N. BLANCHARD
M. JOURLIN

La topologie de la convergence bornée sur les algèbres de fonctions continues

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1969, tome 6, fascicule 2 , p. 85-96
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1969__6_2_85_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1969 t 6-2

LA TOPOLOGIE DE LA CONVERGENCE BORNEE SUR LES ALGEBRES DE FONCTIONS CONTINUES

N. BLANCHARD et M. JOURLIN

Dans tout l'exposé, T désigne un espace topologique complètement régulier. L'espace $C(T)$ des fonctions réelles continues sur T peut être muni de plusieurs topologies ; Nachbin, Shirota, Warner [5] parmi d'autres, ont étudié sur $C(T)$ la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes de T. $C(T)$ devient alors une algèbre localement convexe séparée, que nous noterons $C_c(T)$. Rappelons succinctement l'essentiel des résultats donnés dans [5] :

Théorème A : *Pour que* $C_c(T)$ *soit un espace complet, il faut et il suffit que* T *soit un* $k_{\mathbb{R}}$*-espace (def.* 2.3 *de* [2]*).*

Théorème B : $C_c(T)$ *est toujours quasi-normable.*

Théorème C : *Pour que* $C_c(T)$ *soit un espace nucléaire, il faut et il suffit que toute partie compacte de* T *soit finie.*

Théorème D : *Pour que* $C_c(T)$ *soit un espace de Montel, il faut et il suffit que* T *soit un espace discret.*

Dans [2], H. Buchwalter définit une bornologie $\mathcal{B}(T)$ sur T; les bornés étant les parties de T sur lesquelles toute fonction continue sur T reste bornée.

La bornologie de T permet classiquement de définir sur $C(T)$, la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de T ; c'est une $\mathfrak{S}$-topologie au sens de N. Bourbaki en prenant pour $\mathfrak{S}$ l'ensemble des parties P de T telles que $||f||_P<+\infty$ pour toute fonction f de $C(T)$. Par définition même, c'est la plus fine $\mathfrak{S}$-topologie vectorielle et elle fait de $C(T)$ une algèbre localement convexe séparée notée $C_\beta(T)$.

On remarque que lorsque T est un espace de type (μ) : $C_\beta(T)$ et $C_c(T)$ sont confondus et lorsque T est un espace pseudocompact, $C_\beta(T)$ est identique à $C^\infty(T)$.

Le but de l'exposé est l'amorce d'une étude des propriétés particulières de cet espace, qu'elles résultent de sa nature d'espace de fonctions continues ou d'hypothèses particulières faites sur la topologie de T.

On y trouvera repris les théorèmes précités, sous la forme :

<u>*Théorème A'*</u> : *Pour que* $C_\beta(T)$ *soit un espace complet, il faut et il suffit que* T *soit un* b-*espace.*

<u>*Théorème B'*</u> : $C_\beta(T)$ *est toujours quasi-normable.*

<u>*Théorème C'*</u> : *Pour que* $C_\beta(T)$ *soit un espace nucléaire, il faut et il suffit que toute partie bornée de* T *soit finie.*

<u>*Théorème D'*</u> : *Pour que* $C_\beta(T)$ *soit un espace de Montel, il faut et il suffit que* T *soit un espace discret.*

Par ailleurs, on donne pour $C_\beta(T)$ un théorème analogue à un résultat de |1| :

Pour que $C_\beta(T)$ *soit un espace métrisable, il faut et il suffit que* T *soit un espace hémiborné.*

Enfin, il est établi une condition nécessaire et suffisante de normabilité pour $C_\beta(T)$:

Pour que $C_\beta(T)$ *soit un espace normable (ou un espace de Banach, ou un espace* (DF)...) *il faut et il suffit que* T *soit un espace pseudo-compact.*

<u>Notations</u> : les parties bornées de T seront désignées par les lettres P,Q, ... pour éviter toute confusion avec les parties bornées de $C_\beta(T)$, notées classiquement : A,B ...

Pour tout borné P de T : $\sup_{t\in P}|f(t)|$ sera noté : $||f||_P$.

