ACHILLE ACHACHE

Discrétude, liberté et liberté bornologique

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1969, tome 6, fascicule 1
, p. 67-72
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1969__6_1_67_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1969 t. 6-1

DISCRETUDE, LIBERTE ET LIBERTE BORNOLOGIQUE

par A. ACHACHE

Dans la partie I, nous introduisons la notion de f-discrétude par rapport à une fermeture f d'un treillis gauche E ; nous introduisons, pour un treillis complet E, les notions de fermeture héréditaire et de A-fermeture ; nous établissons, notamment, enfin, que, si E est l'ensemble $\mathfrak{P}(e)$ des parties d'un ensemble e, les notions de f-discrétude et de f-liberté coïncident. Dans la partie II, nous appliquons les résultats obtenus à certaines fermetures topologiques ; nous introduisons, pour cela la notion de fermeture surtopologique ; si E = $\mathfrak{P}(e)$, nous introduisons la notion de fermeture bornologique ; la notion de finitude apparaît notamment alors comme un cas particulier de la notion de liberté bornologique.

Les démonstrations sont concises, ou même laissées au lecteur. La terminologie et les notations employées sont celles de (1) (à ceci près que l'expression "ensemble réticulé à gauche (droite)" est remplacée par "treillis gauche (droit)") Les références renvoient aussi à (1) (où certains énoncés de la partie II restent visiblement valables si E n'est qu'ordonné).

Les précieuses remarques de MM. BRUTER, COMBET, PONASSE et PUPIER ne sont pas étrangères à l'élaboration de ce texte.

I. Discrétude et liberté.

Nous considérons, dans tout ce qui suit, un ensemble ordonné E, nanti d'une fermeture $f(E \longrightarrow E)$. Nous désignons par F l'ensemble f(E) des fermés, par C l'ensemble des f-libres (dont les éléments seront dits f-creux), par L l'ensemble des f-libres, par I l'ensemble des f-indépendants. Remarquons que, pour que l'élément x de E soit à la fois libre et fermé, il faut et il suffit que l'ensemble de ses bases soit $\{x\}$. Notons que, si $f = 1_E$: $E = F = I = L$, et que 1_E est faiblement échangiste ((1)(21)).

1) Cas où E est un treillis gauche.

1. Définition : L'élément d de E est dit f-discret si :

$$n < d \Longrightarrow \exists x \text{ , fermé, tel que } n = d \wedge x.$$

On en déduit aisément que tout minimal est discret ; que tout minorant d'un discret est discret ; qu'un fermé est discret si et seulement si tous ses minorants sont fermés ; que tout discret-fermé est libre ; que tout creux-minimal (i.e. minimal dans C) est discret. Soit D l'ensemble des discrets.

2) Cas où E est un treillis complet.

Notons 0 et e les minimum et maximum ; K l'ensemble des fins. Rappelons que l'ensemble des fermetures (de E) ordonné par $\leqslant$ $(f \leqslant g \Leftrightarrow \forall x \in E, f(x) \leqslant g(x))$, est un treillis complet, de minimum 1_E et maximum $z(z(x) = e)$. Introduisons G défini par : $G = (F-\{e\}) \cup \{o\}$ si $f > 1_E$; $G = E$ si $f = 1_E$. On a : $G \cup e = F \cup o$. Remarquons que : $o \in F \Leftrightarrow G \subsetneq F \Leftrightarrow F = G \cup e$; que $e \in G \Leftrightarrow f = 1_E \Leftrightarrow G = E \Leftrightarrow E = F \Leftrightarrow F = G$; et que 1_E est algébrique (pour 1_E, on a, en outre : $D = I = L = E$).

2. Définitions : 1) La fermeture f est dite héréditaire si : $y \leqslant x \in G \Leftrightarrow y \in G$.

2) Si $A \subseteq E$, on appelle A-fermeture toute fermeture telle que ;

$$(x, a) \in G \times A \Longrightarrow x \vee a \in G.$$

Remarquons que, si $G \subseteq D$, f est héréditaire ; que si f est héréditaire et que $o \in F$: $G \subseteq L$. Notons enfin, que si f est une A-fermeture : $A \subseteq G$.

3) Cas où E est un treillis spécial.

Nous négligeons le cas où $f = 1_E$, sur lequel rien de nouveau ne peut être dit.

3. Théorème : Si E est un treillis spécial où $O<e$; et f une A-fermeture, $> 1_E$, héréditaire, avec $K \subseteq A$ et $O \in F$:

1) $G = L = F-e$; $E-G = f^{-1}(e)$; $D = G \cup C'$ (C' ensemble des minimaux de C)

2) f n'est pas algébrique ; f est faiblement échangiste ; e n'a pas de base ; $I = \emptyset$.

