PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

R. OUZILOU

Sur une axiomatique métrique de la géométrie euclidienne

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1970, tome 7, fascicule 1
, p. 1-39

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1970__7_1_1_0>

SUR UNE AXIOMATIQUE METRIQUE DE LA GEOMETRIE EUCLIDIENNE (1)

par R. OUZILOU

A la diffèrence de l'algèbre dont l'enseignement se renouvelle avec succès, la géométrie reste dans le secondaire ce qu'elle était du temps de nos pères ... elle végète, et ce qui est grave c'est que cette stagnation fait qu'on ne songe plus à la géométrie dans l'Enseignement Supérieur : à preuve la faible part qui lui est réservée dans le programme de licence. Et pourtant que de choses on pourrait faire en géométrie avec les acquis de l'algèbre et tout particulièrement avec la notion d'invariants de groupes de transformation ! Beaucoup y ont songé - parmi eux F. Klein avec son programme d'Erlangen dont on va bientôt célébrer le centenaire - mais leur audience est restée faible car il n'est pas facile d'ébranler l'édifice euclidien. A quoi cela tient-il ? A des préjugés fortement ancrés bien sûr mais aussi à l'absence d'une solution de rechange globale alors qu'en algébre, et c'est qui a fini par vaincre la résistance des conservateurs, on avait pu apporter pour l'Enseignement Secondaire un programme précis fondé sur des notions que tous les professeurs de mathématiques commencent à bien connaître maintenant.

Cependant, si le problème de l'enseignement de la géométrie demeure on ne l'oublie pas pour autant et, au sommet, la bataille fait rage. D'un côté, les traditionnalistes qui affirment que les livres d'Euclide sont indestructibles (Qui oserait, à bon droit, prétendre le contraire ?) et qui estiment que la géométrie apporte à l'enfant une première vision du monde réel, lui donne le goût de la précision et lui apprend à raisonner ; de tels arguments appuyés sur une longue pratique méritent qu'on leur prête attention. La géométrie a aussi une valeur formatrice que l'algèbre seule ne peut apporter, nous aurons l'occasion de revenir sur ce point. D'un autre côté, les novateurs qui, voulant que dès le début la géométrie s'appuie sur des concepts précis, rappelent non sans raison qu'inculquer à l'enfant des concepts flous (quelquefois si flous qu'ils en deviennent faux) amène l'enfant devenu adulte à se détourner d'une science imprécise au point d'en oublier tous les principes.

(1) Cycle de conférences faites à l'I.R.E.M. de Lyon en avril et mai 1969.

Pour la rénovation de la géométrie, deux tendances s'affrontent : l'une veut donner à la géométrie ses propres fondements ; les concepts de droite, de parallélisme, d'orthogonalité sont alors définis au moyen d'axiomes. Cette idée n'est pas neuve et remonte à Hilbert, au début du siècle ; elle fut reprise par G. Choquet qui présenta, il y a quelques années une axiomatique de la géométrie euclidienne nettement plus accessible que celle de Hilbert. Mais, malgré ces progrès, certains jugent que ces axiomes sont encore trop nombreux et qu'ils échappent en partie à l'intuition sensible du débutant. L'autre tendance, dont le porte-parole le plus éloquent est sans nul doute J.Dieudonné, veut, en suivant les idées de Descartes sur la géométrie analytique, retrouver la géométrie à partir de l'algèbre linéaire : les êtres géométriques sont alors définis de façon vectorielle et il n'y a plus besoin d'axiomes. Ceci est fort séduisant pour un mathématicien professionnel, mais il faut bien reconnaître qu'il est téméraire de présenter ainsi la géométrie à des élèves débutant dans le secondaire et dont le bagage algébrique est au mieux encore bien léger ; ou alors, il faudrait se résoudre à ne plus faire de géométrie tant que l'enfant ne serait pas en mesure de calculer : option dangereuse qui pousserait l'enfant à se détourner du visuel au profit du calcul rigoureux mais abstrait. Certes, l'algèbre linéaire est la base de toutes les mathématiques mais l'initiation à cette discipline ne peut se faire sans précaution : la représentation graphique des problèmes linéaires de pratique courante, qui garde une valeur didactique indiscutable, fait appel à des rudiments de géométrie.

1. L'importance de la notion de distance en géométrie euclidienne :

Pour Euclide, comme pour tous les mathématiciens de son temps, les mathématiques, partant de faits admis de tous (les axiomes au sens ancien), ont pour objet l'étude des grandeurs physiques. Cette étude a un double aspect : d'une part elle consiste à mesurer les grandeurs - ce qui conduit à l'arithmétique - d'autre part elle consiste à représenter les grandeurs - ce qui conduit à la géométrie Il ne faut donc pas s'étonner de l'imprécision des concepts de la géométrie euclidienne : le point, la droite sont pour Euclide des choses naturelles. Cependant, de ces données sensibles, Euclide dégage par le seul raisonnement les principes de la géométrie. Le génie d'Euclide consiste à avoir réduit ces principes à peu de choses : la notion de distance, la notion d'angle qu'on retrouve en permanence dans les livres d'Euclide. Aujourd'hui, on peut dire que seule la notion de distance est essentielle à la géométrie euclidienne, la notion d'angle s'y rattachant.

Vouloir donc traiter en géométrie euclidienne les propriétés affines avant les propriétés métriques est un leurre : chez Euclide, elles sont étroitement mêlées. Vouloir respecter la chronologie des livres d'Euclide où les propriétés des triangles rectangles sont traitées après celles des parallèles procède plus d'un respect de la lettre que d'un respect de l'esprit.

Si l'on veut donner de la géométrie euclidienne un modèle exhaustif, ce modèle devra avant tout être un *espace métrique*.

Rappelons qu'un espace métrique est la donnée d'un ensemble E et d'une application $d : E \times E \to R$ astreinte aux conditions suivantes :

(i) **Axiome du triangle :**

$$d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z) \qquad x, y, z \in E$$

(ii) **Axiome de symétrie :**

$$d(x,y) = d(y,x)$$

(iii) **Axiome de séparation :**

$$d(x,y) = 0 \iff x = y$$

Les axiomes (ii) et (iii) sont chez Euclide des données sensibles alors qu'il déduit l'axiome (i) des propriétés du triangle, i.e, essentiellement des cas d'égalité des triangles sur lesquels il y a beaucoup à dire quant à l'ordre et quant à la chronologie. Si Euclide a cru bon de démontrer l'inégalité du triangle c'est parce que pour lui la notion d'angle avait une grande importance. Aujourd'hui il n'y a aucune difficulté à faire admettre que cette inégalité est un axiome de la géométrie : un simple report de distances effectué au compas permet à l'enfant de la constater.

