contradictoire si et seulement s'il est contradictoire.

Démonstration : Supposons que $a\in A$ est contradictoire. Alors il existe une jolie famille contradictoire (s,t) avec $t(1,\ell)\in E\cup{}'E$ pour $\ell\in L$, telle que $a = J(\xi,s,t)$ (Voir proposition 9). Puisque $E = \coprod_{u\in U} I^{\kappa_u}$, on montre facilement qu'il existe une famille de prédicats $(R_\ell)_{\ell\in L}$ de A telle que (s,t) soit définie par $(B,(R_\ell,\tau_\ell)_{\ell\in L}$ et que f-c soit vérifiée. Donc a est fortement contradictoire.

11. PROPOSITION : Si $E = \coprod_{u\in U} I^{\kappa_u}$, alors f-JE = JE.

Démonstration : Les propositions 9 et 10 entrainent que toute $(X\cup C,\alpha)$-application f de E dans une f-jolie $(X\cup C,\alpha,\beta)$-algèbre B se prolonge de manière unique à la jolie $(X\cup C,\alpha,\beta)$-algèbre JE libre sur E. (Rappelons que E s'identifie à un $(X\cup C,\alpha)$-sous-ensemble de JE).

12. Soient $X_0\subset X$, $C_0\subset C$, $\alpha\leqslant|X_0|$, i l'injection canonique de I_0 dans I, B une $(X\cup C,\alpha,\beta)$-algèbre, f le foncteur de I_X dans $\mathrm{Hom}_{\nearrow\alpha}(B,B)$ qui définit la $(X\cup C,\alpha,\beta)$-structure sur B. Désignons par f_0 la restriction de f à I_{0X_0} I_{0X_0} étant identifié à une sous-catégorie de I_X (cf. (2) 1-5). Comme dans B $\bigvee_{\sigma\in I_K} \sigma b = \bigvee_{\sigma\in I_{0K}} \sigma b$ quels que soient $b\in B$, $K\subset X$ avec $|K|<\beta$, f_0 définit sur B une structure de $(X_0\cup C_0,\alpha,\beta)$-algèbre que nous désignerons par A.

Le lemme suivant est essentiel pour garantir que si nous "oublions" des constantes ou variables, les notions "contradictoire" et "joli" restent inchangées. La démonstration de ce lemme se décompose en une série de lemmes techniques que nous ne reproduisons pas ici.

LEMME : Si $|X_o| = |I_o| = \delta$ et $\delta^\gamma \leqslant \delta$ pour $\gamma < \beta$, alors toute jolie famille (s,t_o) de A définie sur le ξ-ensemble (K,L) se prolonge de manière unique en une jolie famille (s,t) de B, définie aussi sur (K,L) de sorte que, si X_o supporte $t_o(1,\ell)$ pour $\ell \in L$, alors "(s,t_o) contradictoire" (resp. fortement contradictoire) entraine que (s,t) l'est aussi.

COROLLAIRE : Soit $S_i B$ la $(X_o \cup C_o,\alpha,\beta)$-sous algèbre de A qui est formée des éléments de B qui ont tous un $\not\nearrow\alpha$-support contenu dans X_o. Alors $S_i B$ est jolie (resp. f-jolie), si B l'est.

$(S_i$ est un foncteur de compression, cf. (2) 1-7).

13\. PROPOSITION : Soient $X_o \subset X$, $C_o = C$, $\alpha \leqslant |X_o| = I_o = \delta, \delta^\gamma \leqslant \delta$ pour $\gamma < \beta$, i l'injection canonique de I_o dans I, E un $(X \cup C,\alpha)$-ensemble, JE la jolie $(X \cup C,\alpha,\beta)$-algèbre libre sur E, $E_o = S_i E$. Alors la jolie $(X_o \cup C_o,\alpha,\beta)$-algèbre libre sur E_o est isomorphe à $S_i JE$.

<u>Démonstration</u> : Soit g_o l'injection canonique de E_o dans E, E étant identifié à une partie de JE. (cf. (2) 4-3) ; g_o est une $(X_o \cup C_o,\alpha)$-application de E_o dans $S_i JE$, donc il existe un $(X_o \cup C_o,\alpha,\beta)$-homomorphisme h de JE_o dans $S_i JE$ qui prolonge g_o puisque $S_i JE$ est jolie d'après le corollaire de 12. Montrons que h est injectif. D'abord, on voit facilement que h est injectif sur $E_o \cup {}'E_o$. Supposons que h annule $a \in JE_o$. Il existe une jolie famille (s,t_o) avec $J(\xi,s,t_o)$ a et $t_o(1,\ell) \in E_o \cup {}'E_o$, (s,t_o) étant définie sur le ξ-ensemble (K,L). Désignons par t le prolongement unique de ht_o à $I_X \times L$ vérifiant $t(\sigma,\ell) = \sigma t(1,\ell)$ pour $\sigma \in I_X$, $\ell \in L$. Nous avons $0 = ha = J(\xi,s,ht_o) = J(\xi,s,t)$. Donc, pour tout $d \in C_I(\xi,K,L)$, (td) est contradictoire. (Nous avons rajouté l'index I dans la désignation de l'ensemble des fonctions de choix

