

MICHEL HACQUE

Localisations exactes et localisations plates

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1969, tome 6, fascicule 2
, p. 97-117

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1969__6_2_97_0>

© Université de Lyon, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

LOCALISATIONS EXACTES ET LOCALISATIONS PLATES

Michel HACQUE

Etant donné un anneau A , avec élément unité, soit $\tilde{A} = \text{Mod}A$ la catégorie des modules unitaires à gauche sur A .

Une localisation dans \tilde{A} peut être caractérisée par l'une des données suivantes :

- (a) Une sous catégorie localisante C de \tilde{A} .
- (b) Un ensemble F topologisant et idempotent d'idéaux à gauche de A .
- (c) Un système localisant (L, Ψ) constitué par un foncteur localisation L exact à gauche de \tilde{A} dans \tilde{A} et un morphisme fonctoriel $\Psi : I_A \rightarrow L$ tel que ΨL et $L\Psi$ soient des isomorphismes fonctoriels de L sur L^2 .
- (d) Une sous catégorie locale L de \tilde{A} , c'est-à-dire une sous catégorie pleine de \tilde{A} , telle que le foncteur canonique \tilde{S} de L dans \tilde{A} admette un adjoint à gauche \tilde{T} , qui est un foncteur exact à gauche de \tilde{A} dans L .
- (e) Une mono sous catégorie M de \tilde{A} .

La terminologie utilisée est celle de [1] et de [2].

Lorsque ces données caractérisent une même localisation \tilde{L} dans \tilde{A} , elles sont reliées, par exemple, par les conditions suivantes :

L'ensemble F est constitué par les idéaux à gauche I de A , tels que A/I soit un objet de C . Réciproquement, la sous catégorie localisante C de \tilde{A} , est la sous catégorie pleine de \tilde{A} , caractérisée par les objets F -négligeables.

La sous catégorie locale L de \tilde{A} est la sous catégorie pleine de \tilde{A} , caractérisée par les objets de \tilde{A} invariants pour le système localisant (L, Ψ) , c'est-à-dire par les objets M pour lesquels $\Psi_M : M \rightarrow LM$ est un isomorphisme et alors \tilde{T}

est caractérisé par : $L = \overset{\sim}{\mathcal{S}}\overset{\sim}{\mathcal{T}}$.

Réciproquement, le système localisant (L, Ψ) est caractérisé par : $L = \overset{\sim}{\mathcal{S}}\overset{\sim}{\mathcal{T}}$ et Ψ est le morphisme fonctoriel d'adjonction.

La sous catégorie locale L de \mathcal{A} est la sous catégorie pleine de \mathcal{A} caractérisée par les objets C -fermés. Réciproquement, la sous catégorie localisante C de \mathcal{A} est le noyau du foncteur localisation L ou du foncteur $\overset{\sim}{\mathcal{T}}$.

La mono sous catégorie M de \mathcal{A} est la sous catégorie pleine de \mathcal{A} caractérisée par les objets M de \mathcal{A} vérifiant $FM = 0$.

Réciproquement, la sous catégorie locale L de \mathcal{A} est la sous catégorie pleine de M , caractérisée par les objets purs de M .

Dans la suite, la localisation \tilde{L} sera caractérisée par l'une quelconque de ces données.

De plus, soit T le foncteur canonique, exact, de \mathcal{A} dans la catégorie quotient \mathcal{A}/C . Soit A_F l'opposé de l'anneau des endomorphismes de TA dans \mathcal{A}/C et soit $\Psi_A : \mathcal{A} \rightarrow A_F$ l'homomorphisme d'anneaux défini par T , en identifiant \mathcal{A} à l'opposé de l'anneau de ses endomorphismes dans \mathcal{A} . Soit $A_F = \text{Mod}A_F$ la catégorie des modules à gauche, unitaires, sur A_F et soit $(\Psi_A)_*$ le foncteur restriction des scalaires de A_F dans \mathcal{A} .

Il existe un foncteur S' de \mathcal{A}/C dans A_F caractérisé par la condition suivante : pour un objet P de \mathcal{A}/C , l'objet $S'P$ de A_F est le groupe abélien $\text{Hom}_{\mathcal{A}/C}(TA, P)$ muni d'une structure de A_F -module à gauche par la composition par les endomorphismes de TA dans \mathcal{A}/C .

Le foncteur section $S = (\Psi_A)_* S'$ de \mathcal{A}/C dans \mathcal{A} est un adjoint à droite au foncteur T et il est possible de supposer que : $L = \mathcal{S}\mathcal{T} = (\Psi_A)_* \mathcal{S}'\mathcal{T}$.

Le \mathcal{A} -module à gauche défini sur l'anneau A_F par Ψ_A est donc $(\Psi_A)_* A_F = LA$ noté également A_F .

Plus généralement, tout objet M de \mathcal{A} détermine un homomorphisme :

$$\Psi_M : M \longrightarrow M_F = LM.$$

Le module M_F peut être caractérisé par :

$$M_F = \varinjlim_{I \in \mathcal{F}} \text{Hom}(I, M/IM)$$

et Ψ_A est alors la limite inductive des homomorphismes canoniques de $M \simeq \text{Hom}(A, M)$ dans $\text{Hom}(I, M/IM)$.

Soit $\rho : A \rightarrow A' = A/\mathcal{a}$ l'homomorphisme canonique de l'anneau A dans l'anneau quotient Q' de A par l'idéal bilatère $\mathcal{a} = \mathcal{F}A$.