Comme une hirondelle ne fait pas le printemps, un espace métrique seul ne pourra faire la géométrie euclidienne ; il faudra retenir d'autres concepts qui s'y rattachent. Pour cela point n'est besoin de trahir l'esprit d'Euclide : la notion de déplacement (ou de superposition), bien claire chez lui, se présentera sous la forme plus général de notion d'*isométrie*, i.e, de transformation conservant les distances. L'importance de cette notion apparait au premier livre d'Euclide, à preuve la définition des figures égales :

"Deux figures sont *égales* lorsqu'elles sont *superposables*"

Si Euclide éprouve le besoin de définir l'égalité des figures, c'est qu'il sait qu'elle ne va pas de soi : cette égalité n'est pas une identité et cet énoncé n'est qu'une façon commode d'exprimer une situation dont on veut tirer partie sans modification de notation ; en bref, cet énoncé des figures égales est plus une convention qu'une définition.

Aujourd'hui, avec les progrès du langage mathèmatique, on peut redonner à cette convention le sens d'une définition. Pour cela, considérons l'ensemble $\mathcal{P}$(E) des parties d'un espace métrique E et disons que deux parties A et B de E sont superposables s'il existe une isométrie σ de E, i.e, une isométrie de E sur lui-même, telle que $\sigma(A) = B$. Comme les isométries de E forment évidemment un groupe, la relation de superposition est une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}$(E). Par figure de E nous entendrons une classe de superposition de $\mathcal{P}$(E) ; on peut dire alors que deux figures $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ de E sont égales si, et seulement si, on peut trouver un représentant A de $\mathcal{A}$ et un représentant B de $\mathcal{B}$ qui soient superposables.

Si l'on prend pour E l'espace métrique du plan euclidien, un angle de E se définit alors comme la figure de E représentée par la réunion de deux demi-droites issues d'un même point. Cette façon de voir permet de définir correctement la somme de deux angles du plan euclidien.

2. La géométrie des espaces de Hilbert :

Rappelons qu'un espace de Hilbert réel est la donnée d'un espace vectoriel réel H et d'un produit scalaire $(x,y) \to (x/y)$ sur H, i.e, une forme bilinéaire symétrique positive non dégénérée :

$$(x_1 + x_2 / y) = (x_1 / y) + (x_2 / y) \qquad x_1, x_2, y \in H$$

$$(\alpha x / y) = \alpha (x / y) \qquad \alpha \in R$$

$$(x / y) = (y / x)$$

$$x \neq 0 \Rightarrow (x / x) > 0$$

On a alors sur H une norme

$$\|x\| = (x / x)^{1/2}$$

i.e :

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \qquad x, y \in H$$

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\| \qquad \alpha \in R$$

$$\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$$

d'où une distance : $d(x,y) = \|x - y\|$

Pour achever la définition, on suppose que l'espace métrique (H,d) est complet, i.e., toute suite de Cauchy de H est convergente.

L'exemple classique d'un espace de Hilbert réel est fourni par un espace R^n muni du produit scalaire euclidien $(X,Y) \to X^t.Y$.

Le produit scalaire d'un espace de Hilbert réel est déterminé par la norme de cete espace suivant l'égalité :

$$(x / y) = \frac{1}{2}\left(\| x + y \|^2 - \| x \|^2 - \| y \|^2 \right)$$

La norme d'un espace de Hilbert satisfait à l'égalité du parallélogramme :

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2\left(\| x \|^2 + \| y \|^2 \right)$$

Réciproquement, si la norme d'un espace de Banach (i.e, un espace normé complet) satisfait à l'égalité du parallélogramme, cette norme provient d'un produit scalaire et cet espace de Banach devient de façon canonique un espace de Hilbert,

Une isométrie d'un espace de Hilbert se décompose de façon canonique en $\vec{h} \circ u$ où $\vec{h}$ est la translation définie par un vecteur h de H où u est un automorphisme linéaire unitaire de H , i.e : $\| u(x) \| = \| x \|$, $x \in H$.Pour deux isométries $\vec{h} \circ u$ et $\vec{k} \circ v$ on a :

$$(\vec{k} \circ v) \circ (\vec{h} \circ u) = \overrightarrow{k + v(h)} \circ (v \circ u)$$

Les sous-espaces affines d'un espace de Hilbert H , i.e. les translatés des sous-espaces fermés de H possèdent toutes les propriétés des droites et des plans de la géométrie euclidienne, ce qui tient au :

Théorème de la projection orthogonale :

Soit M *un sous-espace affine d'un espace de Hilbert* H. *Alors, pour tout point* x *de* H *il existe un point unique* $p_M(x)$ *tel que* $x - P_M(x)$ *soit orthogonal à* M , *i e :*

$$(x - p_M(x) / m_1 - m_2) = 0 \qquad m_1 , m_2 \in M$$

Ce théorème est d'une portée considérable, en voici quelques conséquences.

Par définition, les *symétries* d'un espace métrique E sont les isométries involutives s de E , i.e., $s^2 = id_E$. Si s est une symétrie d'un espace de Hilbert H , il est clair que l'ensemble I(s) des points de H invariants par s est un sous-espace affine de H.

Le théorème de la projection orthogonale permet d'affirmer qu'on obtient ainsi tous les sous-espaces affines de H ; plus précisément, on a le :

Théorème fondamental : *L'application* $s \to I(s)$ *est une bijection de l'ensemble des symétries de* H *sur l'ensemble des sous-espaces affines de* H.

La symétrie définie par un sous-espace affine M de H est

$$s_M = 2\, p_M - i\, d_H$$

Corollaire 1 : *Pour tout point* x *de* H *et pour tout sous-espace affine* M *de* H, *l'ensemble* M^x *des droites de* H *passant par* x *et orthogonales à* M *est un sous-espace affine de* H.

Ce sous-espace M^x est associé à la symétrie $\overrightarrow{x + u(x)_\circ(-u)}$

Corollaire 2 : *Si* H *est de dimension finie, toute isométrie* $\phi : M \to N$ *de deux sous-espaces affines se prolonge suivant une isométrie* Φ *de* H.

Pour cela, on peut supposer que M et N passent par l'origine et que ϕ conserve l'origine. Les sous-espaces M et N étant de même dimension, on a une isométrie $\theta : M^\circ \to N^\circ$ et l'application linéaire :

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \theta \end{pmatrix} : \; H = M \oplus M^\circ \to N + N^\circ = H$$

répond à la question.

Caractérisation métrique des droites d'un Hilbert.