associé au ξ-ensemble (K,L) puisque cet ensemble dépend évidemment de l'ensemble des individus "actuellement en considération". Dans (2) 3-6 cet index pouvait être supprimé puisqu'il n'y avait pas de confusion à craindre sur l'ensemble des individus en considération). Pour montrer que $a = o$, il suffit de montrer que $(t_o c)$ est contradictoire pour toute fonction de choix $c \in C_{I_o}(\xi,K,L)$. Soit donc $\sigma \in I_X$ tel que $\sigma i = 1_{I_o}$. Soit $c \in C_{I_o}(\xi,K,L)$, il existe $d \in C_I(\xi,K,L)$ vérifiant $\bar{d}_j(\psi,q) = \bar{c}_j(\overline{\sigma\psi},q)$ pour $j = 1,2$, $\psi \in I_{N^o}$, $q \in Q$. Puisque (td) est contradictoire, il existe (ψ_1,q_1) , $(\psi_2,q_2) \in I_N \times Q$ tels que

$$a_1 = t(\bar{d}_1(\psi_1,q_1) \otimes \psi_1 , (\bar{d}_2(\psi_1,q_1),q_1)) = (t(\bar{d}_1(\psi_2,q_2) \otimes \psi_2 , (\bar{d}_2(\psi_2,q_2),q_2)))$$
$$= a_2' .$$

Donc aussi $\sigma a_1 = (\sigma a_2)'$. Or

$$\sigma a_j = t(\bar{c}_1(\overline{\sigma\psi}_j,q_j) \otimes \overline{\sigma\psi}_j , (\bar{c}_2(\overline{\sigma\psi}_j,q_j),q_j)) = ht_o(\bar{c}_1(\phi_j,q_j) \otimes \phi_j,(\bar{c}_2(\phi_j,q_j),q_j))$$

où $\phi_j = \overline{\sigma\psi}_j \in I_{o_N}$.

Donc $(ht_o c)$ est contradictoire et puisque $(t_o c) \subset E_o \cup' E_o$, $(t_o c)$ est aussi contradictoire. Nous avons démontré l'injectivité de h. Montrons la surjectivité de h. Supposons que $b \in S_1 JE$. Soit (s,t) une jolie famille de JE, définie sur le ξ-ensemble (K,L) avec $t(1,\ell) \in E \cup' E$ pour $\ell \in L$ et avec $b = J(\xi,s,t)$. Soit $\sigma \in I_X$ comme ci-dessus. En particulier, nous avons $\sigma | X_o = 1_I$. Alors pour $\chi \in I_K$ et $K^* \subset X_o$ convenable, nous avons $b = \sigma b = J(\xi,s,t_\sigma^\chi)$ et (s,t_σ^χ) est une jolie famille de JE définie sur (K^*,L). Soit J une partie de X qui supporte $t(1,\ell)$ quel que soit $\ell \in L$. Alors $\sigma \otimes \chi(J) \subset X_o$ supporte $t_\sigma^\chi(1,\ell)$ quel que soit $\ell \in L$. Soit t_o la restriction de t_σ^χ à $I_{o X_o}^{K} \times L$. (s,t_o) est une jolie famille de $S_1 JE$ avec $t_o(1,\ell) \in E_o \cup' E_o$ pour $\ell \in L$ et avec $J(\xi,s,t_o) = J(\xi,s,t_\sigma^\chi) = b$. Donc h est surjectif. Rappelons que g_o est l'identité de E_o, considéré comme partie de JE_o, sur E_o, considéré comme partie de $E \subset JE$.

14. PROPOSITION : Soit E un (I,α)-ensemble, JE la jolie (I,α,β)-algèbre libre sur E. Soit $^{\vee}\cup C$ une partition en variables et constantes convenable de I, $E_\circ$ le $(X\cup C,\alpha)$-ensemble sous jacent de E, B la $(X\cup C,\alpha,\beta)$-algèbre sous-jacente de JE. Alors B est une jolie $(X\cup C,\alpha,\beta)$-algèbre libre sur $E_\circ$.