L'idéal bilatère $\mathcal{a} = \mathcal{F}A$ de A est le noyau de l'homomorphisme :

$$\Psi_A : A \rightarrow A_F$$

de l'anneau A dans l'anneau localisé A_F de A pour \mathcal{F} , dont le module sous-jacent peut être caractérisé par :

$$A_F = \varinjlim_{I \in \mathcal{F}} \text{Hom}(I, A')$$

1. Localisations exactes :

D'après le corollaire 3 de [1] (p. 369), l'exactitude du foncteur localisation L est équivalente à l'exactitude du foncteur section S .

1.1 Définition : Une localisation \tilde{L} dans A est exacte, si le foncteur localisation L (ou le foncteur section S) est exact.

1.2 Proposition : Avec les notations précédentes, il y a équivalence des conditions suivantes :

- (a) La localisation \tilde{L} est exacte,
- (b) Si M est un sous objet de Q et si M et Q sont des objets de L , alors Q/M est un objet de L .
- (c) $\text{Ext}^2(N, M) = 0$ pour tout objet N de C et tout objet M de L .
- (d) $\text{Ext}^1(I, M) = 0$ pour tout $I \in \mathcal{F}$ et tout objet M de L .
- (e) Pour toute suite exacte de la forme

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow Q \xrightarrow{P} P \longrightarrow 0$$

dans laquelle M et Q sont des objets de L , pour tout $J \in F$ et tout $u \in \text{Hom}(J, P)$, il existe $I \in F$, avec $I \subset J$ et $v \in \text{Hom}(I, Q)$ tels que $p \circ v$ coïncide avec la restriction de u à I .

L'équivalence des conditions (a) et (b) résulte de la proposition 7 de [1] (p. 376).

Pour tout objet M de L , une enveloppe injective Q de M dans A est aussi un objet de L . Tout objet N de C détermine une suite exacte :

$$\text{Ext}^1(N, Q) \longrightarrow \text{Ext}^1(N, Q/N) \longrightarrow \text{Ext}^2(N, M) \longrightarrow \text{Ext}^2(N, Q)$$

dans laquelle les termes extrêmes sont nuls puisque Q est injectif.

La condition (b) entraîne que Q/M est un objet de L . D'après le corollaire 4-4 de [2], il en résulte $\text{Ext}^1(N, Q/M) = 0$, ce qui implique $\text{Ext}^2(N, M) = 0$. Ainsi, la condition (b) implique la condition (c).

Pour tout objet M de L et pour tout $I \in F$, puisque A/I est un objet de C , la relation $\text{Ext}^1(I, M) = \text{Ext}^2(A/I, M)$, montre que la condition (c) entraîne la condition (d).

La condition (d) implique la condition (e) en choisissant $I = J$, puisque $\text{Ext}^1(J, M) = 0$, entraîne la surjectivité de l'application canonique :

$$\text{Hom}(J, Q) \longrightarrow \text{Hom}(J, P).$$

Les hypothèses de la condition (b) entraînent que $P = Q/M$ est un objet de M . L'homomorphisme

$$\psi_P : P \longrightarrow P_F$$

est donc injectif :

Pour montrer que P est un objet de L , il suffit donc de montrer que ψ_P est surjectif.

Tout élément x de P_F est représenté par un homomorphisme $u \in \text{Hom}(J, P)$ pour un certain $J \in F$.

La condition (e) entraîne qu'il existe $I \in F$, avec $I \subset J$ et un homomorphisme $v \in \text{Hom}(I, Q)$ tels que $p_0 v$ coïncide avec la restriction de u à I . Puisque Q est un objet de L , l'homomorphisme $v \in \text{Hom}(I, Q)$ se prolonge en $\bar{v} \in \text{Hom}(A, Q)$, qui détermine $p_0 \bar{v} = w \in \text{Hom}(A, P)$. La restriction de w à I est donc $p_0 v$ et elle coïncide avec la restriction de u à I , ce qui prouve que les homomorphismes $w \in \text{Hom}(A, P)$ et $u \in \text{Hom}(J, P)$ ont la même image dans $\text{Hom}(I, P)$ et par suite, aussi dans P_F . Il en résulte que l'élément x de P_F est l'image par Ψ_P de $w \in \text{Hom}(A, P) = P$. Aussi, la condition (e) implique la condition (b), ce qui achève la démonstration.

1.3 Corollaire : La localisation \tilde{L} dans A est exacte si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- (1) Tout objet M de L est injectif dans A .
- (2) L'ensemble F possède un sous ensemble cofinal constitué d'idéaux à gauche projectifs.

En effet, la condition (1) entraîne les conditions (c) et (d).

D'autre part, la condition (2) entraîne la condition (e) en choisissant $I \in F$, avec $I \subset J$ et I projectif.

Exemple 1.4. Si F_0 est l'ensemble des idéaux à gauche de A , exentiels dans A , et si $F = F_0^2$ est l'ensemble topologisant et idempotent engendré par F_0 , il est connu que la localisation caractérisée par $F = F_0^2$ est exacte. Il est facile de retrouver ce résultat puisque la condition (1) est alors vérifiée.

2. Localisations plates.

Pour tout homomorphisme d'anneaux $\phi : A \rightarrow B$, le foncteur restriction des scalaires ϕ_* de $\text{Mod} B$ dans $\text{Mod} A$, est un adjoint à droite au foncteur extension des scalaires ϕ^* de $\text{Mod} A$ dans $\text{Mod} B$.

Pour toute sous catégorie localisante C de $\text{Mod} A$, associée à un ensemble F topologisant et idempotent, il est facile de vérifier que la sous catégorie pleine

\mathcal{D} de $\text{Mod}B$ caractérisée par les objets dont l'image par ϕ_{\times} est un objet de C , constitue une sous catégorie localisante de $\text{Mod}B$, appelée l'image de C par ϕ .

