J. M. BRAEMER

Classes caractéristiques des fibrés vectoriels

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1969, tome 6, fascicule 2
, p. 119-129
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1969__6_2_119_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1969 t 6-2

CLASSES CARACTERISTIQUES DES FIBRES VECTORIELS

J. M. BRAEMER

0 - Introduction : Dans [1] A. Grothendieck développe une théorie axiomatique des classes de Chern, valable en particulier pour les fibres vectoriels algèbriques sur une variété algèbrique non singulière. Il indique par ailleurs que la théorie redonne une théorie élémentaire des classes caractéristiques des fibrés vectoriels sur des espaces paracompacts (sur lesquels existe un théorème de classification homotopique des fibrés vectoriels). C'est le travail que l'on s'est proposé de faire ici.

1 - Rappels et notations.

Nous utilisons les notations de [2] : le corps de base k et $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; c'est un entier tel que $c = 1$ si $k = \mathbb{R}$, $c = 2$ si $k = \mathbb{C}$. L'anneau des coefficients est $\Lambda_1 = \mathbb{Z}_2$ si $k = \mathbb{R}$ et $\Lambda_2 = \mathbb{Z}$ si $k = \mathbb{C}$.

Soit $\xi = (E,p,B)$ un k-fibré vectoriel de rang n, on note s_0 sa section nulle et E_0 le complémentaire de $s_0(B)$ dans E.

Soit $U_\xi \in H^n(E,E_0;\Lambda_c)$ la classe fondamentale du fibré ξ ; l'application $\Phi_\xi : H^i(B;\Lambda_c) \longrightarrow H^{i+n}(E,E_0 . \Lambda_c)$ définie par

$$\Phi_\xi(x) = U_\xi \cup p^*(x)$$

est un isomorphisme pour tout $i \geq 0$ (isomorphisme de Thom), et l'élément :

$$\chi_\xi = \Phi_\xi^{-1}(U_\xi \cup U_\xi) \in H^n(B;\Lambda_c)$$

s'appelle la classe d'Euler du fibré .

Cette classe d'Euler vérifie les propriétés suivantes :

- elle est fonctorielle : i.e. Si $f : A \longrightarrow B$ est une application continue

$$f^*(\chi_\xi) = \chi_{f^*\xi}$$

- elle est additive : i.e. pour toute suite exacte scindée $0 \longrightarrow \xi' \longrightarrow \xi \longrightarrow \xi" \longrightarrow 0$ de fibrés vectoriels,

$$\chi_\xi = \chi_{\xi'} \smile \chi_{\xi''}$$

Rappelons enfin que la classe d'Euler d'un fibré trivial de rang $n>0$ est nulle.

2 - Fibré projectif, fibré des drapeaux :

Dans tout ce qui suit $\xi = (E,p,B)$ est un k-fibré vectoriel de rang n dont la base B est supposée paracompacte. $G\ell(1,k) \approx k^*$ (groupe multiplicatif $k-\{o\}$) opère librement dans E_o ; soit $\Pi : E_o \longrightarrow P(E)$ la fibration principale associée, de groupe structural k^*. $p_o = p_{|E_o}$ se factorise alors en une application continue

$$f_1 : P(E) \longrightarrow B$$

qui est un fibré localement trivial de fibre $P_{n-1}(k)$ appelé fibré projectif associé à ξ et noté $P\xi$. Si B est paracompact il en est de même de $P(E)$.