Démonstration : Remarquons d'abord que B est encore jolie. En effet, l'ensemble des individus de JE et de B est le même. Soit A une jolie $(X\cup C,\alpha,\beta)$-algèbre libre sur $E_\circ$, $g_\circ$ l'application identique de $E_\circ$ sur $E\subset JE$; $g_\circ$ est une $(X\cup C,\alpha)$-application de $E_\circ$ dans B et par conséquent il existe un $(X\cup C,\alpha,\beta)$-homomorphisme h de A dans B prolongeant $g_\circ$. Montrons que h est surjectif. Soit donc $b = J(\xi,s,t)\in JE$ où (s,t) est une jolie famille de JE avec $t(1,\ell)\in E\cup' E$ pour $\ell\in L$, et définie sur le ξ-ensemble (K,L). Considérons une partie J de I de cardinal inférieur à α qui supporte $t(1,\ell)$ pour $\ell\in L$ Soit $K^*\subset X-J$ et $|K^*| = |K|$. Nous avons $J(\xi s,t) = J(\xi,s,t_{1_I})$ où χ est une bijection de K sur K^*. Or, $(s,t^{\chi}_{1_I})$ est une jolie famille de JE sur (L,K^*) et pour $t_\circ = t^{\chi}_{1_I} \mid I_\chi\times L$, $(s,t_\circ)$ est une jolie famille de B avec $t_\circ(1,\ell)\in E_\circ\cup' E_\circ$ pour $\ell\in L$, définie sur le ξ-ensemble (K^*,L) et $b = J(\xi,s,t^{\chi}_{1_I}) =$ $= J(\xi,s,t_\circ) = J(\xi,s,ht_\circ) = h(J(\xi,s,t_\circ))$. Ceci établit la surjectivité de h. L'injectivité est facile à voir.

15. PROPOSITION : Soient $E_\circ,E_1$ des $(X\cup C,\alpha)$-ensembles, g un $(X\cup C,\alpha)$-monomorphisme de $E_\circ$ dans E_1. Alors le $(X\cup C,\alpha,\beta)$-homomorphisme Jg de la jolie $(X\cup C,\alpha,\beta)$-algèbre $JE_\circ$ dans la jolie $(X\cup C,\alpha,\beta)$-algèbre JE_1 est injectif, et un monomorphisme.

Démonstration : Tout monomorphisme de $\mathfrak{J}_{(X\cup C,\alpha)}$ étant injectif, il est clair que Jg est injectif sur $E_\circ\cup' E_\circ$. Supposons $Jga = 0$, $a = J(\xi,s,t)$ où (s,t) est une jolie famille de $JE_\circ$ avec $t(1,\ell)\in E_\circ\cup' E_\circ$ pour $\ell\in L$. Puisque $0 = jga = J(\xi,s,Jgt)$, la jolie famille (s,jgt) de JE_1 est contradictoire.

Or, ceci entraine que (s,t) est contradictoire et finalement que a = o.

COROLLAIRE : Soit E_o un $(X \cup C,\alpha)$-sous-ensemble du $(X \cup C,\alpha)$-ensemble E, JE la jolie $(X \cup C,\alpha,\beta)$-algèbre libre sur E. Alors la $(X \cup C,\alpha,\beta)$-sous-algèbre de JE engendrée par E_o est libre sur E_o.

Dans ce qui suit, nous fixons les cardinaux α,β et δ où $\delta \geq \alpha$ et $\delta^{\gamma} \leq \delta$ pour $\gamma<\beta$. Nous désignerons par $\mathbb{E}$ la sous-catégorie de Ind suivante : les objets de $\mathbb{E}$ sont les $(X \cup C,\alpha)$-ensembles avec $|X| = |X \cup C| = \delta$. Les $\mathbb{E}$-morphismes du $(X_1 \cup C_1,\alpha)$-ensemble E_1 dans le $(X_2 \cup C_2,\alpha)$-ensemble E_2 sont les morphismes de Ind (j,f) de E_1 dans E_2 tels que I_1 soit un sous-ensemble de I_2, j est induit par l'injection canonique i de J_1 dans I_2, j est induit par l'injection canonique i de I_1 dans I_2 (cf. (2), 1.5) et f applique E_1 dans S_1E_2. De même, nous désignerons par $\mathbb{A}$ la sous-catégorie suivante de $\mathbb{Q}$: les objets de $\mathbb{A}$ sont les f-jolies $(X \cup C,\alpha,\beta)$-algèbres avec $|X| = |X \cup C| = \delta$. Les $\mathbb{A}$-morphismes de la $(X_1 \cup C_1,\alpha,\beta)$-algèbre A_1 dans la $(X_2 \cup C_2,\alpha,\beta)$-algèbre A_2 sont les $\mathbb{Q}$-morphismes (j,h) de A_1 dans A_2 tels que I_1 soit un sous ensemble de I_2, j est induit par l'injection canonique i de I_1 dans I_2 et h applique A_1 dans $S_1(A_2)$.