On notera $U(P,\varepsilon) = \{f,\ f\in C(T),\ ||f||_P \leqslant \varepsilon\}$.

<u>TABLE DES MATIERES</u> :

1. CONDITION DE COMPLETUDE.

(1.1) *Théorème : Le complété* $\widehat{C_\beta(T)}$ *de* $C_\beta(T)$ *s'identifie à l'espace* $C_b(T)$ *des fonctions numériques dont les restrictions aux bornés* P *de* T *sont* C(T)*-uniformément continues (i.e. uniformément continues pour la structure uniforme définie par* C(T)*), muni de la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de* T.

Lemme : Pour qu'une fonction f *définie sur une partie bornée* P *de* T *soit la restriction à* P *d'une fonction* g *de* C(T)*, il faut et il suffit que* f *soit* C(T)*-uniformément continue sur* P.

Preuve du lemme : La condition est évidemment nécessaire. Pour la suffisance : plongeons T dans sa réplétion υT ; étant borné dans T, P est relativement compact dans υT. Son adhérence $\overline{P}^{\upsilon}$ dans υT est compacte donc complète pour la seule structure uniforme compatible avec sa topologie, ce qui montre que $\overline{P}^{\upsilon}$ est le complété de P pour la C(T)-structure uniforme sur P. Alors f, uniformement continue sur P est prolongeable en une fonction $\bar{f}$ uniformément continue sur $\overline{P}^{\upsilon}$. La compacité de $\overline{P}^{\upsilon}$ dans υT permet de prolonger $\bar{f}$ en une fonction $\bar{g}$ continue sur υT. Posons $g = \bar{g}|_T$: g est continue sur T et prolonge f. De plus, f étant C(T)-uniformément continue est bornée ; on peut donc réaliser le prolongement avec la condition : $||g||_T = ||f||_P$.

Preuve du théorème : Toute limite uniforme sur un borné P de fonctions uniformément continues sur P étant uniformément continue sur P, $C_b(T)$ est un espace complet. Par ailleurs, il est évident que $C_\beta(T)$ est une sous-algèbre localement convexe de $C_b(T)$. Montrons enfin que $C_\beta(T)$ est dense dans $C_b(T)$:

Soit f une fonction de $C_b(T)$; d'après le lemme : $f|_P$, qui est uniformément continue sur P est prolongeable en une fonction g de C(T).

Alors $||f-g||_P = 0$ ce qui suffit.

<u>*Corollaire*</u> *: Si* T *est un espace hyponormal (déf5.4.4[2]),* $\widehat{C_\beta(T)}$ *s'identifie à l'espace des fonctions dont les restrictions aux bornés* P *de* T *sont continues.*

En effet, soit P une partie bornée de T : toute fonction continue sur P est la restriction d'une fonction g de C(T), donc est C(T)-uniformément continue.

Afin d'établir pour l'espace $C_\beta(T)$ un résultat analogue au théorème 1 de |5| , introduisons la :

(1.2) <u>*Définition*</u> *: un espace topologique* T *est dit* b*'-espace si toute fonction numérique* C(T)*-uniformément continue sur chaque partie bornée de* T *est continue sur* T.

(1.3) <u>*Théorème*</u> *: les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) $C_\beta(T)$ *est un espace quasi-complet,*

b) $C_\beta(T)$ *est un espace complet,*

c) T *est un* b*'-espace.*

<u>Preuve</u> : L'équivalence de b) et c) est conséquence du théorème (1.1). Montrons que a) implique c). Pour cela, soit f une fonction de $C_b(T)$.

Supposons d'abord que f soit bornée : alors, pour toute partie bornée P de T, on peut trouver une fonction g_P de C(T) telle que : $f|_P = g_P|_P$ et $||g_P||_T = ||f||_P$. Or pour toute partie bornée Q de T contenant P, on a : $||g_Q-f||_P = 0$ donc la famille $\{g_Q\}$ tend vers f dans $C_b(T)$. D'autre part la famille $\{g_Q\}$ est bornée dans $C_\beta(T)$ car $||g_Q||_T = ||f||_Q \leq ||f||_T$. Son adhérence dans $C_\beta(T)$ est donc complète : la famille $\{g_Q\}$ converge donc vers une limite g dans $C_\beta(T)$ et on a nécessairement f = g.