Soit $f_1^*\xi = f_1^*E \rightarrow P(E)$ l'image réciproque du fibré ξ par f_1, et soit d'autre part $\lambda_\xi = (L(E),\lambda,P(E))$ le fibré en ligne déduit du fibré principal $(E_o,\Pi,P(E))$ par adjonction de la fibre k. L'application qui à la classe modulo k^* de $(x,\alpha) \in E_o \times k$ fait correspondre $\alpha\, x \in E_{p(x)}$ définit un morphisme de fibrés vectoriels

$$\begin{array}{ccc} L(E) & \longrightarrow & E \\ \lambda \downarrow & & \downarrow p \\ P(E) & \xrightarrow{f_1} & B \end{array}$$

et il existe donc un morphisme canonique de fibrés vectoriels de base $P(E)$:

$$\begin{tikzcd} L(E) \arrow[r] \arrow[dr, "\lambda"'] & f_1^*E \arrow[d] \\ & P(E) \end{tikzcd}$$

qui est un monomorphisme et qui permet d'identifier λ_ξ au sous-fibré canonique de rang 1 de $f_1^*\xi$ dont la fibre en un point $d \in P(E)$ (au-dessus du point $b \in B$) est la droite d dans E_b.

Puisque P(E) est paracompact, la suite exacte associée

$$0 \longrightarrow \lambda_\xi \longrightarrow f_1^*\xi \longrightarrow \xi^{(1)} \longrightarrow 0$$

est scindiée et le fibré quotient $\xi^{(1)} = (E^{(1)}, p_1, P(E))$ de $f_1^*\xi$ par λ_ξ est un k-fibré vectoriel de rang n-1 sur P(E). Posons $P(E) = B^{(1)}$. Par récurrence, on construit ainsi pour tout i $(o \leq i \leq n)$ un fibré $\xi^{(i)} = (E^{(i)}, p_i, B^{(i)})$ de rang n-i $B^{(i)}$ étant l'espace total du fibré projectif associé à $\xi^{(i-1)}$. $\xi^{(o)} = \xi$ et $\xi^{(n)}$ est l'identité de $P(E^{(n-1)})$. On pose $D(E) = B^{(n)}$ c'est l'espace des drapeaux de ξ.

$$\begin{tikzcd} & E^{(n-1)} \arrow[d, "p_{n-1}"] & & E^{(1)} \arrow[d, "p_1"] & E \arrow[d, "p"] \\ D(E) \arrow[r, "f_n"] & B^{(n-1)} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & B^{(1)} \arrow[r, "f_1"] & B \end{tikzcd}$$

Posons $f^i = f_{i+1} \circ \ldots \circ f_n \ : D(E) \longrightarrow B^{(i)}$, et $f^\circ = f$.

On dit qu'un k-fibré vectoriel de rang n, ξ est complètement scindé s'il est muni d'une suite de sous-fibrés $(\xi_i)_{o \leq i \leq n}$ (avec $\xi_p = \xi$) de rang i. Alors, pour tout $o \leq i \leq n-1$, le quotient ξ_{i+1}/ξ_i est un fibré en lignes appelé facteur du scindage de ξ. Si donc $\xi = (E,p,B)$ est un k-fibré vectoriel de rang n, les fibrés $f^{i*}\xi^{(i)} = \xi_i = (E_i, \Pi_i, D(E))$ forment un scindage complet de fibré $f^*\xi = (E, \Pi, D(E))$ de rang n sur D(E). Notons enfin que D(E) est paracompact si B l'est.

3 - Cohomologie du fibré projectif :

Soit donc $\xi = (E,p,B)$ un K-fibré vectoriel de rang n, et soit $\bar{\lambda}_\xi$ le fibré conjugué du sous-fibré canonique de rang 1 de $f_1^*\xi$

On pose $$a_\xi = \chi_{\bar{\lambda}_\xi} \in H^c(P(E)\ ;\ \Lambda_c)$$

Notons d'autre part que, grâce à l'homomorphisme

$$f_1^* : H^*(B\ ;\ \Lambda_c) \longrightarrow H^*(P(E),\ \Lambda_c)$$

associé à la projection canonique $f_1 : P(E) \longrightarrow B$, $H^*(P(E),\ \Lambda_c)$ est muni d'une structure de $H^*(B)$ - module à gauche. Alors

Théorème 1 : 1) - Les éléments $(a_\xi^i)_{0 \leq i \leq n-1}$ *forment une base du* $H^*(B)$ *- module* $H^*(P(E))$.