Donc, si f est un $\mathbb{E}$-morphisme (resp. h un $\mathbb{A}$-morphisme), alors tout support de a où a est un élément de l'ensemble de définition de f (resp. h) est encore un support de f(a) (resp. h(a)).

16. LEMME 1 : Soient E un $(X \cup C,\alpha)$-ensemble, objet de $\mathbb{E}$, A la f-jolie $(X \cup C,\alpha,\beta)$-algèbre libre sur E. Alors A est libre dans $\mathbb{A}$ sur E. Plus précisément, si S^* est le foncteur "oubli" canonique de $\mathbb{A}$ dans $\mathbb{E}$, alors S^* possède un adjoint à gauche T^* tel que $T^*(j,g) = (j,f^{-}Jg)$ pour tout $\mathbb{E}$-morphisme (j,g).

Démonstration : Soient B un objet de $\mathbb{A}$, f le foncteur définissant la structure d'algèbre quantifiée de B , (j,g) un $\mathbb{E}$-morphisme de E dans S^*B. Il existe une unique $(X\cup C,\alpha,\beta)$-structure f_1 sur S_1B telle que $fj(\sigma) = f_1(\sigma)$ quel que soit $\sigma \in I_X$. Désignons par B_1 la $(X\cup C,\alpha,\beta)$-algèbre obtenue en munissant S_1B de la structure f_1. Alors il existe un unique $(X\cup C,\alpha,\beta)$-homomorphisme h de A dans B_1 tel que $h\psi_E = g$. Or ceci équivaut à $(j,h)(1_I,\psi_E) = (j,g)$ ce qui établit le lemme.

LEMME 2 : Soient donnés des objets de $\mathbb{E}$, $E_j = \coprod_{u_j \in U_j} I_j^{\kappa_u}$, pour $j = 0,1,2,3$, E_j étant considérés comme $(X_j \cup C_j,\alpha)$-ensemble de sorte que $X_3 = X_1 \cup X_2$, $X_o = X_1 \cap X_2$, $I_3 = I_1 \cup I_2$, $I_o = I_1 \cap I_2$, $U_3 = U_1 \cup U_2$, $U_o = U_1 \cap U_2$. Si i_{oj} (resp. g_{oj}) désigne l'injection canonique de I_o dans I_j (resp. E_o dans E_j) et i_{3j} (resp. g_{3j}) l'injection canonique de I_j dans I_3 (resp. E_j dans E_3) pour $j = 1,2$, alors E_3 est moyennant (i^*_{31},g_{31}) et (i^*_{32},g_{32}) somme fibrée de (i^*_{o1},g_{o1}) et (i^*_{o2},g_{o2}) dans $\mathbb{E}$. (Rappelons que i^* est le foncteur associé à l'injection i comme indiqué dans (2) 1-5).

Démonstration : Evidemment $i_{31}i_{1o} = i_{32}i_{2o}$ et $g_{31}g_{1o} = g_{32}g_{2o}$. Soient E un $(X\cup C,\alpha)$-ensemble, objet de $\mathbb{E}$, et (i_j,g_j) des $\mathbb{E}$-morphismes de E_j dans E pour $j = 1,2$ de sorte que $(i_1 i_{o1},g_1 g_{o1}) = (i_2 i_{o2}, g_2 g_{o2})$. Définissons une application g de E_3 dans E par $g/E_j = g_j$ pour $j = 1,2$ et de sorte que $g(\sigma a) = i^*(\sigma)g(a)$ pour $a \in E_1 \cup E_2$, $\sigma \in I_{3X_3}$, i étant l'injection canonique de I_3 dans I. g est bien défini puisque $g(a) = g_j(a)$ possède un support contenu dans X_j si $a \in E_j$ pour $j = 1,2$. Evidemment $(i^*,g)(i^*_{3j},g_{3j}) = (i^*_j,g_j)$ pour $j = 1,2$ et (i^*,g) est l'unique morphisme de $\mathbb{E}$ à vérifier ces égalités.

COROLLAIRE : T^*E_3 est moyennant (i^*_{31},T^*g_{31}) et (i^*_{32},T^*g_{32}) somme fibrée de (i^*_{o1},T^*g_{o1}) et (i^*_{o2},T^*g_{o2}).