Soit a, b deux points distincts d'un espace de Hilbert.
Si $x = ta + (1 - t)b$, $t \in R$, est un point de la droite ab , on a alors :

$$d(x,a) + d(x,b) = d(a,b)$$

ou $$|d(x,a) - d(x,b)| = d(a,b)$$

suivant que x appartient ou non au segment ab.

Inversement, si un point x est tel que

$$d(x,a) + d(x,b) = d(a,b)$$

désignons par p(x) la projection orthogonale de x sur la droite ab ; ce point appartient au segment ab du fait que :

$$d(a,p(x)) \leqslant d(a,x) \leqslant d(a,b) \quad \text{et} \quad d(b,p(x)) \leqslant d(b,x) \leqslant d(b,a)$$

ce qui fait que :

$$d(p(x)),a) + d(p(x),b) = d(a,b)$$

Mais comme :

$$d(x,a)^2 - d(x,b)^2 = d(p(x),a)^2 - d(p(x),b)^2$$

on a alors :

$$d(x,a) - d(x,b) = d(p(x),a) - d(p(x),b)$$

d'où

$$d(x,a) = d(p(x),a) \quad , \quad d(x,b) = d(p(x),b)$$

ce qui donne $x = p(x)$

On a donc la :

Proposition : *Soit* a, b *deux points distincts d'un espace de Hilbert. Alors, les points* x *du segment* [a,b] *sont caractérisés par :*

$$d(x,a) + d(x,b) = d(a,b)$$

et les autres points y *de la droite* ab *sont caractérisés par :*

$$|d(x,a) - d(x,b)| = d(a,b)$$

Corollaire : *Les droites d'un espace de Hilbert réel* H *sont les images de* R *par les applications* $f : R \to H$ *telles que :*

$$d(f(\alpha), f(\beta)) = |\alpha - \beta| \qquad ; \qquad \alpha,\beta \in R$$

i.e, les isométries de R *dans* H.

Ce résultat permet d'avoir pour les droites d'un espace de Hilbert H une définition purement métrique faisant abstraction de la structure vectorielle de H. A partir de là, on peut définir une sous-variété de H comme étant une partie M de H telle que, pour toute paire $\{x,y\}$ de points de M, la droite xy soit contenue dans M.

Nous allons démontrer maintenant dans un espace de Hilbert le "troisième cas d'égalité des triangles". Pour cela, il nous faut deux lemmes :

Lemme 1 : *Soit* a, b *deux points distincts d'un espace de Hilbert et* α *un nombre réel. L'ensemble des points* x *de* H *tels que :*

$$d(x, a)^2 - d(x, b)^2 = \alpha$$

est un hyperplan affine orthogonal à la droite ab.

Pour cela, il suffit de remarquer que :

$$d(x, a)^2 - d(x, b)^2 = (2x / a - b) - (a + b / a - b)$$

Définition : *Dans le cas* $\alpha = 0$, *l'hyperplan des points* x *de* H *tels que :*

$$d(x, a) = d(x, b)$$

est le médiateur de la paire $\{a, b\}$. *A cet hyperplan correspond une symétrie de* H *qui intervertit* a *et* b.

Lemme 2 : *Soit* a, b, a', b', *quatre points d'un espace de Hilbert* H *tels que :*

$$d(a,b) = d(a',b')$$

Alors, il existe une isométrie φ *de* H *telle que :*

$$\varphi(a) = a' \quad , \quad \varphi(b) = b'$$

On commence par appliquer la translation $\overrightarrow{aa'} = a'-a$.

Si $b' = \overrightarrow{aa'}(b)$, i.e, $a+b$ cette translation est l'isométrie voulue ; sinon on compose $\overrightarrow{a'a}$ avec la symétrie définie par le médiateur de $\{ b' , \overrightarrow{aa'}(b) \}$.

Théorème (3ème cas d'égalité) :

Soit a, b, a', b', c' *des points d'un espace de Hilbert* H *tels que :*

$$d(a,b) = d(a',b') \; ; \; d(b,c) = d(b',c') \; ; \; d(a,c) = d(a',c')$$

Dans ces conditions, il existe une isométrie φ *de* H *telle que :*

$$\varphi(a) = a' \; ; \; \varphi(b) = b' \; ; \; \varphi(c) = c'$$

Preuve : Si deux points a, b, c sont confondus, on est dans le cas du lemme 2 ; sinon, on applique ce lemme pour avoir une isométrie de H qui transforme a en a' et b en b'. On est alors ramené à démontrer le théorème pour $a = a'$, $b = b'$, $a \neq b$. Si $c = c'$, c'est terminé, sinon les points a et b sont, d'après le lemme 1, dans le médiateur de $\{c, c'\}$ et la symétrie par rapport à ce médiateur répond à la question puisqu'elle transforme c en c' et laisse invariants les points a et b

c.q.f.d.

Ces quelques résultats suffisent à nous convaincre que les espaces de Hilbert réels sont les modèles accomplis de la géométrie euclidienne et nous invitent à chercher *une axiomatique des espaces de Hilbert qui soit accessible à des débutants n'ayant pas encore connaissance de l'algèbre linéaire* ; c'est ce que nous allons faire maintenant.

3. Caractérisation de la distance d'un espace de Hilbert.

Posons nous la question suivante : à quelles conditions un espace métrique complet peut-il être muni d'une structure d'espace de Hilbert compatible ? (i.e. la distance d'un tel espace de Hilbert doit coïncider avec la distance de l'espace métrique considéré). C'est la notion de *symétrie ponctuelle* qui va permettre d'apporter une réponse à cette question. Nous dirons qu'une symétrie s d'un espace métrique est ponctuelle s'il existe un point de E et un seul invariant par s.

Exemple : les symétries ponctuelles d'un espace de Hilbert sont les transformations $x \mapsto 2a - x$.

Remarque : Il existe des espaces métriques complets qui n'ont pas de symétrie ponctuelle. C'est le cas des sphères d'un espace de Hilbert : en effet, soit S une telle sphère et s une symétrie de S ; il est clair que s préserve pour deux points la propriété d'être diamétralement opposés et, par conséquent, si s laisse fixe un point de S elle laisse fixe le point diamétralement opposé.

Axiome 1 (Axiome du milieu)

Nous dirons qu'un espace métrique E satisfait à l'axiome du milieu si pour tout couple (a,b) de points de E il existe une symétrie ponctuelle unique s telle que $s(a) = b$

Le point fixe $a * b$ de cette symétrie sera appelé le milieu de (a,b).

Si un espace métrique satisfait à l'axiome du milieu, il a alors les :

Propriétés élémentaires :

1/ $a * b = b * a$; $a, b \in E$

2/ $a * a = a$

3/ Tout point a de E est le point fixe d'une symétrie ponctuelle unique $\dot{a}$ de E.