2) - L'application f_1^* *est injective.*

Cela résulte du théorème de Leray-Hirsch. (Voir par exemple [3] p. 258)

En effet rappelons tout d'abord que si γ_1 est le fibré en lignes canonique universel sur $P_\infty(K)$ (resp. $P_{n-1}(K)$), et χ_{γ_1} la classe d'Euler de ce fibré, $H^*(P_\infty(K)\ ;\ \Lambda_c)$ (resp. $H^*(P_{n-1}(K))$) est l'algèbre polynominale (resp. l'algèbre polynominale tronquée au rang n-1).

$\Lambda_c[\chi_{\gamma 1}]$ engendré par $\chi_{\gamma 1} \in H^c(P_\infty(K)\ ;\ \Lambda_c)$ (resp. $H^c(P_{n-1}(K)\ ;\ \Lambda_c)$).

Soit d'autre part $g : P(E) \longrightarrow P_\infty(K)$ l'application classifiante du fibré $\bar{\lambda}_\xi$ (g est définie et unique à une homotopie près) ;

alors $$a_\xi = g^*(\ \chi_{\gamma 1}).$$

Si $j_b : P_b(E) \approx P_{n-1}(K) \hookrightarrow P(E)$ et l'injection canonique pour $b \in B$, on remarque que $g^* \circ j_b^*(\gamma_1)$ est à un isomorphisme près le fibré dual du fibré canonique de rang 1 sur $P_{n-1}(K)$. Il en résulte que, à un automorphisme près de $P_{n-1}(K)$,

$g\circ j_b$ est homotope à l'injection canonique de $P_{n-1}(K)$ dans $P_\infty(K)$. On en déduit une extension cohomologique.

$$g^* : H^*(P_{n-1}(K)) \longrightarrow H^*(P(E))$$

et comme $H^*(P_{n-1}(K))$ est libre et de type fini sur Λ_c, il résulte du théorème de Leray-Hirsch que l'homomorphisme canonique

$$\phi^* : H^*(B) \otimes H^*(P_{n-1}(K)) \longrightarrow H^*(P(E))$$

défini par $\quad \phi^*(u \otimes v) = f_1^*(u) \cup g^*(v)$

est un isomorphisme ; comme les éléments $1, \chi_{\gamma 1}, \ldots, \chi^{n-1}_{\gamma 1}$ forment une base du Λ_c - module $H^*(P_{n-1}(K))$, les éléments $1, a_\xi, \ldots, a_\xi^{n-1}$ forment une base du $H^*(B)$-module $H^*(P(E))$, (puisque $a_\xi = g^*(\chi_{\gamma 1})$).

4 - Classes de Stiefel-Whitney. Classes de Chern

Nous reprenons ici les notations des paragraphes précédents ; de plus si $x \in H^*(B)$ et si $a \in H^*(P(E))$, nous noterons

$$xa = f_1^*(x) \cup a$$

la structure de $H^*(B)$ - module sur $H^*(P(E))$. Cela dit il résulte du théorème 1 qu'étant donné un K-fibré vectoriel de rang n, $\xi = (E, p, B)$ il existe une unique famille d'éléments homogènes $x_i(\xi) \in H^{ci}(B ; \Lambda_c)$ telle que

$$\sum_{i=o}^{n} x_i(\xi)\, a_\xi^{n-i} = 0$$

avec $x_o(\xi) = 1$ et $x_i(\xi) = o$ pour $i>n$.

On pose alors $\quad x(\xi) = \sum_{i=o}^{n} x_i(\xi)$.

<u>Dans le cas réel</u> les éléments $x_i(\xi)$ se notent $W_i(\xi) \in H^i(B,\mathbb{Z}_2)$ et s'appellent <u>les classes de Stiefel-Whitney du fibré</u> ξ ;

$$W(\xi) = \sum_{i=0}^{n} W_i(\xi)$$

est la classe (totale) de Stiefel-Whitney de ξ.