Si f n'est pas bornée, soit fn la fonction f tronquée par $-n$ et $+n$. Pour tout borné P de T et tout entier : $n \geqslant ||f||_P$ on a : $||f-f_n||_P = 0$ donc la suite $\{fn\}$ tend vers f dans $C_b(T)$. Mais la suite $\{fn\}$ est évidemment de Cauchy dans $C_\beta(T)$ donc convergente vers une fonction g de $C_\beta(T)$ qui est nécessairement f.

2. CONDITION DE METRISABILITE.

Nous introduisons ici une définition permettant d'aménager les théorèmes 7 et 8 de [1] :

(2.1) *Définition : Un espace topologique est dit "hémiborné" s'il possède un système fondamental dénombrable de bornés.*

Rappelons par ailleurs ce qu'est la propriété de Mackey stricte pour un elc :

(2.2) *Définition : On dit qu'un elc* E *a la "propriété de Mackey stricte" si pour tout borné* A *de* E*, il existe un disque fermé borné* B *contenant* A*, tel que les topologies induites par* E_B *et* E *sur* A *soient identiques.*

On peut alors établir la :

(2.3) *Proposition : Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) T *est un espace hémiborné,*

b) $C_\beta(T)$ *est un espace métrisable,*

c) $C_\beta(T)$ *possède la propriété de Mackey stricte.*

Preuve : a) implique b) de manière évidente et on sait que b) implique c).

c) implique a) : Posons $A = \{f \in C_\beta(T),\ ||f||_T \leqslant 1\}$: c'est un borné de $C_\beta(T)$ donc il existe un disque fermé borné B contenant A tel que :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists V_n \in \mathcal{V}(C_\beta(T)),\ V_n \cap A \subset n^{-1}B$

On peut trouver un borné fermé P_n de T et un ε_n positif tels que : $U(P_n, \varepsilon_n) \subset V_n$.

Montrons que la famille (P_n) construite constitue un système fondamental de bornés pour T :

Soit P un borné quelconque de T :

Alors : $M = \sup\limits_{f \in B} ||f||_P < +\infty$

Par suite, pour n fixé supérieur à M : P est inclus dans P_n , sinon on pourrait trouver $t \in P \cap \complement P_n$ et $f \in A$ avec $f(t) = 1$ et $||f||_{P_n} = 0$

On a : $f \in U(P_n, \varepsilon_n) \cap A \subset V_n \cap A \subset n^{-1}B$ d'où : nf est dans B et par conséquent :

$||f||_P \leqslant \frac{M}{n} < 1$ contrairement au fait que f prenne en t la valeur 1.

<u>*Corollaire*</u> *:* $C_\beta(T)$ *est un espace de Fréchet si et seulement si* T *est un* b'*-espace hémiborné.*

3. <u>QUASI-NORMABILITE DE</u> $C_\beta(T)$.

Pour la définition d'un elc quasi-normable, on peut se reporter à [3] p. 237 mais ce qui importe ici est : pour que $C_\beta(T)$ soit quasi-normable, il faut et il suffit que : $\forall U \in \mathcal{V}(C_\beta(T)),\ \exists\ V \in \mathcal{V}(C_\beta(T)),\ \forall \lambda > 0,\ \exists\ M$ borné, $V \subset \lambda U + M$ ([3] p. 237).

(3.1) <u>*Proposition*</u> *:* $C_\beta(T)$ *est toujours quasi-normable.*

<u>Preuve</u> : Soit $U = U(P, \varepsilon)$ un voisinage du système fondamental. Nous prendrons une fois pour toutes : $V = U$.

Pour $\lambda \geqslant 1$: le résultat est acquis en choisissant : $M = \{0\}$. Pour $0 < \lambda < 1$: on choisit $M = \{f \in C(T),\ ||f||_T \leqslant \varepsilon\}$.