4/ $\dot{a} \circ \dot{b} = \dot{b} \circ \dot{a} \Rightarrow a = b$

En effet :

$$\dot{a}(\dot{b}(a)) = \dot{b}(\dot{a}(a)) = \dot{b}(a)$$

donne $\dot{b}(a) = a$ d'où $a = b$

Remarque : Un espace métrique peut avoir des symétries ponctuelles sans satisfaire à l'axiome du milieu. C'est le cas d'une boule $B'(a,r) = \{a \in H\ ,\ d(a,x) \leqslant r\}$ d'un espace de Hilbert H : en effet, il est aisé de voir que toute isométrie de B' se prolonge univoquement en une isométrie de H qui laisse fixe le centre a de a de cette boule, ce qui fait que la seule symétrie ponctuelle de B' est celle de point fixe a.

En général le composé de deux symétries ponctuelles d'un espace métrique n'est pas une symétrie, e.g. le composé des symétries ponctuelles $x \longmapsto 2a - x$ et $x \longmapsto 2b - x$ d'un espace de Hilbert est la translation $2\vec{ab}$; cependant, le composé de trois symétries ponctuelles $x \longmapsto 2a - x$ $x \longmapsto 2b - x$, $x \longmapsto 2c - x$ d'un espace de Hilbert est la symétrie ponctuelle $x \longmapsto 2(a + c - b) - x$

Axiome 2 (Axiome du triple)

Nous dirons qu'un espace métrique E satisfait à l'axiome du triple s'il satisfait à l'axiome du milieu et si le *composé de trois symétries ponctuelles* $\dot{a} \circ \dot{b} \circ \dot{c}$ de E est une symétrie *ponctuelle*. Dans ces conditions, on a les :

Propriétés élémentaires :

5/ $\dot{a} \circ \dot{b} \circ \dot{c} = \dot{c} \circ \dot{b} \circ \dot{a}$; $a, b, c \in E$

En effet, on a alors :

$$(\dot{a} \circ \dot{b} \circ \dot{c}) \circ (\dot{a} \circ \dot{b} \circ \dot{c}) = id_E$$

et $$(\dot{a} \circ \dot{b} \circ \dot{c}) \circ (\dot{c} \circ \dot{b} \circ \dot{a}) = id_E$$

6/ $\underline{\dot{a} \circ \dot{c} = \dot{c} \circ \dot{b} \iff c = a * b}$

Pour cela il suffit de montrer que les symétries $\dot{a} \circ \dot{c} \circ \dot{b}$ et $\dot{c}$ sont identiques si, et seulement si $c = a * b$.

Pour $c = a * b$, on a :

$$\dot{a} \circ \dot{c} \circ b(b) = \dot{a} \circ \dot{c}(b) = \dot{a}(a) = a$$

d'où $\quad \dot{a} \circ \dot{c} \circ \dot{b} = \dot{c}$ d'après l'axiome 1.

Inversement si un point c est tel que :

$$\dot{a} \circ \dot{c} \circ \dot{b} = \dot{c}$$

alors $\quad \dot{a}\,(\dot{c}(b)) = \dot{c}(b)$

d'où $\quad \dot{c}(b) = a \quad$, $\quad$ i.e. $\quad c = a * b$ d'après l'axiome 1.

De façon plus générale, on a la :

Proposition 1 : *Soit* E *un espace métrique satisfaisant aux axiomes 1 et 2. Alors, pour tout quadruple* (a, b, c, d) *de points de* E , *on a :*

$$\dot{b} \circ \dot{a} = \dot{d} \circ \dot{c} \iff a * d = b * c$$

$\Longrightarrow$ Avec $a * d = u$, on a alors d'après la propriété 6 :

$$\dot{a} \circ \dot{u} = \dot{u} \circ \dot{d}$$

d'où $\quad \dot{a} \circ \dot{u} \circ \dot{c} = \dot{u} \circ \dot{d} \circ \dot{c} = \dot{u} \circ \dot{b} \circ \dot{a}$

i.e, d'après la propriété 5 :

$$\dot{c} \circ \dot{u} \circ \dot{a} = \dot{u} \circ \dot{b} \circ \dot{a}$$

d'où $\quad \dot{c} \circ \dot{u} = \dot{u} \circ \dot{b}$

et la propriété 6/ donne alors $\quad u = b * c$

$\Longleftarrow$ Avec $a * d = u = b * c$ la propriété 6/ donne :

$$\dot{a} \circ \dot{u} = \dot{u} \circ \dot{d} \qquad \text{et} \qquad \dot{b} \circ \dot{u} = \dot{u} \circ \dot{c}$$

d'où
$$\dot{b} \circ \dot{a} \circ \dot{u} = \dot{b} \circ \dot{u} \circ \dot{d} = \dot{u} \circ \dot{c} \circ \dot{d}$$

et la propriété 5/ donne alors :

$$\dot{b} \circ \dot{a} \circ \dot{u} = \dot{d} \circ \dot{c} \circ \dot{u}$$

d'où
$$\dot{b} \circ \dot{a} = \dot{d} \circ \dot{c}$$

Corollaire : *Pour tout triple* (a, b, c) *de points de* E, *il existe un point unique* d *tel que :*

$$\dot{b} \circ \dot{a} = \dot{d} \circ \dot{c}$$

En effet, cette égalité équivaut à :

$$a * d = b * c$$

i.e.
$$\dot{\widehat{a * d}}(a) = \dot{\widehat{b * c}}(a)$$

i.e.
$$d = \dot{\widehat{b * c}}(a)$$

Définition : *Sous les conditions équivalentes de la proposition 1 nous dirons que le couple* (a,b) *est <u>équipollent</u> au couple* (c,d). *La relation d'équipollence* $\mathcal{E}$ *ainsi définie sur* E *est une relation d'équivalence dont les classes seront appelées les <u>vecteurs libres</u> de* E.

Définition : *Soit* E *un espace métrique satisfaisant aux axiomes 1 et 2. Nous appelerons translation de* E *le composé de deux symétries ponctuelles de* E.

Théorème 2 : *Les translations d'un espace métrique* E *satisfaisant aux axiomes 1 et 2 forment un <u>groupe abélien</u>* T(E) *qui opère <u>transitivement</u> et <u>librement</u> sur* E.

Preuve : si a, b, c, d sont quatre points de E , il existe d'après le corollaire précédent un point e de E tel que $\dot d \circ \dot c = \dot e \circ \dot b$

d'où :
$$(\dot d \circ \dot c) \circ (\dot b \circ \dot a) = (\dot e \circ \dot b) \circ (\dot b \circ \dot a) = \dot e \circ \dot a$$

ce qui prouve que le composé de deux translations de E est une translation et comme :
$$(\dot a \circ \dot b)^{-1} = \dot b \circ \dot a$$

les translations de E forment un sous-groupe du groupe des isométries de E.