<u>Dans le cas complexe</u> les éléments $x_i(\xi)$ se notent $C_i(\xi) \in H^{2i}(B;Z)$ et s'appellent <u>les classes de Chern du fibré</u> ξ;

$$C(\xi) = \sum_{i=0}^{n} C_i(\xi)$$

est la classe (totale) de Chern de ξ.

Les propriétés fondamentales des classes de Stiefel-Whitney et des classes de Chern peuvent s'énoncer en un théorème unique dans lequel nous reprenons les notations du début de ce paragraphe :

<u>Théorème 2</u> : Soit $\xi = (E,p,B)$ *un* k*-fibré vectoriel de rang* n.

a) Si $u : A \longrightarrow B$ *est une application continue,*

$$x(u^*\xi) = u^*(x(\xi)) \qquad \text{– (fonctorialité)}$$

(en particulier si ξ *et* η *sont deux fibrés isomorphes sur* B

$$x(\xi) = x(\eta)).$$

b) Si $n = 1$ *(i.e. si* ξ *est un fibré en lignes)*

$$x(\xi) = 1 + \chi_\xi \qquad \text{(normalité)}$$

(en particulier $\chi_\xi = x_1(\xi)$*).*

c) Pour toute suite exacte (et scindée puisque B *est supposé paracompact) de fibrés vectoriels sur* B

$$0 \longrightarrow \xi' \longrightarrow \xi \longrightarrow \xi'' \longrightarrow 0$$

$$x(\xi) = x(\xi') \cup x(\xi'') \qquad \text{(additivité)}$$

(i.e. $x_k(\xi) = \sum_{i+j=k} x_i(\xi') \cup x_j(\xi'')$)

d) Enfin les propriétés a), b) et c) ci-dessus caractérisent entièrement les classes de Stiefel-Whitney (resp. de Chern.)

On prouve d'abord l'assertion d) : soit donc D(E) l'espace des drapeaux du fibré ξ et $f : D(E) \longrightarrow B$ la projection canonique. Il résulte de manière évidente du théorème 1 que

$$f^* : H^*(B,\Lambda_c) \longrightarrow H^*(D(E),\Lambda_c)$$

est une injection ; par conséquent $s(\xi)$ sera parfaitement déterminée si l'on connaît $f^*(x(\xi))$. Or en vertu de

a) $$f^*(x(\xi)) = x(f^*(\xi))$$

et on se ramène à démontrer l'assertion pour un fibré complètement scindé. Soit donc $(\xi_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

le scindage canonique de $f^*\xi$: par récurrence, c) montre

$$x(\xi) = x(\xi/\xi_1)\cup \dots \cup x(\xi_{n-1})$$

et b) montre alors que

(4.1) $$x(\xi) = (1+\chi_{\xi/\xi_1})\cup \dots \cup(1+\chi_{\xi_{n-1}}) .$$

formule qui donne d'une manière générale la classe de Stiefel-Whitney (resp. de Chern) d'un fibré complètement scindé en fonction des classes d'Euler des facteurs du scindage.

Montrons a) : notons $u^*\xi = (u^*E,q,A)$ l'image réciproque de ξ par u. Il est alors clair que $P(u^*\xi) = u^*(P\xi)$ de sorte que l'on a un morphisme cartésien

$$\begin{tikzcd} P(u^*E) \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & P(E) \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "u"] & B \end{tikzcd}$$

on remarque par ailleurs que $v^{*}(\overline{\lambda_{\xi}}) = \overline{\lambda_{u^{*}\xi}}$

par conséquent $\chi_{\overline{\lambda_{u^*\xi}}} = v^{*}(\chi_{\overline{\lambda_{\xi}}})$

c'est-à-dire $a_{u^*\xi} = v^{*}(a_{\xi})$.

La relation a) $x_i(u^*\xi) = u^*(x_i(\xi))$

est trivialement vérifiée pour $i = 0$ et $i>n$ et il suffit donc de la vérifier pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Or on a par définition

$$\sum_{i=0}^{n} f^{*}(x_i(\xi)) \cup a_{\xi}^{n-1} = 0$$

en appliquant v^{*}, et les relations ci-dessus, il vient

$$\sum_{i=0}^{n} g^{*}(u^{*}(x_i(\xi))), \; a_{u^*\xi}^{n-i} = 0$$

ce qui est bien la relation a).