LEMME 3 : Sous les hypothèses du lemme 2, $\mathcal{T}^*g_{o_j}$ est un isomorphisme de $\mathcal{T}^*E_o$ sur la $(X_o \cup C_o,\alpha,\beta)$-sous-algèbre de $\mathcal{T}^*E_j$ engendrée par E_o pour $j = 1, 2, 3$, de même, $\mathcal{T}^*g_{3j}$ est un isomorphisme de $\mathcal{T}^*E_j$ sur la $(X_j \cup C_j,\alpha,\beta)$-sous-algèbre de $\mathcal{T}^*E_3$ engendrée par E_j pour $j = 1,2$. Si $\mathfrak{M}_j$ est un $(X_j \cup C_j,\alpha,\beta)$-idéal de $\mathcal{T}^*E_j$ pour $j = 0,1,2,3$ de sorte que $\mathfrak{M}_o \subset \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2$ et $\mathfrak{M}_3$ soit engendré par $\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$, alors $\mathcal{T}^*E_3/\mathfrak{M}_3$ est moyennant les morphismes canoniques (i_{3j},h_{3j}) de $\mathcal{T}^*E_j/\mathfrak{M}_j$ dans $\mathcal{T}^*E_3/\mathfrak{M}_3$, pour $j = 1,2$, somme fibrée des morphismes canoniques (i^*_{oj},h_{oj}) de $\mathcal{T}^*E_o/\mathfrak{M}_o$ dans $\mathcal{T}^*E_j/\mathfrak{M}_j$, pour $j = 1,2$.

<u>Démonstration</u> : En effet, $\mathcal{T}^*E_j$ est la jolie $(X_j \cup C_j,\alpha,\beta)$-algèbre libre sur E_j pour $j = 0,1,2,3$. (cf. Proposition 11). Désignons par E l'ensemble E_3 muni de sa (I_3,α)-structure canonique. Posons $F_j = \coprod_{u_j \in U_j} I_3$ pour $j = 0,1,2,3$. Alors $\mathcal{T}^*F_j = JF_j$ s'identifie à la (I_3,α,β)-sous-algèbre de $\mathcal{T}^*E$ engendrée par F_j où $j = 0,1,2,3$ (cf. Proposition 15). Par proposition 14, JF_j s'identifie à la jolie $((I_3-C_j)\cup C_j,\alpha,\beta)$-algèbre A_j libre sur F_j où F_j est considéré comme $((I_3-C_j)\cup C_j,\alpha)$-ensemble. De proposition 13, nous déduisons que $S_{i_{o_j}}A_j$ (resp. $S_{i_{3j}}A_j$) est isomorphe à la jolie $(X_j \cup C_j,\alpha,\beta)$-algèbre libre sur $S_{i_{o_j}}F_j$ (resp. $S_{i_{3j}}F_j$), c'est-à-dire sur E_j, pour $j = 1,2,3$,(resp. $j = 1,2$). Donc $S_{i_{o_j}}A_j$ (resp. $S_{i_{3j}})A_j$) s'identifie à $\mathcal{T}^*E_j$ pour $j = 1,2,3$ (resp. $j = 1,2$). Or, $S_{o_{o_j}}A_j$ (resp. $S_{i_{3j}}A_j$) est la $(X_j \cup C_j,\alpha,\beta)$-sous-algèbre de $\mathcal{T}^*E$ dont les éléments se mettent sous la forme $J(\xi,s,t)$ où (s,t) est une jolie famille de $E_j \cup {}'E_j$ définie sur le ξ-ensemble (K,L) avec $K \subset X_j$, pour $j = 0,1,2,3$. Il est clair qu'avec cette identification $\mathcal{T}^*E_o$ est la $(X_o \cup C_o,\alpha,\beta)$-sous-algèbre de $\mathcal{T}^*E_j$ engendrée par E_o et pour $j = 1,2,3$ etc. Soient maintenant (i^*_j,g_i) des $\mathbb{A}$-morphismes de $\mathcal{T}^*E_j/\mathfrak{M}$ dans une $(X \cup C,\alpha,\beta)$-algèbre A de $\mathbb{A}$ pour $j = 1,2$, tels que $(i^*_1 i^*_{o1},g_1 h_{o1}) = (i^*_2 i^*_{o2},g_2 h_{o2})$.

D'après le corollaire du lemme 2 il existe un unique $\mathbb{A}$-morphisme (i^*,g) de T^*E_3 dans A tel que $(i^* i^*_{3j}, gT^*g_{3j}) = (i^*_j, g_j p_j)$ pour $j = 1,2$ et où p_j est la surjection canonique de T^*E_j sur $T^*E_j/\mathfrak{M}_j$ pour $j = 0,1,2,3$. Soit (i^*,g_3) l'unique $\mathbb{A}$-morphisme de $T^*E_3/\mathfrak{M}_3$ dans A tel que $(i^*,g_3)(1^*_{I_3},p_3) = (i^*,g)$. Alors $(i^*,g_3)(i^*_{3_j},h_{3j}) = (i^*_j,g_j)$ pour $j = 1,2$ et évidemment (i^*,g_3) est le seul $\mathbb{A}$-morphisme à vérifier ces égalités.