Preuve. 1) On sait déjà que $G \subseteq L$. Soit $x \notin G$; on a : $O<x$; donc, $\exists p$, fin, $>o$, tel que $p \leqslant x$; soit $W(p,o,x) = q$; $p \vee q = x$; s'il existait un élément de G qui majore q, on aurait $q \in G$, donc $p \vee q \in G$, ce qui n'est pas ; donc $f(q) = e = f(x)$; $E-G \subseteq f^{-1}(e)$. Par ailleurs $q<x$: donc x est lié ; donc $L \subseteq G$. Si $u \in G$: $f(u) = u<e$; donc $f^{-1}(e) \subseteq E-G$. On sait déjà que $G \cup C' \subseteq D$; e n'est pas discret, car s'il l'était tous ses minorants seraient fermés, ce qui n'est pas, puisque $C \neq \emptyset$; soit c un creux-non minimal, et soit c' creux $<c$, et x fermé tel que $c' = c \wedge x$, on en tire $f(c') \leqslant f(x)$, d'où $x = e$, et $c' = c$ (contradiction), donc c n'est pas discret.

2) Soit c un point creux ; $\exists p$, fin, $>o$: $p \wedge c = o$; on a : $p \leqslant f(c) = e$; si on avait a fin $\leqslant c$ tel que $p \leqslant a$, on aurait (puisque $p \in F$) : $p \leqslant a \leqslant c$, donc $p \wedge c = p$, donc $p = o$, ce qui n'est pas ; ceci montre que f n'est pas algébrique. Soit k libre $<r$; $\exists p$, fin, $>o$: $k<p \vee k \leqslant r$; donc $k \vee p \in G = L$; donc $]k,r] \cap L \neq \emptyset$; la 2ème implication de (1) (21) est assurée ; donc f est faiblement échangiste. Les générateurs de e sont : les creux et e : aucun n'est libre ; donc e n'a pas de base. En faisant, dans (1)(15), $v = e$, on voit que $I = \emptyset$.

4) Cas où $E = \mathcal{P}(e)$.

O est la partie vide de e. On continue à réservér $\emptyset$ à la partie vide de E.

4. Définition : Un point α d'une partie a de e est dit f-isolé par rapport à a si : $\exists x$ fermé : $\{\alpha\} = d \wedge \complement x$ (i.e. $d-\alpha = x \wedge d$)

5. Proposition : Pour qu'une partie d de e soit discrète, il faut et il suffit que tout point (éventuel) de a soit f-isolé par rapport à d.

Preuve. Soit $\alpha \in d$, discrète ; on a : $d-\alpha < d$. Donc $\exists x$, fermé : $d-\alpha = x \wedge d$.

Réciproquement, supposons que tout point de d soit isolé par rapport à d ;

soit $n < d$ et $s : d-n$; $\forall \alpha \in s$, $\exists$ fermé x_α : $\alpha = d \wedge \complement x_\alpha$; donc $s = \bigvee_{\alpha \in s} \alpha =$
$= \bigvee (d \wedge \complement x_\alpha) = d \wedge \complement x$, où $x = \bigwedge_{\alpha \in s} x_\alpha$ est fermé ; donc $n = d \wedge \complement s = d \wedge \complement (d \wedge \complement x) =$
$= d \wedge x$.

6. Théorème : Une partie de e est discrète si et seulement si elle est libre.

Preuve. Pour $\alpha \in k \leqslant e$, appelons A_α l'ensemble des fermés qui majorent $k-\alpha$.

On a : k libre $\Leftrightarrow \forall \alpha \in k$, $\alpha \notin f(k-\alpha) \Leftrightarrow \forall \alpha \in k$, $\alpha \notin \bigwedge A_\alpha \Leftrightarrow \forall \alpha$, $\exists x \in A_\alpha$, $\alpha \notin x \Leftrightarrow$
$\forall \alpha$, $\exists x$ fermé, $\alpha = d \wedge \complement x \Leftrightarrow \forall \alpha \in k$, α isolé par rapport à k.

Remarque : Il résulte de (6) que, dans (3) $C' = \emptyset$ (pour $E = \mathcal{P}(e)$).

7. Proposition : Toute A-fermeture héréditaire telle que $K \subseteq A$ et $0 \in F$, est échangiste ((1)(41)).

Preuve. Soient $(\alpha, \beta) \in e^2$ et $x \in E$ tels que $\alpha \in f(x \vee \beta)$. Si $x \in G$ et que $\alpha \notin f(x)$, on en tire : $\alpha \notin x$, et : $\alpha = \beta = f(x \vee \alpha)$. Si $x \notin G$: $\alpha \in f(x) = e$. L'implication (1)(41) est assurée.

II. Applications aux fermetures topologiques.

1) Cas où E est un treillis droit.

8. Définition : Une fermeture f d'un treillis droit E est dite topologique si, quelle que soit la partie finie P de F, le supremum de P est fermé.

2) Cas où E est un treillis complet.