L'ensemble G topologisant et idempotent, associé à \mathcal{D} , appelé l'image de F par ϕ , est constitué par les idéaux à gauche J de B , tels que $\phi_{\times}(B/J)$ soit un objet de C .

Enfin, un épimorphisme d'anneaux $\phi : A \rightarrow B$ est plat à gauche, si B est un A -module plat à droite .

2.1 Définition : Une localisation \tilde{L} dans A est plate, si le foncteur localisation L commute aux limites inductives.

Une localisation \tilde{L} dans A étant exacte si le foncteur localisation L commute aux limites inductives finies, toute localisation plate est une localisation exacte.

2.2 Proposition : Pour toute localisation \tilde{L} dans A , il a équivalence des conditions suivantes :

- (a) La localisation \tilde{L} est plate.
- (b) Le foncteur localisation L admet un adjoint à droite
- (c) Le foncteur localisation L est isomorphe au foncteur $(\Psi_A)_{\times} \circ (\Psi_A)^{\times}$
- (d) L'homomorphisme d'anneaux $\Psi_A : A \rightarrow A_F$ est un épimorphisme plat à gauche et la sous catégorie localisante C de A est le noyau du foncteur $(\Psi_A)^{\times}$.
- (e) L'image $G = \Psi_A(F)$ de F par Ψ_A vérifie $G = \{A_F\}$.
- (f) Le foncteur section S commute aux limites inductives.

La proposition 1 bis de [1] (p. 404) montre que la condition (a) entraîne la condition (b).

Soient $\phi' : (\Psi_A)^* \cdot (\Psi_A)_* \longrightarrow I_{A_F}$ et $\psi' : I_A \longrightarrow (\Psi_A)_* \cdot (\Psi_A)^*$, les morphismes fonctoriels liés à l'adjonction de $(\Psi_A)_*$ et de $(\Psi_A)^*$.

La condition (c) entraîne qu'un système localisant (L, Ψ) peut être caractérisé par $L = (\Psi_A)_* \cdot (\Psi_A)^*$ et $\Psi = \psi'$. Le morphisme fonctoriel $L\Psi = (\Psi_A)_* \cdot (\Psi_A)^* \psi'$ de $L = (\Psi_A)_* \cdot (\Psi_A)^*$ dans $L^2 = (\Psi_A)_* \cdot (\Psi_A)^* \cdot (\Psi_A)_* \cdot (\Psi_A)^*$ est donc un isomorphisme fonctoriel. Puisque le foncteur $(\Psi_A)_*$ est fidèle, il en résulte que le morphisme fonctoriel $(\Psi_A)^* \psi'$ de $(\Psi_A)^*$ dans $(\Psi_A)^* \cdot (\Psi_A)_* \cdot (\Psi_A)^*$ est un isomorphisme fonctoriel. D'après les propriétés générales des foncteurs adjoints, le composé $\phi' \cdot (\Psi_A)^* \cdot (\Psi_A)_* \psi'$ est un isomorphisme fonctoriel de $(\Psi_A)^*$ sur $(\Psi_A)^*$, ce qui entraîne alors que le morphisme fonctoriel $\phi' \cdot (\Psi_A)^*$ de $(\Psi_A)^* \cdot (\Psi_A)_* \cdot (\Psi_A)^*$ dans $(\Psi_A)^*$ est un isomorphisme fonctoriel. Puisque $A_F = (\Psi_A)^* A$, ce résultat, appliqué à l'objet A de \mathcal{A} , donne un isomorphisme :

$$\phi'_{A_F} : (\Psi_A)^* (\Psi_A)_* A_F \longrightarrow A_F.$$

Comme cet isomorphisme ϕ'_{A_F} est aussi l'homomorphisme canonique de $(\Psi_A)^* (\Psi_A)_* A_F = A_F \otimes_A A_F$ dans A_F , induit par la multiplication dans A_F , la proposition 1.1 de [4], montre que $\psi_A : A \longrightarrow A_F$ est un épimorphisme d'anneaux. Puisque le foncteur localisation L , caractérisé par $LM = (\Psi_A)_* \cdot (\Psi_A)^* M = A_F \otimes_A M$, est exact, il en résulte que A_F est un A -module à droite plat. Enfin, puisque le foncteur $(\Psi_A)_*$ est fidèle et puisque la sous catégorie localisante \mathcal{C} de \mathcal{A} est le noyau de L , elle est aussi le noyau du foncteur $(\Psi_A)^*$. Ainsi la condition (c) entraîne la condition (d).

Si $\psi_A : A \longrightarrow A_F$ est un épimorphisme d'anneaux, la proposition 2.1 de [3] montre que le foncteur $(\Psi_A)_*$ est pleinement fidèle, ce qui entraîne que ϕ' est un isomorphisme fonctoriel de $(\Psi_A)^* (\Psi_A)_*$ sur I_{A_F} . La sous catégorie localisante $\mathcal{D} = \psi_A(\mathcal{C})$ de A_F , image de la sous catégorie localisante \mathcal{C} de \mathcal{A} par ψ_A , est la sous catégorie pleine de A_F , caractérisée par les objets N de A_F , tels que $(\Psi_A)_* N$ soit un objet de \mathcal{C} . La condition (d) entraîne alors qu'un tel objet N est isomorphe à $(\Psi_A)^* (\Psi_A)_* N$, qui est nul puisque \mathcal{C} est le noyau du foncteur $(\Psi_A)^*$. Il en résulte que \mathcal{D} ne contient que des objets nuls. L'image $G = \psi_A(F)$ de F par ψ_A étant

l'ensemble topologisant et idempotent constitué par les idéaux à gauche J de A_F , tels que A_F/J soit un objet de \mathcal{D} , il en résulte la relation $G = \{A_F\}$. Ainsi, la condition (d) entraîne la condition (e).

