PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

R. PUPIER

La complétion universelle d'un produit d'espaces complètement réguliers

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1969, tome 6, fascicule 2
, p. 75-84

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1969__6_2_75_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1969 t. 6-2

LA COMPLETION UNIVERSELLE D'UN PRODUIT D'ESPACES COMPLETEMENT REGULIERS

R. PUPIER

On donne ici l'essentiel des démonstrations de résultats énoncés dans une note aux comptes-rendus ([9]) ; on utilise systématiquement le fait bien connu, que pour un espace localement compact Y, il existe une bijection naturelle entre les ensembles $C(X\times Y,Z)$ et $C(X,C_c(Y,Z))$, où $C_c(Y,Z)$ est muni de la topologie compacte-ouverte, et X et Z sont des espaces topologiques arbitraires. On notera $\mathcal{C}$ la catégorie des espaces topologiques et $\mathcal{CR}$ celle des espaces complètement réguliers (séparés). Par ailleurs C(X) désignera toujours l'algèbre des fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$.

1. La sous-catégorie $\mathcal{CR}$ est réflective dans $\mathcal{C}$.

C'est exactement ce qu'exprime le théorème 3.9 de [6]. Il est cependant intéressant d'étudier l'espace complètement régulier associé à un espace X. On peut, par exemple, l'obtenir de la façon suivante : la construction du "compactifié" de Stone-Čech, entre autre au moyen de l'espace des caractères de l'algèbre de Banach $C^\infty(X)$, n'exige pas que X soit complètement régulier ; mais alors l'application canonique $X \longrightarrow \beta X$ est seulement continue (cf. [7], lemme 4.5). On notera ρX l'image de $X \longrightarrow \beta X$. Alors $X \longmapsto \rho X$ définit un foncteur $\rho : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{CR}$, adjoint à gauche au foncteur injection $\iota : \mathcal{CR} \longrightarrow \mathcal{C}$. On note $g \longmapsto g^\rho$ la bijection naturelle de C(X) sur $C(\rho X)$.

Les conséquences classiques d'une adjonction pourront donc être exploitées chaque fois qu'il sera utile. On retrouve ainsi une situation courante en topologie : bien que, pour deux espaces X et Y, le produit $\rho X\times\rho Y$ soit complètement régulier il n'est pas, en général, homéomorphe à $\rho(X\times Y)$.

1.1. <u>*Proposition*</u> *: Soient* X *un espace topologique et* Y *un espace complètement régulier ; les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) il existe une surjection continue $p : X \longrightarrow Y$, *telle que l'application* $f \mapsto p \circ f$ *de* $C(Y)$ *dans* $C(X)$ *soit une bijection ;*

b) l'espace Y *est homéomorphe à* ρX.

Il suffit de montrer l'implication a) $\Longrightarrow$ b) ; or il existe une unique application continue $p' : \rho X \longrightarrow Y$, telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "p"] \arrow[dr] & & Y \\ & \rho X \arrow[ur, "p'"'] & \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Comme p est surjective, il en est de même de p' ; soient alors x et x' deux éléments distincts de X ; il existe $g^{\rho} \in C(\rho X)$ telle que $g^{\rho}(x) \neq g^{\rho}(x')$, et $h : Y \longrightarrow \mathbb{R}$, telle que $h \circ p = g$ et évidemment $h \circ p' = g^{\rho}$, ce qui montre que p' est injectif. Enfin la continuité de l'application réciproque de p' résulte immédiatement de la complète régularité de Y.

1.2. <u>*Corollaire*</u> *: Soient* X *un espace topologique et* Y *un espace localement compact ;alors* $\rho(X \times Y) = \rho X \times Y$.

En effet la bijection naturelle rappelée dans l'introduction nous donne les "égalités" suivantes :

$$C(X \times Y) = C(X, C_c(Y)) = C(\rho X, C_c(Y)) = C(\rho X \times Y)$$

car $C_c(Y)$ est complètement régulier ; ainsi la surjection canonique $p : X \times Y \longrightarrow \rho X \times Y$ satisfait à la condition a) de 1.1.