Soit θ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\theta(x) = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } x \geqslant \varepsilon \\ x & \text{si } |x| \leqslant \varepsilon \\ -\varepsilon & \text{si } x \leqslant -\varepsilon \end{cases}$$

Pour f prise dans V, appelons h le produit de composition : $\theta_\circ f$ et soit $g = (1-\lambda)h$

On écrit f sous la forme : $(f-g)+g$, alors :

si $t \in P$, on a $|f(t)| \leqslant \varepsilon$ donc $h(t) = f(t)$ et $(f-g)(t) = \lambda f(t)$ d'où $||f-g||_P \leqslant \lambda\varepsilon$

et $f-g \in \lambda U$.

Si $t \in T$: ou bien $|f(t)| \leqslant \varepsilon$ alors $h(t) = f(t)$ et $|g(t)| = (1-\lambda)|f(t)| \leqslant (1-\lambda)\varepsilon \leqslant \varepsilon$

ou bien $|f(t)| > \varepsilon$ alors $h(t) = \pm\varepsilon$ et $|g(t)| = (1-\lambda)\varepsilon \leqslant \varepsilon$

On a donc : $||g||_T \leqslant (1-\lambda)\varepsilon \leqslant \varepsilon$ alors $g \in M$.

4. CONDITION DE NORMABILITE.

Dans ce paragraphe, on montre en particulier que les qualités d'espace normable et d'espace (DF) coïncident pour l'algèbre $C_\beta(T)$ et équivalent à la propriété de pseudo-compacité pour T.

(4.1) *Théorème : Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) T *est pseudo-compact,*

b) $C_\beta(T)$ *est un espace de Banach,*

c) $C_\beta(T)$ *est un espace normable*

d) $C_\beta(T)$ *est un espace (DF),*

e) $C_\beta(T)$ *possède un système fondamental dénombrable de parties bornées.*

f) $C_\beta(T)$ *est réunion d'une suite de parties bornées,*

g) $C_\beta(T)$ *est réunion d'une suite de parties simplement bornées.*

Preuve : a) implique b) car si T est pseudo-compact, $C_\beta(T)$ s'identifie à $C^\infty(T)$.

Il reste à vérifier :

g) implique a) : Soit (B_n) une suite croissante de parties simplement bornées dont la réunion est $C_\beta(T)$.

Si T n'est pas pseudo-compact, il existe une suite localement finie (Ω_n) d'ouverts non vides, deux à deux disjoints. Choisissons pour tout n, un point $t_n \in \Omega_n$ et posons :

$$r_n = \operatorname*{Sup}_{f\in B_n} |f(t_n)|$$

B_n étant simplement borné, r_n est fini.

T étant complètement régulier, on peut trouver une fonction positive g_n de $C(T)$ vérifiant : $g_n(t_n) = r_n + 1$ et : $\mathrm{supp}(g_n) \subset \Omega_n$.

Soit $g = \sum_n g_n$. La famille (Ω_n) étant localement finie, on sait que g est continue. Mais puisque $g(t_n) \geq r_n + 1$ pour tout n, on voit que g n'appartient à aucun B_n, ce qui est absurde.

5. CONDITION DE NUCLEARITE.

Ce paragraphe est à rapprocher d'un résultat de S. Warner rappelé partiellement dans l'introduction (théorème C).

(5.1) *Théorème : Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) Tout borné de T *est fini,*

b) $C_\beta(T) = C_s(T)$

c) $C_\beta(T)$ *est un sous-espace vectoriel dense de* $\mathbb{R}^T$

d) $C_\beta(T)$ *est un espace nucléaire*

e) $C_\beta(T)$ *est un espace de Schwartz (σ) (déf. [3] p. 244)*

f) Dans $C_\beta(T)$ *tout borné est précompact.*

Preuve : Il suffit de prouver : f) implique a).

Soit P un borné infini de T. Soit $A = \{f \in C(T),\ ||f||_T \leq 1\}$. Montrons que A n'est pas précompact dans $C_\beta(T)$. Pour cela il suffit de prouver que A ne peut être recouvert par un nombre fini de parties petites d'ordre U, où U est le voisinage $U(P,\frac{1}{2})$. Soient donc $f_1,\dots,f_n$ n fonctions de A. Il existe dans P n points distincts $t_1,\dots,t_n$. On peut alors trouver une fonction $f \in C(T)$, telle que :

$$f \in A \;;\quad f(t_i) = -1 \text{ si } f_i(t_i) \geq 0$$
$$f(t_i) = +1 \text{ si } f_i(t_i) < 0$$

Alors, pour tout i : $||f-f_i||_p \geq 1$ donc f ne peut appartenir à la réunion : $\bigcup_{i=1}^{n}(f_i+U)$.