Avec les notations précédentes, le foncteur S' de A/C dans A_F est toujours adjoint à droite au foncteur $T(\Psi_A)_*$ et la proposition 3 de [1] (p. 413) montre que le foncteur $T(\Psi_A)_*$ induit une équivalence entre A_F/\mathcal{D} et A/C . La condition (e) signifie que \mathcal{D} ne contient que des objets nuls, ce qui entraîne que A_F/\mathcal{D} est canoniquement isomorphe à A_F . Il en résulte que le foncteur $T(\Psi_A)_*$ détermine une équivalence entre A_F et A/C et que par suite, le foncteur S' détermine une équivalence entre A/C et A_F . Il en résulte que les foncteurs S' et $(\Psi_A)_*$ commutent aux limites inductives et la relation $S = (\Psi_A)_* \circ S'$ montre que le foncteur section S commute aux limites inductives. Ainsi, la condition (e) entraîne la condition (f).

Enfin, puisque le foncteur T , qui est un adjoint à gauche, commute toujours aux limites inductives, la relation $L = ST$ montre que la condition (f) entraîne la condition (a), ce qui achève la démonstration.

3. Caractérisations des localisations plates.

3.1 Lemme : *Si un homomorphisme d'anneaux $\phi : A \rightarrow B$ est un épimorphisme plat à gauche, alors :*

(a) *Le noyau C du foncteur extension des scalaires ϕ^* , est une sous-catégorie localisante de A .*

(b) *L'ensemble F topologisant et idempotent associé à C est constitué par les idéaux à gauche I de A , vérifiant l'une des conditions suivantes :*

$$(1) - B \otimes_A (A/I) = 0$$

$$(2) - B \phi(I) = B.$$

En particulier, F possède un sous ensemble cofinal, constitué d'idéaux à gauche de type fini.

(c) Si $\psi_A : A \longrightarrow A_F$ caractérise un localisé de A pour cet ensemble F , alors il existe un isomorphisme unique u de A_F sur B , tel que $\phi = u \circ \psi_A$.

Soit ϕ_1 l'homomorphisme fonctoriel de $\phi^* \phi_*$ dans $I_{\text{Mod}B}$, lié à l'adjonction de ϕ_* et de ϕ^* . Puisque $\phi : A \longrightarrow B$ est un épimorphisme d'anneaux, la proposition 2.1 de [3] montre que le foncteur ϕ_* est pleinement fidèle, ce qui entraîne que ϕ_1 est un isomorphisme fonctoriel. Puisque $\phi : A \longrightarrow B$ est un épimorphisme plat à gauche, le foncteur ϕ^* , caractérisé par $\phi^* M = B \otimes_A M$, est exact.

La proposition 5 de [1] (p. 374) montre que $C = \text{Ker} \phi^*$ est une sous catégorie localisante de A et que ϕ^* induit une équivalence entre A/C et $\text{Mod}B$. La condition (a) est donc démontrée.

La relation $I \in F$, signifie que A/I est un objet de C , c'est-à-dire que $\phi^*(A/I) = 0$, ce qui se traduit par la condition (1).

Puisque B est un A -module plat à droite, une suite exacte

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow A/I \longrightarrow 0.$$

donne une suite exacte :

$$0 \longrightarrow B \otimes_A I \longrightarrow B \otimes_A A \longrightarrow B \otimes_A (A/I) \longrightarrow 0$$

La condition (1) équivaut donc à la surjectivité de l'application canonique de $B \otimes_A I$ dans $B \otimes_A A$ identifié à B . Or, l'image d'un élément de $B \otimes_A I$ de la forme $\sum_i b_i \otimes \alpha_i$ est l'élément $\sum_i b_i \phi(\alpha_i)$ de $B \otimes_A A$, identifié à l'élément $\sum_i b_i \phi(\alpha_i)$ de B . Comme ces éléments sont les éléments de l'idéal à gauche $B\phi(I)$ de B engendré par $\phi(I)$, la condition (1) est équivalente à la condition (2).

Puisque la condition (2) signifie qu'il existe un nombre fini d'éléments b_i de B et α_i de I , tels que $\sum_i b_i \phi(\alpha_i)$ soit l'élément unité de B , tout élément $I \in F$ contient l'idéal à gauche de type fini, engendré par ces éléments α_i et

cet idéal à gauche est aussi un élément de F .

Ainsi F possède un sous ensemble cofinal, constitué d'idéaux à gauche de type fini, ce qui achève la démonstration de la condition (b).

La démonstration de la proposition 5 de [1] (p. 374) montre qu'il existe un foncteur unique R de A/C dans $\text{Mod}B$, vérifiant $\phi^* = RT$. De plus, le foncteur $\phi_* \circ R$ est adjoint à droite au foncteur T et R détermine une équivalence entre A/C et $\text{Mod}B$.