De ce résultat découle des propriétés catégoriques, dont la plus intéressante concerne les limites à droite (inductives) dans la catégorie $\mathcal{CR}$. Pour une petite catégorie $\mathcal{I}$, et un (petit) foncteur $\mathfrak{f} : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{CR}$, les propriétés de l'adjonction (ρ, ι) montrent que la limite à droite de $\mathfrak{f}$ dans la catégorie $\mathcal{CR}$ est l'image par ρ de la limite à droite dans $\mathcal{C}$ de $\iota \circ \mathfrak{f}$:

$$\varinjlim \mathfrak{f} = \rho(\varinjlim \iota \circ \mathfrak{f}).$$

Comme le produit par un espace localement compact commute aux limites à droite dans $\mathcal{C}$, on obtient :

1.3. <u>*Théorème*</u> *: Soit* Π_Y *le foncteur* $X \longmapsto X \times Y$ *de* $\mathcal{CR}$ *dans* $\mathcal{CR}$*, où* Y *est localement compact ; alors :*

$$\Pi_Y(\varinjlim \mathfrak{f}) = \varinjlim \Pi_Y \circ \mathfrak{f}$$

pour tout petit foncteur $\mathfrak{f} : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{CR}$.

En effet, on a :

$$\Pi_Y(\varinjlim \mathfrak{f}) = \Pi_Y \circ \rho(\varinjlim \iota \circ \mathfrak{f}) = \rho(\Pi_Y(\varinjlim \iota \circ \mathfrak{f}))$$

$$= \rho(\varinjlim \iota \circ \Pi_Y \circ \mathfrak{f}) = \varinjlim \Pi_Y \circ \mathfrak{f}.$$

<u>Remarques</u> : 1. Dans les égalités précédentes la catégorie dans laquelle se construit la limite à droite est indiquée par le but du foncteur correspondant.

2. Ce résultat est lié à la notion d'objet convenable dans la catégorie $\mathcal{CR}$ (cf. [10]), et sera repris dans un prochain article.

Rappelons maintenant qu'un espace complètement régulier X est un $k_{\mathbb{R}}$-espace si toute application de X dans R, dont les restrictions aux compacts de X sont continues, est elle-même continue. En d'autres termes, si $\mathcal{K}(X)$ désigne la petite catégorie formée par les compacts de X et les injections canoniques, et si $k(X) : \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathcal{CR}$ est le foncteur injection, alors $X = \varinjlim k(X)$.

1.4. <u>*Proposition*</u> *: Soit* X *un* $k_{\mathbb{R}}$*-espace et* Y *un espace localement compact ; alors* X×Y *est un* $k_{\mathbb{R}}$*-espace.*

On trouvera la démonstration de ce résultat de façon générale dans [10] th. 3.1.

1.5. <u>*Proposition*</u> *: Soit* X *un espace de Kelley séparé, et soit* Y *un espace tel que* ρY *soit localement compact ; alors* $\rho(X\times Y) = \rho X\times\rho Y$.

Il suffit de montrer que $\rho(X\times Y) = \rho(X\times\rho Y)$, car d'après 1.2 $\rho(X\times\rho Y) = \rho X\times\rho Y$. Or toute application continue $f : X\times Y \longrightarrow R$ se prolonge à $X\times\rho Y$ de la façon suivante si C est un compact de X, $f_C : C\times Y \longrightarrow R$ désignant la restriction de f à C×Y, se prolonge, d'après 1.2, en $\bar{f}_C$ à $C\times\rho Y$, et les $\bar{f}_C$ définissent une application continue $\bar{f} : X\times\rho Y \longrightarrow \mathbb{R}$, car $X\times\rho Y$ est un espace de Kelley.

Ceci est en particulier réalisé si ρY est compact (cf. |1| et |11|) et donne entre autre le théorème 7 de [11] .

2. <u>La complétion universelle d'un produit.</u>

Dans toute la suite les espaces sont complètement réguliers (séparés). D'autre part on utilise systématiquement les propriétés du foncteur Θ, de complétion universelle, rappelées dans [2] . On se propose de démontrer le théorème suivant :

2.1. <u>*Théorème*</u> *: Soient* X *un espace complètement régulier et* Y *un espace localement compact, complet pour une structure uniforme compatible ; alors* $\Theta(X\times Y) = \Theta X\times Y$.