Le commutativité de ce groupe résulte de la propriété 5/ qui donne successivement :
$$(\dot d \circ \dot c) \quad (\dot b \circ \dot a) = \dot d \circ (\dot c \circ \dot b \circ \dot a) = \dot d \circ (\dot a \circ \dot b \circ \dot c)$$
$$= (\dot d \circ \dot a \circ \dot b) \circ \dot c$$
$$= (\dot b \circ \dot a \circ \dot d) \circ \dot c$$
$$= (\dot b \circ \dot a) \circ (\dot d \circ \dot c)$$

Pour achever la démonstration, il suffit de montrer que, pour tout couple (a,b) de points de E , il existe une translation unique t de E telle que t(a) = b. Pour avoir une telle translation, on vérifie que pour c = a * b :
$$\dot b \circ \dot c(a) = \dot b(b) = b$$

Si t et s sont deux translations telles que t(a) = b = s(a) alors $s^{-1} \circ t(a) = a$ mais comme $s^{-1} \circ t$ est une translation il existe des points b, c de E tels que $s^{-1} \circ t = \dot b \circ \dot c$ et $\dot b \circ \dot c(a) = a$ entraîne $\dot b(a) = \dot c(a)$ d'où b = c d'après l'axiome 1 , ce qui donne $t = (\dot b \circ \dot b) \circ s = s$.

Proposition : *L'espace métrique* E *étant astreint aux mêmes axiomes, pour tout couple* (a,b) *de points de* E *et pour toute translation* t *de* E, *on a :*
$$a * t(b) = b * t(a)$$

Preuve : Pour cela, posons $c = a * t(b)$, ce qui donne :

$$\dot{c}(a) = t(b)$$

et écrivons t sous la forme :

$$t = \dot{d} \circ \dot{e} \qquad ;$$

on a alors : $$\dot{c} \circ t(a) = \dot{c} \circ \dot{d} \circ \dot{e}(a) = \dot{e} \circ \dot{d} \circ \dot{c}(a) = \dot{e} \circ \dot{d} \circ t(b)$$

$$= \dot{e} \circ \dot{d} \circ \dot{d} \circ \dot{e}(b)$$

$$= b$$

d'où $$c = b * t(a)$$

Corollaire 1 : *Pour tout point* a *de* E *et pour toute translation* t *de* E *on a :*

$$a * t^2(a) = t(a)$$

Pour cela, il suffit de prendre $b = t(a)$.

Corollaire 2 : *Pour toute translation* t *de* E , *il existe une translation unique* s *de* E *telle que :*

$$s^2 = t$$

i.e. $T(E)$ *est un module sur l'anneau* Q_2 *des nombres rationnels dyadiques (i.e, les nombres de la forme* $k/2^n$ *pour* k *et* n *entiers).*

En effet, si s_1 et s_2 sont deux telles translations le corollaire 1 donne pour un point a de E :

$$s_1(a) = a * t(a) = s_2(a)$$

d'où $s_1 = s_2$

Pour avoir une telle translation, désignons par $\vec{ab}$ la translation transformant un point a de E en b ; alors :

$$\vec{ab} \circ \vec{ab} = \dot{b} \circ \dot{a}$$

En effet, avec $c = a * b$, on a :

$$\vec{ab} = \dot{c} \circ \dot{a} = \dot{b} \circ \dot{c}$$

d'où
$$\vec{ab} \circ \vec{ab} = \dot{b} \circ \dot{c} \circ \dot{c} \circ \dot{a} = \dot{b} \circ \dot{a}$$

Corollaire 3 : *Deux couples de points* (a,b) *et* (c,d) *de points de* E *sont équipollents si et seulement si :*

$$\vec{ab} = \vec{cd}$$

ceci tient à ce que $(\vec{ab})^2 = \dot{b} \circ \dot{a}$ *et* $(\vec{cd})^2 = \dot{d} \circ \dot{c}$

Corollaire 4 : *Pour des points* a, b, c, d *de* E, *on a :*

$$\vec{ab} = \vec{cd} \Rightarrow \vec{ac} = \vec{bd}$$

Corollaire 5 : *L'application de* $E \times E$ *dans* T(E) *qui à un couple* (a,b) *de points de* E *associe la translation* ab *transformant* a *en* b *donne, par passage au quotient une bijection* $E \times E/\& \to T(E)$

Ceci résulte du corollaire 3.

Corollaire 6 : *Sur* T(E) *on définit une fonction réelle positive* $t \to \| t \|$ *en posant :*

$$\| t \| = d(a, t(a))$$

où a *est un point arbitraire de* E.

Cette fonction satisfait aux conditions suivantes :

$$\|t\| = 0 \iff t = id_E$$

$$\|t^{-1}\| = \|t\|$$

$$\|t \circ s\| \leqslant \|t\| + \|s\|$$

Preuve : Si a et b sont deux points de E, pour toute translation t de E, les couples $(a, t(a))$ et $(b, t(b))$ sont équipollents d'après le corollaire 3 ; d'où :

$$d(a, t(a)) = d(b, t(b))$$

Les deux premières conditions citées sont évidentes. Pour prouver la troisième, prenons un point a de E, on a alors :

$$d(a, t \circ s(a)) \leqslant d(a, s(a)) + d(s(a), t \circ s(a))$$

mais comme

$$d(s(a), t \circ s(a)) = d(a, t(a)),$$

c'est terminé.

Remarque : Le corollaire permet de définir sur T(E) une distance :

$$d(t, s) = \|t^{-1} \circ s\|$$

Pour tout point a de E, on définit une application $t \to t(a)$ de T(E) dans E. Cette application est une isométrie de T(E) sur E ; en effet, on sait déjà que cette application est surjective et, comme :

$$d(t, s) = d(a, t^{-1} \circ s(a)) = d(t(a), s(a)) \ ,$$

c'est bien une isométrie.

Définition : *Soit* E *un espace métrique satisfaisant aux deux axiomes précédents. Nous dirons qu'un quadruple* (a, b, c, d) *est un parallélogramme si les couples* (a, b) *et* (d, c) *sont équipollents i.e.*

$$a * c = b * d \quad , \quad \text{i.e,} \qquad \vec{ab} = \vec{dc}$$

Axiome 3 : (Axiome du parallélogramme).