Puisque R est une équivalence, l'application $u = R(TA, TA)$ est un isomorphisme de l'anneau des endomorphismes de TA dans A/C , isomorphe à l'opposé de l'anneau A_F , sur l'anneau des endomorphismes de $\phi^*A = B$ dans $\text{Mod}B$, isomorphe à l'opposé de l'anneau B . Comme l'homomorphisme $T(A, A)$ de l'anneau des endomorphismes de A dans A , isomorphe à l'opposé de l'anneau A , dans l'anneau des endomorphismes de TA dans A/C , isomorphe à l'opposé de l'anneau A_F , s'identifie à $\Psi_A : A \rightarrow A_F$ et comme l'homomorphisme $\phi^*(A, A)$ de l'anneau des endomorphismes de A dans A , isomorphe à l'opposé de l'anneau A , dans l'anneau des endomorphismes de $\phi^*A = B$ dans $\text{Mod}B$, isomorphe à l'opposé de l'anneau B , s'identifie à $\phi : A \rightarrow B$, la relation $\phi^* = RT$ entraîne la relation :

$$\phi^*(A, A) = R(TA, TA) \circ T(A, A)$$

qui donne alors :

$$\phi = u \circ \Psi_A.$$

Cette relation entraîne $\Psi_A = u^{-1} \circ \phi$ et puisque ϕ est un épimorphisme, il en résulte l'unicité de l'isomorphisme u , ce qui achève la démonstration.

3. Définition : Un ensemble F topologisant et idempotent d'idéaux à gauche d'un anneau A avec élément unité, est plat s'il vérifie la condition suivante :

(P) "Pour tout $M \in F$, il existe $I \in F$ et des familles finies :

$(n_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'éléments de M et $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'homomorphismes de I dans

$$A' = A/FA, \text{ vérifiant : } \sum_{i=1}^n f_i \cdot \rho(x_i) = \rho_I$$

relation dans laquelle ρ est l'homomorphisme canonique de A sur $A' = A/FA$ et ρ_I sa restriction à I'' .

3.3 Lemme : Pour toute localisation \mathcal{L} dans A , il y a équivalence des conditions suivantes :

(a) L'ensemble F topologisant et idempotent d'idéaux à gauche de l'anneau A , est plat.

(b) L'image $G = \Psi_A(F)$ de F par Ψ_A vérifie $G = \{A_F\}$.

Puisque l'anneau A_F est isomorphe à l'opposé de l'anneau des endomorphismes de TA dans A/C , si b et c sont des éléments de A_F , représentés par des homomorphismes $f : I \rightarrow A'$ et $g : J \rightarrow A'$, avec $I \in F$ et $J \in F$, alors $I' = f^{-1}[\rho(J)]$ est un élément de F et le produit $d = bc$ dans A_F est représenté par le composé $h = g' \circ f' : I' \rightarrow A'$, de la restriction f' de f à I' et de l'homomorphisme $g' : \rho(J) \rightarrow A'$, déterminé par g , puisqu'il vérifie $g(FA) \subset FA' = 0$.

En particulier, si a est un élément de A , l'élément $\Psi_A(a)$ de A_F est représenté par $f_a : A \rightarrow A'$, caractérisé par $f_a(\alpha) = \rho(\alpha)\rho(a)$, qui détermine $f'_a : A' \rightarrow A'$, caractérisé par $f'_a(\alpha') = \alpha'\rho(a)$. Le produit $b \cdot \Psi_A(a)$ dans A_F est donc représenté par $h = f'_a \circ f : I \rightarrow A'$, caractérisé par $h(\alpha) = f(\alpha)\rho(a)$ pour tout $\alpha \in I$, c'est-à-dire par $h = f \circ \rho(a)$.

La condition (b) signifie que pour tout $M \in F$, l'idéal à gauche de A_F engendré par $\Psi_A(M)$ est identique à A_F , c'est-à-dire qu'il existe des familles finies $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'éléments de M et $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'éléments de A_F , vérifiant

$$\sum_{i=1}^n b_i \Psi_A(x_i) = 1.$$

Si la condition (a) est vérifiée, d'après ce qui précède, la relation précédente est également vérifiée en choisissant pour b_i l'élément de A_F représenté par f_i , puisque ρ_I représente l'élément unité de A_F . Ainsi la condition (a) entraîne la condition (b).

Réciproquement si la condition (b) est vérifiée, les éléments b_i de A_F sont représentés par des homomorphismes $f_i'' : I_i' \xrightarrow{\nu} A'$ avec $I_i' \in F$. Puisque $I' = \bigcap_{i=1}^n I_i'$ est un élément de F , il est possible de remplacer I_i' par I' et f_i'' par sa restriction f_i' à I' . L'homomorphisme :

$$h = \sum_{i=1}^n f_i' \cdot \rho(x_i)$$

de I' dans A' représente donc l'unité de A_F et comme cette unité est aussi représentée par $\rho : A \rightarrow A'$, il existe $I \in F$, avec $I \subset I'$, tel que ρ_I soit la restriction de h à I . Si f_i est la restriction de f_i' à I , il en résulte la relation :

$$\sum_{i=1}^n f_i \cdot \rho(x_i) = \rho_I$$

Ainsi, la condition (b) entraîne la condition (a), ce qui achève la démonstration.

3.4 Définition : Un ensemble F topologisant et idempotent est de type fini s'il possède un sous ensemble cofinal, constitué d'idéaux à gauche de type fini.

3.5. Proposition : Pour toute localisation \tilde{L} dans A , il y a équivalence des conditions suivantes :

(a) l'ensemble F est plat,

(b) l'ensemble F est de type fini et le foncteur localisation L est exact.

(c) l'ensemble F est de type fini et en posant $\mathcal{A} = \{A\}$, il vérifie la condition suivante :

(P' $_{\alpha}$) " Pour tout $M \in F$, il existe :

- un idéal de type fini $I \in F$, ayant une famille de générateurs

$$\{a_j\}_{1 \leq j \leq m}$$

- une famille finie $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ d'éléments de M .