Commençons par remarquer que $C_c(Y)$ est complet, donc universellement complet, et que par suite :

$$C(X,C_c(Y)) = C(\Theta X,C_c(Y)).$$

En appliquant le résultat cité en introduction, on obtient une bijection naturelle de $C(X\times Y)$ sur $C(\theta X\times Y)$. Essayons d'en définir les étapes :

a) $C(X\times Y) \longrightarrow C(X,C_c(Y))$: c'est l'application qui à $f : X\times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ fait correspondre l'application $x \longmapsto f_x$, où $f_x(y) = f(x,y)$.

b) $C(X,C_c(Y)) \longrightarrow C(\theta X,C_c(Y))$: cette bijection n'est autre que l'application $g \longmapsto \theta g$ dans le cas particulier

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr, "g"'] & & \theta X \arrow[dl, "\theta g"] \\ & C_c(Y) & \end{tikzcd}$$

c) $C(\theta X,C_c(Y)) \longrightarrow C(\theta X\times Y)$: c'est l'application qui à $h : \theta X \longrightarrow C_c(Y)$ associe $e\circ(h\times 1_Y)$ où e est l'évaluation de $C_c(Y)\times Y$ dans R.

Désignons par s le composé de tous ces ingrédients ; s est la bijection cherchée ; si $f\in C(X\times Y)$, $u\in\theta X$ et $y\in Y$, on a :

$$s(f)(u,y) = u(f_y), \text{ avec } f_y(x) = f(x,y).$$

L'application réciproque r de s n'est autre que la restriction associée à l'injection canonique $X\times Y \longrightarrow \theta X\times Y$, i.e. $r(g) = g|X\times Y$. On vérifie sans trop de peine que r est un morphisme compactologique (cf. [2], 1.1.1) de $C(\theta X\times Y)$ dans $C(X\times Y)$. Reste à montrer la même propriété pour s.

2.2. <u>*Lemme*</u> *: Soient* X *et* Y *deux espaces topologiques et* $H\subset C(X\times Y)$ *une partie équicontinue et simplement bornée ; pour toute partie compacte* C *de* Y, *l'ensemble* $K = \{f_y \mid (f,y)\in H\times C\}$ *est équicontinu et simplement borné dans* $C(X)$.

<u>Preuve</u> : Quels que soient $x\in X$, $y\in C$ et $\varepsilon\in R$, $\varepsilon>0$, il existe un voisinage $V_y\times W_y$ de (x,y) dans $X\times Y$, tel que, pour toute $f\in H$, et tout $(x',y')\in V_y\times W_y$, on ait

$$|f(x,y) - f(x',y')|<\varepsilon.$$

Les W_y forment un recouvrement de C dont on peut extraire un recouvrement fini $W_1,\dots,W_n$; posons $V = \bigcap V_i$, où les V_i correspondent aux W_i , $i = 1,\dots,n$; V est un voisinage de x ; soit $y \in C$, il existe i tel que $y \in W_i$, et par suite pour tout $x' \in V$:

$$|f_y(x') - f_y(x)| \leq |f_y(x') - f_{y_i}(x)| + |f_{y_i}(x) - f_y(x)| < 2\varepsilon,$$

ce qui montre que K est équicontinu.

Par ailleurs, toujours pour $y \in W_i$, on a $|f(x,y) - f(x,y_i)| < \varepsilon$ pour toute f H, et si $M_{xy} = \sup_{f \in H} f(x,y)$, il vient :

$$|f_y(x)| \leq |f_{y_i}(x)| + \varepsilon \leq \max_i M_{xy_i} + \varepsilon = M_x$$

et K est simplement borné.

2.3. Lemme : *Soient* Y *un espace localement compact et* X *un espace complètement régulier ; soit* H *une partie équicontinue et simplement bornée de* $C(X\times Y)$ *; alors* $s(H)$ *est une partie équicontinue et simplement bornée de* $C(\Theta X\times Y)$ *et de plus* $s|H$ *est simplement continue.*

En d'autres termes s est un morphisme compactologique.

Preuve : Tout d'abord s(H) est simplement bornée ; soit $y \in Y$; les fonctions f_y, $f \in H$ forment une partie équicontinue et simplement bornée de C(X) ; si $u \in \Theta X$, il existe $x \in X$, tel que $u(f_y) = f_y(x)$, pour tout $f \in H$, (cf. [2] , 4.3.3) et $|u(f_y)| \leq M_{xy}$.