Nous dirons qu,un espace métrique E satisfaisant aux axiomes 1 et 2, satisfait à l'axiome du parallélogramme si, pour tout parallélogramme (a, b, c, d) de E, on a :

$$d(a, c)^2 + d(b, d)^2 = 2 \left[d(a, b)^2 + d(b, c)^2 \right]$$

Propriétés élémentaires :

7/ Pour tout couple (a, b) de points de E, le milieu $c = a * b$ est caractérisé par :

$$d(c, a) = \frac{1}{2} d(a, b) = d(c,b)$$

8/ Si pour trois points a, b, c de E, on a $d(b, a) = d(b, \dot{c}(a))$, alors :

$$d(a, b)^2 = d(a,c)^2 + d(c, b)^2$$

Proposition 4 : *Soit* E *un espace métrique satisfaisant aux trois axiomes précédents. Alors, pour toute translation* t *de* E *et pour tout entier* n *on a* :

$$\| t^n \| = n \| t \|$$

Preuve : Il s'agit de montrer que, pour tout point a de E, on a :

$$d(t^n(a), a) = n d(t(a),a)$$

Supposons le résultat vrai pour $p \leqslant n$ et montrons le pour $p = n + 1$.

D'après le corollaire 1 de la proposition 3, on a :

$$t^n(a) = t^{n-1}(a) * t^{n+1}(a) \ ;$$

l'axiome 3 donne alors :

$$d(a, t^{n+1}(a))^2 + d(a, t^{n-1}(a))^2 = 2\, d(a, t^n(a))^2 + 2\, d(t^n(a), t^{n-1}(a))^2$$

et comme $d(t^n(a), t^{n-1}(a)) = d(t(a),a)$, l'hypothèse de récurrence donne alors :

$$\begin{aligned} d(a, t^{n+1}(a))^2 &= (2n^2 - (n-1)^2 + 2) d(a, t(a))^2 \\ &= (n+1)^2\ d(a, t(a))^2 \end{aligned}$$

Théorème 5 : *Soit* E *un espace métrique complet satisfaisant aux axiomes 1, 2, 3. Il existe alors une structure hilbertienne canonique compatible avec le groupe* T(E) *des translations de* E.

Preuve : Pour cela, il suffira de vérifier que la loi externe du Q_2-module T(E) se prolonge à R et que la fonction $t \to \|t\|$ déjà définie sur T(E) est une norme hilbertienne.

Du corollaire 6 de la proposition 3 et de la proposition 4 on déduit que

$$\|t^a\| = |a|\, \|t\| \qquad , a \in Q_2$$

et, ainsi, pour toute translation $t \neq id_E$ de E, l'application de Q_2 dans T(E) :

$$a \to \frac{1}{\|t\|}\, t^a$$

est une isométrie ; mais, comme E est complet, cette application se prolonge à R par densité et confère à T(E) une structure d'espace vectoriel réel ; de plus :

$$\|t^a\| = |a|\, \|t\| \qquad , a \in R$$

Ainsi, T(E) est un espace de Banach et sa norme, d'après l'axiome 3, satisfait à :

$$\|t \circ s\|^2 + \|t^{-1} \circ s\|^2 = 2(\|t\|^2 + \|s\|^2)$$

c,est donc une norme hilbertienne qui provient du produit scalaire :

$$(t/s) = \frac{1}{2} (\|t \circ s\|^2 - \|t\|^2 - \|s\|^2)$$

et ceci termine la démonstration. c.q.f.d.

Des théorèmes 2 et 5 on déduit le théorème de structure que voici :

Théorème : *Tout espace métrique* complet *satisfaisant à l'axiome du milieu, à l'axiome du triple et à l'axiome du parallélogramme est* l'espace métrique d'un espace de Hilbert réel.

(3.2) Remarque sur la complétude :

C'est la complétude de l'espace E qui nous a permis, grâce à l'axiome 3, de prolonger à $R \times T(E)$ la loi externe $Q_2 \times T(E) \to T(E)$ définie grâce aux axiomes 1 et 2. On est en droit de se demander si ceci ne peut pas se faire avec une hypothèse plus faible.

Définition : *Soit* E *un espace métrique satisfaisant aux trois axiomes précédents. Nous dirons qu'une partie* D *de* E *est une* droite *de* E *s'il existe une isométrie* $f : R \to E$ *telle que* $f(R) = D$.

Si a et b sont deux points distincts d'une droite de E, il est aisé de montrer que D, est l'adhérence des points $(\overrightarrow{ab})^r(a)$, $r \in Q_2$, ce qui prouve que par deux points distincts d'un tel espace métrique E il passe au plus une droite de E.

Proposition 1 : *Soit* E *un espace métrique satisfaisant aux trois axiomes précédents Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) Par deux points distincts de E *il passe une droite de* E.
(ii) Toute isométrie de Q_2 *dans* E *se prolonge suivant une isométrie de* R *dans* E.

Preuve : (ii) $\Rightarrow$ (i) est évidente.

Pour montrer (i) $\Rightarrow$ (ii), il suffira de prolonger à $R \times T(E)$ la loi externe $Q_2 \times T(E) \to T(E)$ définie en (5.1). Pour cela, considérons une translation $t = \overrightarrow{ab}$, $a \neq b$ et posons $d(a, b) = \rho$; d'après la condition (i) il existe une isométrie $f : R \to E$ dont l'image contient a et b et, sous réserve d'effectuer une translation dans R, on peut supposer que $f(0) = a$. Comme les seules isométries de R qui conservent O sont id_R est la symétrie $x \to -x$, on peut supposer que

$f(\rho) = b$. Soit $\xi \in R$; alors (5.1. prop. 3. cor. 4) permet de s'assurer que la translation $af(\xi\rho)$ ne dépend que de ξ et de t, ce qui nous permet de la noter t^ξ. Il reste à voir que le produit $(\xi, t) \to t^\xi$, $\xi \in R$, prolonge bien le produit $(\xi, t) \to t^\xi$, $\xi \in Q_2$, ce que le lecteur vérifiera de lui-même.

Définition : *Nous dirons qu'un espace métrique* E *est* euclidien *s'il satisfait aux trois axiomes de (5.1.) et aux conditions (i) et (ii) de la proposition précédente.*

Remarque : Si l'on veut éviter l'usage de la topologie d'un espace métrique, on pourra renforcer la condition (i) en postulant l'unicité de la droite en question. Ceci dit, on a le théorème de structure :

Théorème : *Tout espace métrique euclidien est l'espace métrique d'un espace pré-hilbertien réel.*

(i.e. on a toutes les conditions d'un espace de Hilbert à l'exception de la complétude).

Corollaire : (théorème de la droite)

Pour qu'une partie D *d'un espace métrique euclidien* E *soit une droite il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient satisfaites :*

a/ D *est l'ensemble des points de* E *invariants par une symétrie de* E.

b/ Il existe deux points distincts a, b *de* D *tels que toute symétrie de* E *qui conserve* a *et* b *conserve chaque point de* D.