Avant d'achever la démonstration du théorème, il est bon de rappeler les résultats suivants : Soit B un espace topologique et $L_k(B)$ l'ensemble des classes d'isomorphie de k-fibrés en lignes sur B. On vérifie alors que le produit tensoriel des fibrés définit sur $L_k(B)$ une structure de groupe abélien pour laquelle, l'élément neutre est la classe du fibré trivial Θ_1 et l'inverse d'un fibré en lignes ξ est le fibré conjugué $\bar{\xi}$. Alors :

Proposition 3 : L'application

$$\chi : L_k(B) \longrightarrow H^c(B, \Lambda_c)$$

définie par $\chi(\mathrm{cl}(\chi)) = \chi_{\xi}$ *est un isomorphisme de groupes abéliens.*

En effet, si γ_1 est le fibré en lignes canonique (1-universel) le théorème de classification homotopique des fibrés vectoriels montre que l'application $[f] \longrightarrow f^{*}\gamma_1$ de l'ensemble $[B, P_{\infty}(k)]$ des classes d'homotopie d'applications continues de X dans $P_{\infty}(k)$ dans $L_k(B)$. Par transport de structure, $[B, P_{\infty}(k)]$ est donc muni d'une structure de groupe abélien isomorphe à $L_k(B)$, ce qui détermine sur $P_\infty(k)$ une structure de H-espace. Mais, $P_\infty(k)$ est un espace d'Eilenberg-MacLane de type $k(\Lambda_c,c)$ est peut être, à ce titre, muni d'une seule structure de H-espace et comme χ_{γ_1} est un générateur de l'algèbre polynomiale $H^*(P_\infty(k),\Lambda_c)$, l'application $[f] \longrightarrow \chi_{f^*\gamma_1}$ est un isomorphisme de $[B,P_\infty(k)]$ sur $H^c(B;\Lambda_c)$, fonctoriel en B, d'où la proposition.

Nous sommes alors en mesure de démontrer les assertions b) et c) du théorème 2 :

Montrons b) : Si ξ est un fibré en lignes, il est clair que $P(E) = B$ et que $\lambda_\xi = \xi$ par conséquent, en vertu de la proposition 3, $a_\xi = -\chi_\xi$ et l'on a par définition

$$a_\xi + x_1(\xi) = 0$$

soit $$x_1(\xi) = -a_\xi = \chi_\xi \quad .$$

Montrons enfin c) : soit donc $0 \longrightarrow \xi' \longrightarrow \xi \longrightarrow \xi'' \longrightarrow 0$ une suite exacte de fibrés de base B ($\xi' = (E',p',B'), \xi = (E,p,B)$, $\xi'' = (E'',p'',B'')$). Notons P le produit fibré sur B de l'espace des drapeaux $D(E')$ de ξ' et de l'espace des drapeaux $D(E'')$ de ξ'' :

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d] & D(E'') \arrow[d, "f''"] \\ D(E') \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

de la transitivité du produit fibré il résulte que P s'identifie à l'espace des drapeaux du fibré $f'^*\xi''$. Si $g : P \longrightarrow B$ est la projection canonique;

$$g^* : H^*(B;\Lambda_c) \longrightarrow H^*(P;\Lambda_c)$$

est une injection (théorème 1); il suffit donc de montrer que

$$g^*(x(\xi)) = g^*(x(\xi')) \cup g^*(x(\xi''))$$

ce qui en vertu de a) revient à rpouver la formule d'additivité pour la suite exacte

$$0 \longrightarrow g^*\xi' \longrightarrow g^*\xi \longrightarrow g^*\xi'' \longrightarrow 0$$