Soient maintenant $(u,y) \in \Theta X\times Y$ et $\varepsilon > 0$; soit W_1 un voisinage compact de y ; il existe $x \in X$, tel que $u(f_{y'}) = f(x,y')$ pour tout couple $(f,y') \in H\times W_1$ (d'après 2.2 et le résultat déjà cité de [2]). D'autre part il existe un voisinage V de x et un voisinage compact W_2 de y, tels que $|f(x',y') - f(x,y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ pour tous $f \in H$ et $(x',y') \in V\times W_2$. Posons $W = W_1 \cap W_2$ et soit V^Θ le voisinage de $u \in \Theta X$ défini par la partie équicontinue et simplement bornée $K = \{f_{y'} \mid (f,y') \in H\times W\}$ et $\frac{\varepsilon}{2}$; V^Θ est l'ensemble des $u' \in \Theta X$, tels que $|u'(f_{y'}) - u(f_{y'})| < \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $(f,y') \in H\times W$.

Alors si $(u',y')\in V^{\theta}\times W$; on a :

$$|s(f)(u',y') - s(f)(u,y)| = |u'(f_{y'}) - u(f_y)|$$

$$= |u'(f_{y'}) - f(x,y)|$$

$$\leqslant |u'(f_{y'}) - u(f_{y'})| + |f(x,y') - f(x,y)| < \varepsilon.$$

Enfin, soient $f\in H$ et U un voisinage élémentaire de s(f) dans $C(\theta X\times Y)$ muni de la topologie de convergence simple ; U est l'ensemble des $g\in C(\theta X\times Y)$ telles que pour un couple (u,y) donné, et un $\varepsilon>0$, on ait :

$$|g(u,y) - s(f)(u,y)| = |g(u,y) - u(f_y)| < \varepsilon.$$

Toujours d'après le lemme fondamental de [2], il existe $x\in X$ tel que $u(h_y) = h(x,y)$ quel que soit $h\in H$; soit $V(x,y,\varepsilon)$ le voisinage élémentaire de f défini par (x,y) et ε ; si $h\in H\cap V$, on a $|h(x,y) - f(x,y)|<\varepsilon$ et par suite $|u(h_y) - u(f_y)|<\varepsilon$, i.e. $s(h)\in U$.

En appliquant alors le critère de complétion universelle ([2], th. 4.4.5) le théorème 2.1 est démontré.

2.4. <u>*Corollaire*</u> *: Soient* X *un espace complètement régulier et* Y *un espace compact (resp. discret, localement compact et paracompact) ; alors* $\theta(X\times Y) = \theta X\times Y$.

<u>*Proposition*</u> *: Soient* X *un* $k_{\mathbb{R}}$*-espace et* Y *un espace (complètement régulier) dont le complété universel est localement compact ; alors* $\theta(X\times Y) = \theta X\times\theta Y$.

<u>Preuve</u> : Soient Z un espace complètement régulier universellement complet et $f : X\times Y\longrightarrow Z$ une application continue ; pour toute partie compacte C de X, la restriction f_C de f à $C\times Y$ se prolonge en $\bar{f}_C$ à $C\times\theta Y$ d'après le corollaire 2.4. D'après 1.4, les $\bar{f}_C$ définissent une application continue $\bar{f} : X\times\theta Y\longrightarrow Z$ qui prolonge f, et par application du théorème 2.1, $\bar{f}$ se prolonge en $\theta f : \theta X\times\theta Y\rightarrow Z$.

Donnons une première conséquence de ce résultat : dans [4] , W.W. Comfort donne une démonstration élégante du théorème de Tamano ([12]) sur les produits de pseudocompacts ; comme il le remarque lui-même, elle est malheureusement obérée par la condition cardinale. La proposition 2.5 permet d'obtenir ce résultat sous la forme donnée par N. Noble ([8]) :

2.6. *Théorème (Tamano-Noble). Le produit d'un $k_{\mathbb{R}}$-espace pseudocompact et d'un espace pseudocompact est pseudocompact.*

En effet, $\Theta(X\times Y) = \Theta X\times\Theta Y = \beta X\times\beta Y$ et la structure uniforme universelle sur $X\times Y$ est précompacte.