Remarque : Dans un espace métrique euclidien, le milieu d'une paire de points $\{a, b\}$ peut être défini comme le point de la droite ab équidistant de a et de b.

Afin de définir la dimension d'un espace métrique euclidien, procédons à quelques rappels.
On dit qu'un sous-espace affine F d'un espace vectoriel est *l'enveloppe affine* d'une partie A de E si c'est le plus petit sous-espace affine de E contenant A ; ceci s'exprime aussi par le fait que tout point de F est une combinaison linéaire de points de A dont la somme des coefficients est égale à 1. (e.g. une droite est l'enveloppe affine de ses paires de points).
On montre qu'un espace vectoriel E est de dimension fini n s'il satisfait aux deux conditions suivantes :

a/ Il existe une partie de E à n + 1 éléments et dont l'enveloppe affine est égale à E.

b/ Les enveloppes affines des parties de E à n éléments sont toutes distinctes de E.

Définition : *Soit* A *une partie d'un espace métrique* E. *Il est évident que l'ensemble* G(A) *des isométries de* E *qui conservent chaque point de* A *est un groupe. L'ensemble* IG(A) *des éléments de* E *invariants par chacune des isométries du groupe* G(A) *est une partie de* E *qui contient* A ; *c'est ce que nous appelerons l'enveloppe métrique de* A.
Si E *est l'espace métrique d'un espace préhilbertien, l'enveloppe métrique d'une partie de* E *est identique à son enveloppe affine ; le théorème de structure des espaces métriques euclidiens permet donc d'avoir le :*

Théorème de la dimension : *Pour que l'espace vectoriel des translations d'un espace métrique euclidien* E *soit de dimension* n, *il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient satisfaites :*

(i) Il existe une partie A *de* E *à* n + 1 *éléments telle que* id_E *soit la seule isométrie de* E *qui conserve chaque point de* A.

(ii) Pour toute partie B *de* E *à* n *éléments il existe une isométrie de* E *distincte de* id_E *qui conserve chaque point de* B.

Dans ces conditions, nous dirons que E *est de dimension* n.

Le théorème de structure des espaces métriques euclidiens permet aussi de démontrer le :

Théorème de la géométrie plane : *Pour un espace métrique euclidien* E, *les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) E *est de dimension* 2.

(ii) Pour toute droite D *de* E, *le groupe* G(D) *des isométries de* E *qui conservent chaque point de* D *est d'ordre* 2.

(iii) Il existe des symétries de E *distinctes de* id_E *et des symétries ponctuelles* $\overset{\bullet}{x}$, $x \in E$ *et, pour toute symétrie* σ *de ce type, l'ensemble* $I(\sigma)$ *des points de* E *invariants par* σ *est une droite.*

4. Essai d'une présentation de la géométrie élémentaire.

(4.1) Dans le paragraphe 3, nous avons vu tout le parti qu'on peut tirer des deux premiers axiomes d'un espace métrique euclidien (i.e. axiome du milieu, axiome des trois symétries ponctuelles). Essayons maintenant de dégager de façon élémentaire quelques conséquences de l'axiome du parallélogramme et de l'axiome de la droite (i.e. par deux points distincts passent une droite et une seule).

Proposition 1 : *Soit* σ *une symétrie d'un espace euclidien* E. *Alors, pour tout point* x *de* E, *le point* $x * \sigma(x)$ *est invariant par* σ '

Grâce à (3.1, prop. élém. 7) on montre que

$$\sigma(x * \sigma(x)) = x * \sigma(x)$$

Proposition 2 : *Pour tout point* y *de* E *invariant par* σ *, on a :*

$$d(x,y)^2 = d(x,x * \sigma(x))^2 + d(x * \sigma(x),y)^2$$

Preuve : Puisque : $d(y,\sigma(x)) = d(y,x)$

l'égalité de Pythagore résulte de (3.1, prop élém. 8).

Corollaire : *Le point* $x * \sigma(x)$ *réalise la plus courte distance de* x *à un point de* $I(\sigma)$.

i.e. $d(x, x * \sigma(x)) = \text{Inf } d(x, y) \quad ; \quad y \in I(\sigma)$

De ces deux propositions, on déduit le :

Théorème 3 : *Pour deux symétries* σ, τ *d'un espace euclidien on a :*

$$I(\sigma) = I(\tau) \quad \Rightarrow \quad \sigma = \tau$$

Preuve : Soit $x \in E$. Puisque, d'après la proposition 1, $x * \sigma(x)$ et $x * \tau(x)$ sont dans $I(\sigma) = I(\tau)$, en appliquant la proposition 2 à la symétrie σ (resp. τ) et au point $y = x * \tau(x)$ (resp. $y = x * \sigma(x)$), on a :

$$d(x, x * \tau(x))^2 = d(x, x * \sigma(x))^2 + d(x * \sigma(x), x * \tau(x))^2$$

$$d(x, x * \sigma(x))^2 = d(x, x * \tau(x))^2 + d(x * \tau(x), x * \sigma(x))^2$$

d'où $$d(x * \sigma(x), x * \tau(x)) = 0$$

i.e. $$x * \sigma(x) = x * \tau(x)$$

et ainsi $$\sigma(x) = \tau(x)$$

Définition : *Nous dirons qu'une partie* A *d'un espace métrique euclidien* E *est* un sous-espace euclidien *de* E *s'il existe une symétrie* σ *de* E *telle que* $A = I(\sigma)$. *Le théorème précédent assure qu'une telle symétrie* σ *est unique.*

Remarque : Les isométries de E préservent l'ensemble des sous-espaces euclidiens de E ; de façon précise, pour toute symétrie σ et toute isométrie τ de E, on a :

$$\tau(\mathrm{I}(\sigma)) = \mathrm{I}(\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1})$$

et il est clair que : $\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}$ est uns symétrie de E.

La définition précédente se justifie par la proposition suivante :

Proposition 4 : *Pour tout point* a *d'un sous-espace euclidien* A *d'un espace euclidien* E, A *est stable pour* $\dot{a}$ *(i.e.* $\dot{a}(A) = A$) *et pour tout couple* (a,b) *de points de* A, $a * b \in A$.

Preuve : La seconde assertion résulte de ce que toute isométrie de E qui conserve deux points a, b de E conserve le milieu a * b (3.1, prop. élém. 7).

La première assertion va résulter du :

Lemme : *Pour toute symétrie* σ *de* E *et pour tout point* a *de* E , *on a :*

$$\sigma \circ \dot{a} = \sigma(\dot{a}) \circ \sigma$$

Pour cela, il suffit de remarquer que, pour tout point x de E, le couple : $(\sigma(x), \sigma \circ \dot{a}(x))$ a pour milieu $\sigma(a)$.