6. CONDITION DE REFLEXIVITE.

Dans [4, théorème 4] Myers établit que dans le cas où T est compact $C_c(T)$ est réflexif si et seulement si T est fini. De même que Warner dans [5] pour l'espace C_c, nous établissons pour C_β comme condition nécessaire et suffisante de réflexivité : T est un espace discret. Plus précisément :

(6.1) *Théorème : Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a, T *est un espace discret*

b) $C_\beta(T) = \mathbb{R}^T$

c) $C_\beta(T)$ *est un espace de Montel*

d) $C_\beta(T)$ *est un espace de type* (μ) *(i.e. tout borné fermé est compact)*

e) $C_\beta(T)$ *est un espace réflexif,*

f) $C_\beta(T)$ *est un espace semi-réflexif*

Preuve : a) $\Longrightarrow$ b) $\Longrightarrow$ c) $\Longrightarrow$ d) $\Longrightarrow$ f) et c) $\Longrightarrow$ e) $\Longrightarrow$ f).

Il reste à montrer :

f) $\Longrightarrow$ a) : Soit $A = \{f \in C(T), ||f||_T \leq 1\}$. A est un disque fermé borné dans $C_\beta(T)$ donc faiblement fermé donc faiblement compact. La topologie s'étant séparée et moins fine que la topologie σ, A est compact dans $C_s(T)$.

Montrons que cela implique que, pour tout $t \in T$, la fonction $1_{\{t\}}$ caractéristique de $\{t\}$ est continue, ce qui suffira. En effet, pour toute partie finie P de T disjointe de $\{t\}$, il existe une fonction $f_p \in C(T)$ telle que $f_p \in A$, $f_p(t) = 1$ et $f_p = 0$ sur P. Lorsque P décrit l'ordonné filtrant croissant des parties finies de T disjointes de $\{t\}$, il est clair que la famille $(f_p)_p$ converge simplement vers la fonction $1_{\{t\}}$. Par raison évidente de compacité, on en tire : $1_{\{t\}} \in A$, donc $1_{\{t\}}$ est continue.

<u>*Corollaire*</u> *: Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) T *est fini*

b) $C_\beta(T)$ *est un espace* (DF) *et Montel,*

c) $C_\beta(T)$ *est un espace* (σ_2) *de Silva (i.e. limite inductive compactifiante d'une suite d'espaces de Banach).*

<u>Preuve</u> : En réunissant les théorèmes (4.1) et (6.1) on a : a) $\Longleftrightarrow$ b). On sait par ailleurs que pour qu'un elc soit un espace (σ_2), il faut et suffit qu'il soit (DF) et Montel et qu'il ait la propriété de Mackey stricte. Il reste donc à voir : b) $\Longrightarrow$ c) : or si T est fini, il est évidemment hémiborné. La proposition (2.3) permet alors de conclure.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. ARENS : A topology for spaces of transformations. Annals of Mathematics v. 47 (1946) pp. 480-495

[2] H. BUCHWALTER : Topologies et compactologies. Publ. Dép. Math. Lyon 6-2 (1969) pp. 1-74.

[3] A. GROTHENDIECK : Espaces vectoriels topologiques. Publicaca da Sociedade de Matematica de São-Paulo 1964.

[4] S.B. MYERS : Spaces of continuous functions Bulletin of the American Mathematical Society Vol. 55 (1949) pp. 402-407.

[5] S. WARNER : The topology of compact convergence on continuous function spaces. Duke Math. J. 25 (1958) pp. 265-282.

Manuscrit remis le 1er juillet 1969.

N. BLANCHARD et M. JOURLIN
Assistants
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
43, bd du 11 novembre 1918
VILLEURBANNE