3. Retour sur la replétion.

Les résultats du § 2 généralisent à la complétion universelle les théorèmes correspondants de W.W. Comfort et S. Negrepontis ([4] et [5]) pour la réplétion, et permettent de s'affranchir de la condition de cardinalité non mesurable. Par ailleurs la méthode de démonstration est différente et a été utilisée dans [9] pour prouver directement le théorème fondamental pour la replétion (cor. 2.2. de [4]). On sait que l'existence d'un espace X tel que $\Theta X \neq \upsilon X$ est équivalente à l'existence d'un cardinal mesurable ; on peut cependant espérer que l'égalité $\Theta X = \upsilon X$ peut se produire pour certains types d'espaces sans condition de cardinalité. On en donne ici un exemple et une application.

Soit A une partie de X ; on désigne par $\bar{A}^{\Theta}$ (resp. $\bar{A}^{\upsilon}$) l'adhérence de A dans ΘX (resp. υX).

3.1. *Lemme : Soit $P\subset X$ une partie pseudocompacte ; alors $\bar{P}^{\upsilon} \subset \Theta X$.*

En effet, P étant pseudocompacte, son adhérence dans ΘX est compacte donc fermée dans υX et $\bar{P}^{\Theta} = \bar{P}^{\upsilon}$.

Par suite $\bigcup \bar{P}^{\upsilon} \subset \theta X \subset \upsilon X$. Or si υX est localement compact la caractérisation donnée dans [4], th. 4.6, impose que tout point de υX appartienne à l'adhérence d'un pseudocompact de X. On a ainsi montré :

3.2. *Proposition : Si la replétion d'un espace* X *est localement compacte, on a* $\theta X = \upsilon X$.

Ceci donne un moyen simple pour reconnaître que la replétion d'un espace discret de cardinal mesurable n'est pas localement compacte.

D'autre part on peut modifier ainsi les hypothèses du théorème 4.5 de [4] :

3.3. *Théorème : Soit* X *un* $k_{\mathbb{R}}$*-espace de cardinal non mesurable, et soit* Y *un espace dont la replétion est localement compacte ; alors* $\upsilon(X\times Y) = \upsilon X\times\upsilon Y$.

On a, en effet, $\theta X = \upsilon X$ et $\theta Y = \upsilon Y$. D'après 2.5, $\theta(X\times Y) = \theta X\times\theta Y = \upsilon X\times\upsilon Y$, et $\theta(X\times Y)$ est un espace replet donc s'identifie à $\upsilon(X\times Y)$.

Il convient de souligner que l'abandon d'une condition de cardinalité sur Y se paie par le renforcement de la condition sur X. Par ailleurs les difficultés rencontrées dans cette voie pour trouver une solution définitive à la conservation du produit par le foncteur υ ou le foncteur θ, incitent à orienter la recherche vers d'autres méthodes qui restent pour l'instant à définir.

BIBLIOGRAPHIE

1 B. BANACHEWSKI : On the Weierstrass-Stone approximation theorem Fund. Math. 44 (1957) p. 249-252.

2 H. BUCHWALTER : Topologies et compactologies, Pub. Dep. Math. Lyon, 6 (1969) n° 2; p. 1-74.

3 H. BUCHWALTER et R. PUPIER : Une caractérisation topologique de la complétion universelle d'un espace complètement régulier. Cras, (1969) p.

4 W.W. COMFORT : On the Hewitt realcompactification of a product space. Trans. Am. Math. Soc. 131 (1968) 1, p. 108-118.

5 W.W. COMFORT et S. NEGREPONTIS : Extending continuous functions on X×Y to sussets of βX×βY, Fund. Math. 59 (1966) 1-12.

6 L. GILMAN et M. JERISON : Rings of continuous functions.

7 J. KELLEY : General topology.

8 N. NOBLE : Doctoral dissertation, Un, of Rochester, 1967.

9 R. PUPIER : Quelques propriétés de la complétion universelle d'un espace complètement régulier, Cras (1969) (à paraître).

10 R. PUPIER : Objets convenables, objets de Kelley ; applications aux espaces topologiques. Rev. Roum. Math. P. et Appl. (1969) à paraître.

11 R.M. STEPHENSON Jr : Product spaces for which the Stone-Weierstrass theorem holds, Proc. A.M.S. 21 (1969) n° 2, p. 284-288.

12 H. TAMANO : A note on the pseudocompactness of the product of two spaces. Mem. Coll. Sc. University Kyoto, 33 (1960) p. 225-230.

Manuscrit remis le 23 juin 1969.

R. PUPIER
Maître Assistant
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
43, bd du 11 novembre 1918
VILLEURBANNE