9. Définition : Une fermeture f d'un treillis complet E est dite surtopologique si, quelle que soit la partie finie P de G, le supremum de P appartient à G. et si, $0 \in F$. Il est clair que toute fermeture surtopologique est topologique

10. Lemme. Si $A \subseteq E$, une fermeture surtopologique héréditaire est une A-fermeture si et seulement si : $A \subseteq G$.

11. Définition : On appelle bornologie de E toute partie B de E telle que

1) $a \leq b \in B \Longrightarrow a \in B$

2) $K \subseteq B$

3) P finie $\subseteq B \Longrightarrow \vee P \in B$.

Soit $\mathfrak{B}$ l'ensemble des bornologies de E (il a pour maximum E).

12. Proposition : Etant donnée une bornologie B, l'ensemble des B-fermetures surtopologiques et héréditaires est anti-isomorphe à la partie $[B,E]$ de $\mathfrak{B}$.

Preuve. On définit une application vers $[B,E]$ de l'ensemble des fermetures considérées, en attachant à une telle fermeture f, la partie G associée. On voit aisément que cette application est une bijection, et qu'elle est décroissante ainsi que sa réciproque.

3) Cas où $E = \mathcal{P}(e)$.

13. Lemme : L'ensemble $\mathfrak{B}$ est un treillis complet, de minimum K et de maximum E.

14. Définition : On appelle fermeture bornologique de $E = \mathcal{P}(e)$ toute K-fermeture surtopologique et héréditaire. Soit Φ l'ensemble des telles fermetures.

Φ est donc un treillis complet anti-isomorphe à $\mathfrak{B}$, de minimum 1_E, de maximum $\phi(\phi(x) = x$ si x est fini ; $\phi(x) = e$ sinon). Soit ω $(B \longrightarrow \Phi)$ l'anti-isomorphisme réciproque de celui dont il était question plus haut, mais où on remplace B par K. Les énoncés (3) et (7) valent.

15. Proposition : Etant donnée une bornologie quelconque G, la fermeture bornologique $f(= \omega(G))$ associée est échangiste, et l'ensemble L des parties f-libres coïncide avec G. De plus :

1) Si G = E, f est algèbrique et I = E.

2) Si $G \subset E$, f n'est pas algèbrique, $E-G = C \cup e = f^{-1}(e)$ et $I = \emptyset$.

16. Cas particulier 1. $\phi = \omega(K)$. L'ensemble des parties ϕ-libres de e est K (de sorte que la notion de finitude apparait comme un cas particulier

de la notion de liberté bornologique). Les parties ϕ-creuses sont les parties infinies autres que e (s'il y en a).

17. Cas particulier 2. Soit Λ l'ensemble des ordres totaux sur e.

1) L'ensemble des parties de e bien ordonnées par $\lambda \in \Lambda$ (pour l'ordre induit) est une bornologie. Les parties creuses sont alors les parties non-bien-ordonnées, autres que e.

2) Soit $\sigma(\Lambda \longrightarrow \mathcal{B})$ l'application qui, à $\lambda \in \Lambda$, associe la bornologie précédente. Les fermetures 1_E et ϕ appartiennent toutes deux à la partie $\Delta = (\omega_\circ\sigma)(\Lambda)$ de Φ.

Preuve de 2). D'après l'axiome de Zermelo, on peut munir e d'un bon ordre ζ. On a alors $\sigma(\zeta) = E$. Et $(\omega_\circ\sigma)(\zeta) = \omega(E) = 1_E$. Donc $1_E \in \Delta$.

Soit ε l'ordre opposé de ζ: toute partie non vide de e a un maximum pour ε; Soit x une partie infinie de e. Soit $\alpha_\circ$ le ε-maximum de x. Soit α_1 le ε-maximum de $x-\alpha_\circ$: $\alpha_\circ > \alpha_1$. Soit α_2 le ε-maximum de $(x-\alpha_\circ)-\alpha_1$. Etc... La partie $\{\alpha_\circ, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ de x n'a pas de minimum. Donc x n'est pas bien-ordonnée (pour ε). Il en résulte que toute partie bien ordonnée (par ε) est finie. Comme par ailleurs, $\sigma(\varepsilon) \supseteq K$, on a : $\sigma(\varepsilon) = K$, de sorte que $(\omega_\circ\sigma)(\varepsilon) = \omega(K) = \phi \in \Delta$.

Problème. Etudier l'ensemble Δ. Sa nature semble liée à l'axiome de Zermelo.

BIBLIOGRAPHIE

(1) A. ACHACHE : Sur la génération. Pub. Dép. Math. Lyon. t.5 f. 2 (1968) pp. 57-72.

(2) G. BIRKHOFF : Lattice theory. A.M.S. Colloquium (1964).

(3) H. BUCHWALTER : Espaces vectoriels bornologiques. Pub Dép. Math. Lyon t. 2 f. 1 (1965) pp. 2-53.

Manuscrit remis le 31 mars 1969.

A. ACHACHE
Maître-assistant - Dép. de Math.
43, bd du 11 nov. 1918 - VILLEURBANNE