COROLLAIRE : $\mathbb{A}$ possède des deux sommes fibrées.

<u>Démonstration</u> : Soient (i_{oj},h_{oj}) des $\mathbb{A}$-morphismes de A_o dans A_j pour $j = 1,2$. Il existe $E_o = \coprod_{u\in U_o} I_o^{\kappa_u}$ tel que A_o soit un quotient de T^*E_o par un $\mathbb{A}$-morphisme $(1^*_{I_o},p_o)$ où p_o est surjectif. Posons $U_j = U_o \quad (A_j - h_{oj}(A_o))$ pour $j = 1,2$. Choisissant κ_{uj} convenable pour $u_j \in U_j - U_o$, nous voyons qu'il existe des $\mathbb{A}$-morphismes surjectifs p_j de $J^*E_j = J^*(\coprod_{u\in U_j} I_j^{\kappa_u})$ sur A_j tels que $p_j T^*g_{oj} = h_{oj}p_o$ pour $j = 1,2$. Si $\mathfrak{M}_j$ désigne le noyau de p_j pour $j = o,1,2$ A_j est isomorphe à $T^*E_j/\mathfrak{M}_j$. Moyennant cette identification $\mathfrak{M}_o \subset \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2$ et (i^*_{oj},h_{oj}) est le $\mathbb{A}$-morphisme canonique de $T^*E_o/\mathfrak{M}_o$ dans $TE^*_j/\mathfrak{M}_j$ pour $j = 1,2$. Nous pouvons conclure par le lemme 3.

17. DEFINITION 1 : Une catégorie $\mathbb{C}$ est dite posséder des sommes amalgamées, si pour tout couple de monomorphisme (g_1,g_2) de même source il existe un couple de monomorphismes (h_1,h_2) tel que $h_1g_1 = h_2g_2$.

<u>Remarque 1</u> : Si $\mathbb{C}$ possède des deux-sommes fibrées, alors $\mathbb{C}$ possède des sommes amalgamées si et seulement si pour toute somme fibrée (h_1,h_2) de monomorphismes (g_1,g_2) de même but, h_1 et h_2 sont des monomorphismes.

<u>Remarque 2</u> : Les monomorphismes de $\mathbb{E}$ sont des applications injectives, donc aussi les monomorphismes de $\mathbb{A}$ (cf. 16, lemme 1). D'après 16, lemme 3 (et avec les notations de ce lemme) $\mathbb{A}$ possède des sommes amalgamées si et seulement si $\mathfrak{M}_o = \mathfrak{M}_1 \cap T^*E_o = \mathfrak{M}_2 \cap T^*E_o$ entraine $\mathfrak{M}_3 \cap T^*E_j = \mathfrak{M}_j$ pour $j = 1,2$.

DEFINITION 2 : Soit $E = \coprod_{u \in U} I^{\kappa_u}$ un (I,α)-ensemble, objet de $\mathbb{E}$. Le couple (a_1,a_2) d'éléments de $T^{\kappa}E$ est dit γ-interpolable, si $a_1 \leqslant a_2$ et si quels que soient $J_1,J_2 \subset I$, $U_1,U_2 \subset U$ tels que $|J_1-J_2|<\gamma$ ou $|J_2-J_1|<\gamma$. J_j supporte a_j et que a_j appartiennt à la (I,α,β)-sous-algèbre de $T^{*}E$ engendrée par $\coprod_{u \in U_j} I^{\kappa_u}$ pour $j = 1,2$, il existe $a \in T^{*}E$ de sorte que $a_1 \leqslant a \leqslant a_2$, $J_1 \cap J_2$ supporte a et que a appartienne à la (I,α,β)-sous-algèbre de $T^{*}E$ engendrée par $\coprod_{u \in U_1 \cap U_2} I^{\kappa_u}$. $T^{*}E$ est dit posséder la propriété de γ-interpolation si tout couple (a_1,a_2) d'éléments de $T^{*}E$ avec $a_1 \leqslant a_2$ est γ-interpolable. $T^{\kappa}E$ est dit posséder la propriété d'interpolation, si $T^{\kappa}E$ possède la propriété de γ-interpolation pour tout cardinal γ.

18. PROPOSITION : Si A possède des sommes amalgamées, alors pour tout objet E de $\mathbb{E}$ de la forme $E = \coprod_{u \in U} I^{\kappa_u}$, $T^{*}E$ possède la propriété de β-interpolation.