On se ramène donc au cas où les fibrés ξ' et ξ'' sont complètement scindés. Dans ce cas, les scindages de ξ' et ξ'' définissent un scindage de ξ : $\xi'\otimes\xi''_1$, $\xi'_1\otimes\xi''_1$, $\xi'_1\otimes\xi''_2$, etc... dont les facteurs sont évidemment :

$$\xi''/\xi''_1 \quad , \quad \xi/\xi'_1 \quad , \quad \xi''_1/\xi''_2 \quad , \quad \xi'_1/\xi'_2 \ ; \ \text{etc...}$$

et c) sera démontré si l'on a démontré la formule (4.1) pour chacun des scindages de ξ', ξ et ξ''. On se ramène donc en définitive à démontrer la formule (4.1) pour un fibré complètement scindé ξ. Pour ce fait on établit d'abord le lemme suivant :

<u>Lemme 4</u> : *Si ξ est un fibré vectoriel de rang n se scindant complètement, et si ξ admet une section qui ne s'annule pas, alors :*

$$\chi_{\xi/\xi_1} \cup \chi_{\xi_1/\xi_2} \cup \cdots \cup \chi_{\xi_{n-1}} = 0$$

En effet le produit ci-dessus n'est autre que la classe d'Euler χ_ξ (par additivité).

Montrons donc la formule (4.1) : de la suite exacte

$$0 \longrightarrow \lambda_\xi \longrightarrow f_1^*\xi \longrightarrow \xi^{(1)} \longrightarrow 0$$

on déduit la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \bar{\lambda}_\xi\otimes\lambda_\xi \longrightarrow \bar{\lambda}_\xi\otimes f_1^*\xi \longrightarrow \bar{\lambda}_\xi\otimes\xi^{(1)} \longrightarrow 0$$

mais $\bar{\lambda}_\xi\otimes\lambda_\xi \simeq \theta_1$ est trivial et par conséquent le fibré $\bar{\lambda}_\xi\otimes f_1^*\xi$ admet une section qui ne s'annule pas.

Soit $(\zeta_i)_{1\leq i\leq n}$ le scindage de $f_1^*\xi$ déduit par image réciproque de celui de ξ (i.e. $\zeta_i = f_1^*\xi_i$). On en déduit un scindage $(\bar{\lambda}_\xi\otimes\zeta_i)_{1\leq i\leq n}$ de $\bar{\lambda}_\xi\otimes f_1^*\xi$ et si l'on pose $\eta_i = \bar{\lambda}_\xi\otimes\zeta_i$, on a :

$$\chi_{\eta_i/\eta_{i+1}} = a_\xi + \chi_{\zeta_i/\zeta_{i+1}} \qquad \text{(Proposition 3).}$$

et il résulte alors du lemme 4 que

$$\prod_{i=1}^{n} (a_\xi + \chi_{\zeta_i/\zeta_{i+1}}) = 0$$

ce qui montre bien que les $x_i(\xi)$ sont les fonctions symétriques élémentaires en les $\chi_{\xi_i/\xi_{i+1}}$ d'où la formule (4.1) et le théorème 2; dont on peut tirer un certain nombre de corollaire classiques tels que :

Corollaire 5 : Si ξ est un fibré de rang n

$$x_n(\xi) = \chi_\xi$$

Corollaire 6 : Si ξ est un fibré trivial de rang n

$$x_i(\xi) = 0 \text{ pour } i>0$$

Corollaire 7 : Si ξ et η sont deux fibrés vectoriels de base B, *stablement isomorphes*

$$x(\xi) = x(\eta)$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. GROTHENDIECK : La théorie des classes de Chern. Bull. S.M.F. tome 85 (1957)

[2] D. HUSEMOLLER : Fiber Dundles. Mac Graw Hill.

[3] E.H. SPANIER : Algebraic Topology. Mac Graw Hill.

Manuscrit remis le 30 mai 1969

J.M. BRAEMER
Assistant
Département de Mathématiques
Faculté des sciences
43, bd du 11 novembre 1918
VILLEURBANNE