- une famille finie $\{v_{ij}\}_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ d'éléments de A , ces éléments vérifiant les conditions suivantes :

$$(Q_{\alpha}) \quad : \text{ Pour tout indice } j : \sum_{i=1}^{i=n} v_{ij} x_i \equiv a_j \pmod{\alpha}$$

(Q' $_{\alpha}$) : Pour tout indice i , toute relation de la forme :

$$\sum_{j=1}^{j=m} \lambda_j a_j \equiv 0 \pmod{\alpha}.$$

avec $\lambda_j \in A$, entraîne :

$$\sum_{j=1}^{j=m} \lambda_j v_{ij} \equiv 0 \pmod{\alpha} \quad "$$

Si F est plat, le lemme 3.3 et la proposition 2.2 montrent que la localisation \tilde{L} vérifie la condition (d) de la proposition 2.2, c'est-à-dire que $\Psi : A \rightarrow A_F$ est un épimorphisme plat à gauche et que C est le noyau du foncteur $(\Psi_A)^*$. Le lemme 3.1 entraîne alors que F est de type fini. Puisque toute localisation plate est exacte, la condition (a) entraîne la condition (b).

Le corollaire 2 de [1] (p. 414) montre que la condition (b) entraîne la condition (c) de la proposition 2.2 et d'après cette proposition 2.2 et le lemme 3.3, il en résulte que la condition (b) entraîne la condition (a).

Compte tenu du fait que tout ensemble F plat est de type fini, il est toujours possible de supposer que l'idéal à gauche $I \in F$, intervenant dans la condition (P) de la définition 3.2, est de type fini et possède une famille de générateurs $\{a_j\}_{1 \leq j \leq m}$.

Etant donné un homomorphisme $f : I \rightarrow A'$, soit $\{v_j\}_{1 \leq j \leq m}$ une famille d'éléments de A vérifiant $f(a_j) = \rho(v_j)$ pour tout indice j . Puisque $f(\alpha \cap I) \subset fA' = 0$, toute relation de la forme :

$$\alpha = \sum_{j=1}^{j=m} \lambda_j a_j \equiv 0 \pmod{\alpha'}$$

entraîne donc :

$$f(\alpha) = \sum_{j=1}^{j=m} \rho(\lambda_j) f(a_j) = 0.$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{j=1}^{j=m} \rho(\lambda_j) \rho(v_j) = \rho\left(\sum_{j=1}^{j=m} \lambda_j v_j\right) = 0$$

ou encore :

$$\sum_{j=1}^{j=m} \lambda_j v_j \equiv 0 \text{ (modulo } \mathfrak{a} \text{)}.$$

Réciproquement, si cette condition est satisfaite, la relation :

$$f\left(\sum_{j=1}^{j=m} \mu_j a_j\right) = \sum_{j=1}^{j=m} \rho(\mu_j) \rho(v_j)$$

caractérise bien un homomorphisme $f : I \rightarrow A'$.

Ces remarques montrent que la donnée d'une famille finie $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'homomorphismes de I dans A' , est équivalente à la donnée d'une famille $(v_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ d'éléments de A vérifiant la condition (Q'_a) .

La relation figurant dans la condition (P) se traduit donc par les relations

$$\sum_{i=1}^{i=n} f_i(a_j) \rho(x_i) = \rho_I(a_j)$$

pour tout indice j , c'est-à-dire par les relations :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \rho(v_{ij}) \rho(x_i) = \rho_I(a_j)$$

qui se traduisent par la condition (Q_a) .

Il en résulte bien l'équivalence des conditions (a) et (c), ce qui achève la démonstration.

3.6

3.6 Théorème : Pour toute localisation \hat{L} dans A , il y a équivalence des conditions suivantes :

(a) La localisation \hat{L} est plate.

(b) L'homomorphisme d'anneaux : $\Psi_A : A \rightarrow A_F$ est un épimorphisme plat à gauche et la sous-catégorie localisante C de A est le noyau du foncteur $(\Psi_A)^*$.

(c) L'image $G = \Psi_A(F)$ de F par Ψ_A vérifie $G = \{A_F\}$

(d) L'ensemble F topologisant et idempotent est plat.

L'équivalence des conditions (a), (b) et (c) résulte de la proposition 2.2. et l'équivalence des conditions (c) et (d) résulte du lemme 3.3.

3.7 Corollaire : *Si un ensemble F topologisant et idempotent possède un sous ensemble cofinal constitué d'idéaux projectifs de type fini, alors*

(a) *L'ensemble F est plat.*

(b) *L'homomorphisme d'anneaux $\Psi_A : A \rightarrow A_F$ est un épimorphisme plat à gauche.*

La condition (a) résulte du corollaire 1.3, qui montre que le foncteur localisation L est exact, ce qui entraîne la condition (b) de la proposition 3.5. La condition (b) résulte alors du théorème 3.6.

3.8 Remarques :

(a) D'après la proposition 2.2, le théorème 3.6 et la proposition 3.5 si le foncteur localisation L est isomorphe au foncteur $(\Psi_A)_* (\Psi_A)^*$, c'est-à-dire si $LM = A_F \otimes_A M$, l'ensemble F est de type fini et le foncteur localisation L est exact. Ce résultat constitue une réciproque du corollaire 2 de [1] (p. 414).

(b) Il est facile de vérifier que la condition (P'_a) entraîne la condition (e) de la proposition 1.2, c'est-à-dire que le foncteur localisation L est exact. Ainsi, la condition (c) de la proposition 3.5 entraîne directement la condition (b).