<u>Démonstration</u> : Soit $E = \coprod_{u \in U} I^{\kappa_u}$ un (I,α)-ensemble dans E. Soient donnés $a_1,a_2 \in T^{*}E$ avec $a_2 \leqslant a_1$, de plus des $\nearrow \alpha$-supports $J_j \subset I$ de a_j respectivement pour $j = 1,2$ avec $|J_2-J_1|<\beta$, finalement des parties U_j de U telles que $a_j \in T^{\kappa} \coprod_{u \in U_j} I^{\kappa_u}$ et ceci pour $j = 1,2$. Posons $U_3 = U_1 \cup U_2$ $U_o = U_1 \cap U_2$, $J_3 = J_1 \cup J_2$, $J_o = J_1 \cap J_2$. Soit $F_j = \coprod_{u \in U_j} I^{\kappa_u}$ pour $j = o,1,2,3$. F_j est un (I,α)-ensemble dans $\mathbb{E}$. D'après proposition 15 il suffit de montrer qu'il existe $a_o \in T^{*}\bar{F}^{*}_3$ avec $a_2 \leqslant a \leqslant a_1$ tel que $a_o \in T^{*}F_o$ et que J_o supporte a_o. Désignons par B_j la $((I-J_j) \cup J_j,\alpha,\beta)$-algèbre sous-jacente de $T^{*}F_j$, posons $X = I-J_3$, désignons par i_j l'injection canonique de $X \cup J_j$ dans I pour $j = o,1,2,3$ et par A la $(X \cup J_j,\alpha,\beta)$-sous-algèbre $S_{i_j} B_j$ de B_j, pour $j = o,1,2,3$. D'après les propositions 14, 15 et 16, lemme 3, A_j est la

jolie $(X \cup J_j, \alpha, \beta)$-algèbre libre sur $E_j = \coprod_{u \in U_j} (X \cup J_j)^{K_u}$ muni de sa $(X \cup J_j, \alpha)$-structure canonique. Evidemment $a_j \in A_j$ pour $j = 1,2$ et $A_o \subset A_1 \cap A_2$. Soit $\mathcal{M}_1$ le $(X \cup J_1, \alpha, \beta)$-idéal de A_1 engendré par a_1, posons $\mathcal{M}_o = A_o \cap \mathcal{M}_1$, désignons par $\mathcal{M}_2$ le $(X \cup J_2, \alpha, \beta)$-idéal de A_2 engendré par $\mathcal{M}_o$. Nous avons $\mathcal{M}_2 \cap A_o = \mathcal{M}_o$ puisque $a \in A_o$ et $a \leq \bigvee_{u \in v} \exists K_u \sigma_u a_u$ où $a_u \in \mathcal{M}_o$, $\sigma_u \in (X \cup J_2)$ $K_u \subset X, |K_u| < \beta$ pour $u \in v$ et $|v| < \alpha$, entraine $a \leq a_1$. Donc $a \in \mathcal{M}_2 \cap A_o$ entraine bien $a \in \mathcal{M}_1 \cap A_o$. Si $\mathcal{M}_3$ est le $(X \cup J_3, \alpha, \beta)$-idéal de A_3 engendré par $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$, nous avons $\mathcal{M}_3 \cap A_2 = \mathcal{M}_2$ puisque, par hypothèse, $\mathbb{A}$ possède des sommes amalgamées (cf. 17, remarque 2). Or $a_2 \in \mathcal{M}_3$, donc $a_2 \in \mathcal{M}_2$ et $a_2 \leq b$ où b est de la forme $\bigvee_{u \in v} \exists K_u \sigma_u a_u$ avec v, K_u, σ_u et a_u comme indiqué ci-dessus. Donc b possède dans la (I, α, β)-algèbre $\mathcal{T}^* F_3$ un support contenu dans $X \cup J_2$. Choisissons une substitution $\sigma \in I_X$ de sorte que $\sigma(X) = \{x_o\}$ où $x_o \in X$, fixé mais arbitraire. Posons $a = \exists \{x_o\} \sigma b$. Puisque $a_2 \leq b \leq a_1$ et comme X' supporte a_2 et a_1, nous avons $a_2 \leq a \leq a_1$. Evidemment, a possède un $\nearrow\alpha$-support J contenu dans J_2, a étant considéré comme élément de la (I, α, β)-algèbre $\mathcal{T}^* F_3$. Nous avons par hypothèse $|J_2 - J_1| < \beta$, donc aussi $|J - J_o| < \beta$ Par conséquent $a_2 \leq \exists (J - J_o)\ a \leq a_1$ et $a_o = \exists (J - J_o)$ a appartient à $\mathcal{T}^* F_o$ et est supporté par J_o. Si le couple (a_2, a_1) est tel que $a_2 \leq a_1$ et les $\nearrow\alpha$-supports J_2 et J_1 de a_2 et a_1 respectivement vérifient $|J_1 - J_2| < \beta$ nous nous ramenons au cas précédent en considérant (a_1', a_2') (avec $a_1' \leq a_2'$) et les supports J_1 de a_1' et J_2 de a_2'. Nous obtenons a_o avec $a_1' \leq a_o \leq a_2'$ et les autres propriétés voulues ce qui nous fournit a_o' qui a les propriétés voulues. Le cas àù J_1 ou J_2 n'ont pas nécessairement cardinal plus petit que α se ramène facilement aux cas précédents. Donc $\mathcal{T}^* E$ possède bien la propriété de β-interpolation.