(c) D'après la proposition 2.1 de [4], un idéal à gauche I de A est un idéal projectif de type fini si et seulement si, il existe des familles finies $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'éléments de I et $(g_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'homomorphismes de I dans A tels que pour tout $x \in I$:

$$\sum_{i=1}^{i=n} g_i(x) \cdot x_i = x.$$

Cette caractérisation des idéaux projectifs de type fini, montre donc que les hypothèses du corollaire 3-7, entraînent la condition (P) en choisissant pour I un idéal projectif de type fini contenu dans M. Il en résulte aussi une autre démonstration de la condition (a) du corollaire 3-7.

De plus, lorsque $\alpha = FA = 0$, la condition (P), qui entraîne que l'idéal M est projectif de type fini s'il est possible de choisir $I = M$, exprime en somme une propriété de "projectivité globale" des éléments de l'ensemble F.

4. Applications aux épimorphismes plats d'anneaux.

Etant donné un anneau A, avec élément unité, deux homomorphismes d'anneaux $\phi : A \rightarrow B$ et $\phi' : A \rightarrow B'$, de source A, seront dits équivalents s'il existe un isomorphisme $u : B' \rightarrow B$, vérifiant : $\phi = u \circ \phi'$.

Pour toute localisation \tilde{L} dans A, déterminée par un ensemble F topologisant et idempotent, soit $\lambda(\tilde{L}) = \mu(F)$, la classe d'équivalence d'homomorphismes d'anneaux de source A, caractérisée par un homomorphisme $\psi_A : A \rightarrow A_F$, de A dans le localisé A_F .

Soient λ et μ les applications déterminées par ces conditions.

4.1 Théorème : Avec les notations précédentes, pour tout anneau A avec élément unité, l'application λ [resp. μ] est une bijection de l'ensemble des localisations exactes \tilde{L} dans A [resp. de l'ensemble des ensembles F topologisants, idempotents et plats] sur l'ensemble des classes d'équivalences d'épimorphismes plats à gauche de source A.

Pour toute localisation plate \tilde{L} dans A, déterminée par un ensemble F topologisant, idempotent et plat, le théorème 3-6 montre que $\lambda(\tilde{L}) = \mu(F)$ est une classe d'équivalence d'épimorphismes plats à gauche de source A. De plus, les applications λ et μ sont injectives, puisque réciproquement, \tilde{L} et F sont parfaitement déterminés par la sous catégorie localisante C de A, noyau du foncteur $(\psi_A)^*$.

Enfin, ces applications sont surjectives, puisque d'après le lemme 3-1, toute classe d'équivalence d'épimorphismes plats à gauche de source A , est l'image par λ d'une localisation \mathcal{L} dans A et que cette localisation est plate puisque la sous catégorie localisante C de A , qui lui est associée, est le noyau du foncteur ϕ^* et par suite du foncteur $(\Psi_A)^*$, ce qui montre que la condition (d) de la proposition 2-2 est vérifiée.

4.2 Corollaire (N. Popescu et T. Spircu) [3] :

Pour tout homomorphisme d'anneaux $\phi : A \longrightarrow B$, il y a équivalence des conditions suivantes :

- (a) L'homomorphisme d'anneaux $\phi : A \longrightarrow B$ est un épimorphisme plat à gauche.
- (b) L'ensemble F des idéaux à gauche I de A tels que $B\phi(I) = B$ est topologisant et idempotent [resp. la sous catégorie C de A noyau du foncteur ϕ^* est localisante] et de plus, il existe un isomorphisme $u : A_F \longrightarrow B$, tel que $\phi = u \circ \Psi_A$.

Le lemme 3-1 montre que la condition (a) entraîne la condition (b).

Si la sous catégorie C de A , noyau du foncteur ϕ^* , est localisante, il est immédiat qu'elle est associée à l'ensemble F topologisant et idempotent constitué par les idéaux à gauche I de A tels que $B\phi(I) = B$.

La seconde hypothèse de la condition (b) implique donc la première. Lorsqu'elle est réalisée, elle entraîne que l'image $G = \Psi_A(F)$ de F par Ψ_A , vérifie $G = \{A_F\}$, c'est-à-dire la condition (e) de la proposition 2-2. La proposition 2-2 et le lemme 3-3 entraînent que l'ensemble F est plat.

Le théorème 4-1 montre alors que la condition (b) entraîne la condition (a).

4.3 Lemme : Etant donnée une partie Σ de l'anneau A , telle que les idéaux à gauche de A qui contiennent un élément de Σ , constituent un ensemble $F = F_\Sigma$ topologisant et idempotent [par exemple, une partie multiplicative Σ vérifiant la condition :

(*) « Pour tout $s \in \Sigma$ et tout $a \in A$, il existe $t \in \Sigma$ et $b \in A$, tels que $ta = bs$ »]

alors, il y a équivalence des conditions suivantes :

(a) L'ensemble $F = F_\Sigma$ est plat.

(b) En posant $\mathcal{A} = FA$, la partie Σ vérifie la condition suivante

"Pour tout $\sigma \in \Sigma$, il existe $s \in \Sigma$ et $v \in A$, tels que :

$$(1) v\sigma \equiv s \quad (\text{modulo } \mathcal{A}).$$

(2) Toute relation de la forme :

$$\lambda s \equiv 0 \quad (\text{modulo } \mathcal{A})$$

avec $\lambda \in A$, entraîne

$$\lambda s \equiv 0 \quad (\text{modulo } \mathcal{A}) \quad "$$

De plus, lorsque Σ est une partie multiplicative vérifiant (*), ces conditions équivalentes sont réalisées lorsque Σ vérifie la condition :

(**). "Si $a \in A$, si $s \in \Sigma$ et si $as = 0$ alors il existe $t \in \Sigma$, tel que $ta=0$ ".

La détermination de $F = F_\Sigma$ montre que la condition (b) entraîne la condition (P'_a) de la proposition 3-5, ce qui montre que l'ensemble F est plat. Ainsi, la condition (b) entraîne la condition (a).

Réciproquement, si F est plat, pour tout $\sigma \in \Sigma$, en choisissant $M = A\sigma$, la condition (P'_a) entraîne qu'il existe $s \in \Sigma$, une famille finie $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'éléments $n_i = \alpha_i \sigma$ de M et une famille $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'éléments de A , ces éléments vérifiant les conditions suivantes :

$$\sum_{i=1}^{i=n} v_i x_i = \sum_{i=1}^{i=n} v_i x_i \sigma \equiv s \quad (\text{modulo } \mathcal{A})$$

et pour tout indice i , toute relation de la forme :

$$\lambda s \equiv 0 \pmod{\mathcal{A}}$$

entraîne

$$\lambda v_i \equiv 0 \pmod{\mathcal{A}}$$

Puisque \mathcal{A} est un idéal bilatère, il est immédiat que la condition (b) est vérifiée en choisissant :

$$v = \sum_{i=1}^{i=n} v_i \alpha_i$$

Aussi, la condition (a) entraîne la condition (b).

Enfin, lorsque Σ est une partie multiplicative vérifiant la condition (*), l'idéal bilatère \mathcal{A} de A est constitué par les éléments a de A , pour lesquels il existe $t \in \Sigma$, tel que $ta = 0$. Ainsi, pour toute relation de la forme :

$$\lambda s \equiv 0 \pmod{\mathcal{A}}$$

avec $\lambda \in A$ et $s \in \Sigma$, il existe $s' \in \Sigma$, tel que $s'\lambda s = 0$, et en posant $a = s'\lambda$,

la condition (***) entraîne l'existence d'un élément $t \in \Sigma$, tel que $ta = ts'\lambda = 0$,

et puisque $ts' \in \Sigma$, il en résulte $\lambda \in \mathcal{A}$, c'est-à-dire :

$$\lambda \equiv 0 \pmod{\mathcal{A}}$$

Puisque \mathcal{A} est un idéal bilatère, la condition (***) entraîne alors la condition (b) en posant $s = \sigma$ et $v = 1$.

4.4 Corollaire : Pour tout homomorphisme d'anneaux $\phi : A \rightarrow B$ surjectif, il y a équivalence des conditions suivantes :

(a) L'homomorphisme surjectif $\phi : A \longrightarrow B$ est un épimorphisme plat à gauche.

(b) Le noyau \mathcal{A} de ϕ est un idéal bilatère fortement idempotent à gauche

[2], c'est-à-dire qu'il vérifie la condition suivante :

"Pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, il existe au moins $\beta \in \mathcal{A}$, tel que $\alpha = \beta\alpha$ ".

Il est immédiat que l'ensemble F des idéaux à gauche I de A , vérifiant $B\phi(I) = B$, c'est-à-dire $\phi(I) = B$, est constitué par les idéaux à gauche de A qui contiennent un élément de la partie multiplicative $\Sigma = 1 - \mathcal{a}$.

D'après le corollaire 4-2, la condition (a) entraîne $\mathcal{a} = FA$. Il en résulte que pour tout $\alpha \in \mathcal{a}$, il existe $s \in \Sigma$, de la forme $s = 1 - \beta$ avec $\beta \in \mathcal{a}$, tel que $s\alpha = 0$, ce qui entraîne $\alpha = \beta\alpha$. Aussi la condition (a) entraîne la condition (b).

Réciproquement, si la condition (b) est réalisée, il est facile de vérifier que la partie multiplicative $\Sigma = 1 - \mathcal{a}$, vérifie les conditions (*) et (**). Le lemme 4-3 entraîne que l'ensemble $F = F_\Sigma$ est topologisant et idempotent. Il est facile de vérifier que \mathcal{a} est le noyau FA de l'homomorphisme d'anneaux $\Psi_A: A \longrightarrow A_F = A_\Sigma$. Puisque tout élément de A_Σ est de la forme $[\Psi_A(s)]^{-1} \Psi_A(a)$ avec $s \in \Sigma$ et $a \in A$ et puisque $\Psi_A(s) = 1$, il en résulte que Ψ_A est surjective. Il existe donc un isomorphisme $u: A_F \longrightarrow B$, tel que $\phi = u \circ \Psi_A$ et l'ensemble $F = F_\Sigma$ topologisant et idempotent est constitué par les idéaux à gauche I de A vérifiant $B\phi(I) = B$. Le corollaire 4-2 montre alors que la condition (b) entraîne la condition (a).

4.5 Remarque :

Une démonstration du corollaire 4-4 a été obtenue dans [2] et il a été montré que les idéaux bilatères fortement idempotents à gauche interviennent dans la caractérisation des mono sous catégories, abéliennes ou localisantes, de la catégorie des A -modules à gauche.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. GABRIEL : Des catégories abéliennes,
Bull. Soc. Math. France, t. 90 1962 p.323-448
(Thèse Sc. Math. Paris, 1961).
- [2] M. HACQUE : Mono sous catégories d'une catégorie de modules,
Publications du Département de Math. Fac. Sc. de Lyon,
t. 6 1969 fasc. 1 p. 13.
- [3] N. POPESCU
et T. SPIRCU : Sur les épimorphismes plats d'anneaux.
Comptes rendus, 268, série A, 1969, p. 376-379.
- [4] L. SILVER : Non commutative localizations and applications,
Journal of Algebra, 7, 1967, p. 44-76.

Manuscrit remis le 30 avril 1969.

M. HACQUE
Maître de Conférences
Département de Mathématiques
Faculté des sciences
43, bd du 11 novembre 1918
VILLEURBANNE