19. PROPOSITION : Si $\mathcal{T}^*E$ possède la propriété de β-interpolation pour tout (I,α)-ensemble $E = \coprod_{u\in U} I^{K_u}$ dans E et si $\alpha = \beta$, alors A possède des sommes amalgamées.

<u>Démonstration</u> : Soient E_o, E_1, E_2, E_3, $\mathcal{T}^*E_o, \dots, \mathcal{T}^*E_3$ et $\mathcal{M}_o, \dots, \mathcal{M}_3$ comme indiqué dans 16, lemme 3. Tout ce qu'il nous fait montrer est que $\mathcal{M}_o = \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{T}^*E_o = \mathcal{M}_2 \cap \mathcal{T}^*E_o$ entraine $\mathcal{M}_j = \mathcal{M}_3 \cap \mathcal{T}^*E_j$ pour $j = 1,2$. Evidemment $\mathcal{M}_j \subset \mathcal{M}_3 \cap \mathcal{T}^*E_j$. Supposons, par exemple, $a \in \mathcal{M}_3 \cap \mathcal{T}^*E_1$. Nous voulons montrer que $a \in \mathcal{M}_1$. Comme dans 16, lemme 3, nous désignons par E le (I_3,α)-ensemble $\coprod_{u\in U} I_3^{K_u}$ muni de sa $(I_3,)$-structure naturelle et nous identifions $\mathcal{T}^*E_j$ à la $(X_j \cup C_j, \alpha, \beta)$-sous-algèbre de $\mathcal{T}^*E$ engendrée par E_j ; $j = o,1,2,3$. Nous savons que a est majoré par un élément de la forme $\bigvee_{u\in V} \exists K_u \sigma_u a_u$ où $|V| < \alpha$, $K_u \subset X_3$, $|K_u| < \beta \sigma_u \in I_{3X_3}$, $a_u \in \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$. Comme $X_3 \cap C_1 = X_3 \cap C_2 = \emptyset$ et comme $\alpha = \beta$, pour $a_u \in \mathcal{M}_j$ il existe $b_u \in \mathcal{M}_j$.avec $\exists K_u \sigma_u a_u \leqslant b_u$ et C_j supporte b_u dans $\mathcal{T}^*E$. Donc il existe $a_1 \in \mathcal{M}_1$ et $a_2 \in \mathcal{M}_2$ tels que $a \leqslant a_1 \vee a_2$ et que a_j possède un $\nearrow\alpha$-support $J_j \subset C_j$ pour la (I_3,α,β)-structure de $\mathcal{T}$ E pour $j = 1,2$. Ceci entraine $b = a\, a_1' \leqslant a_2$ et $b \in \mathcal{T}^*E_1$, avec un $\nearrow\alpha$-support $J \subset X_1$. nécessairement $|J - J_2| < \beta = \alpha$ et en appliquant l'hypothèse, nous obtenons $a_o \in \mathcal{T}^*E$ qui soit supporté par $J \cap J_2 \subset C_1 \cap C_2$, appartienne à la (I_3,α,β)-sous-algèbre de $\mathcal{T}^*E$ engendrée par E_o et qui vérifie $b \leqslant a_o \leqslant a_2$. Comme $a_o \in \mathcal{T}^*E_o$ et $a_o \in \mathcal{M}_2$, nous avons $a \leqslant b\; a_1 \leqslant a_o\; a_1 \in \mathcal{M}_1$, c'est-à-dire $a \in \mathcal{M}_1$ ce que nous devions montrer.

COROLLAIRE : si $\alpha = \beta$, alors $\mathcal{A}$ possède des sommes amalgamées si etseule seulement si pour tout (I,α)-ensemble $E = \coprod_{u\in U} I^{K_u}$ dans E, $\mathcal{T}^*E$ possède la propriété d'interpolation.