Corollaire du lemme : *Un point* a *de* E *est invariant par* σ *si, et seulement si :*

$$\sigma \circ \dot{a} = \dot{a} \circ \sigma$$

C'est grâce à ce corollaire qu'on montre que $\mathrm{I}(\sigma)$ est stable pour les symétries a, $a \in \mathrm{I}(\sigma)$.

Définition : *Soit* M *un sous-espace euclidien d'un espace métrique euclidien* A *et soit* s_M *la symétrie de* E *définie par* M. *Pour tout point* x *de* E *on note :*

$$x * s_M(x) = p_M(x)$$

Le point $p_M(x)$ sera appelé la projection orthogonale de x sur M et $d(x, p_M(x)) = d(x,M)$ sera la *distance de* x *à* M.

Théorème des obliques : *Soit* M *un sous-espace euclidien d'un espace euclidien* E. *Alors, pour tout point* x *de* E *et pour tout couple* (y, z) *de points de* M, *on a :*

$$d(x, y)^2 - d(x, z)^2 = d(p_M(x), y)^2 - d(p_M(x), z)^2$$

Preuve : Ceci tient à ce que pour tout point y de M, on a d'après la proposition 2 :

$$d(x, y)^2 = d(x, p_M(x))^2 + d(p_M(x), y)^2$$

(4.2) Notion de parallélisme.

Définition : *Soit* M *et* N *deux sous-espaces euclidiens d'un espace métrique euclidien* E ; *ils définissent respectivement les symétries* σ *et* τ. *Nous dirons que* N *est parallèle à* M *si* $\tau \circ \sigma$ *est une translation de* E

Puisque les translations de E forment un groupe et que les isométries sont involutivesé on définit ainsi une relation d'équivalence (le parallélisme) sur l'ensemble des sous-espaces euclidiens de E.

Proposition 1 : *Si deux sous-espaces euclidiens* M *et* N *de* E *sont parallèles et s'ils ont un point commun, alors ils sont égaux.*

Preuve : Soit σ et τ les symétries définies par ces sous-espaces. Si $a \in M \cap N$, alors :

$$\tau \circ \sigma(a) = \tau(a) = a$$

et puisque $\tau \circ \sigma$ est une translation, on a $\tau \circ \sigma = id_E$ d'où $\tau = \sigma$'

Proposition 2 : *Deux sous-espaces euclidiens de* E *qui se correspondent dans une symétrie ponctuelle ă sontparallèles:*

Preuve : Si σ est la symétrie définie par l'un de ces sous-espaces, la symétrie définie par le second est $\tau = \dot{a} \circ \sigma \circ \dot{a}$ et, puisque :

$$\tau \circ \sigma = a \circ \sigma \circ a \circ \sigma$$

le lemme précédent donne :

$$\tau \circ \sigma = \dot{a} \circ \sigma \circ \sigma \circ \sigma(a)$$

$$= \dot{a} \circ \sigma(a)$$

Corollaire : *Pour que deux sous-espaces euclidiens de* E *soient parallèles, il faut et il suffit que l'un d'eux se déduisent de l'autre par une translation.*

(4.3) Notion d'orthogonalité :

Pour cela, nous nous limiterons à la géomètrie plane, i.e. au cas d'un espace euclidien dont les sous-espaces affines, exceptés E et les points de E, sont les droites de E.

Définition : *Soit* A *et* B *deux droites d'un plan euclidien* E *et soit* σ, τ *les symétries associées respectivement à ces deux droites: Nous dirons que* B *est perpendiculaire à* A *si* $\tau \circ \sigma$ *est une symétrie ponctuelle.*

Il est clair qu'on définit ainsi sur l'ensemble des droites de E une relation (l'orthogonalité) qui est symétrique, non réflexive et non transitive, de façon précise, on peut dire que :

1/ Une droite n'est jamais perpendiculaire à elle-même.
2/ Deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles.
3/ Réciproquement, si deux droites sont parallèles toute droite perpendiculaire à l'une l'est à l'autre.

Théorème de la perpendiculaire

Dans une plan euclidien, on peut mener d'un point a *une perpendiculaire et une seule à une droite* D.

Preuve : L'unicité tient à ce que deux perpendiculaires à D sont parallèles et que deux droites parallèles qui passent par a sont égales.

Pour l'existence désignons par b la projection orthogonale de a sur D ; alors, si σ est la symétrie définie par D, on a :

$$\dot{b} \circ \sigma = \sigma \circ \dot{b} \qquad (= \tau)$$

et τ est une symétrie Mais puisque $\tau \circ \sigma = \dot{b}$, $I(\tau)$ est perpendiculaire à D ; puisque $b = a * \sigma(a)$, on a ·

$$\tau(a) = \sigma \circ \dot{b}(a) = \sigma(\sigma(a)) = a$$

Corollaire : (ex-postulat d'Euclide)

Par tout point d'un plan euclidien E *on peut mener à une droite de* E *une parallele et une seule*

Théorème de la médiatrice :

Soit $\{a,b\}$ *une paire de points d'un plan euclidien* E. *Alors, l'ensemble des points de* E *équidistants de* a *et* b *est une droite qui définit une symétrie permutant* a *et* b.

Preuve : Soit σ la symétrie définie par la droite ab et soit c le centre de $\{a,b\}$ Considérons la symétrie

$$\tau = \sigma \circ \dot{c} = \dot{c} \circ \sigma$$

on a $$\tau(a) = \sigma(\dot{c}(a)) = \sigma(b) = b$$

et il est clair que $I(\sigma) \subset D$ Reste à voir que tout point x de D est invariant par σ.

Pour cela désignons par y la projection orthogonale de x sur la droite ab ; d'après le thèorème des obliques, on a :

$$d(y,b)^2 - d(y,a)^2 = d(x,b)^2 - d(x,a)^2 = 0$$

et ainsi y, point de la droite ab équidistant de a et de b, est égal au milieu c de $\{a,b\}$; on a donc :

$$c = x * \sigma(x)$$

d'où $$\tau(x) = \mathcal{E}(\sigma(x)) = x$$

c.q.f.d.

Le théorème de la médiatrice permet de démontrer le troisième cas d'égalité des triangles qui devient ainsi logiquement le :

Premier cas d'égalité des triangles (3ème cas) :

Théorème : *Soit* a, b, c, a', b', c' d*es points d'un plan euclidien* E *tels que*

$$d(a',b') = d(a.,b) \quad ; \quad d(b',c') = d(b,c) \quad ; \quad d(c',a') = d(c.,a)$$

Il existe alors une isométrie σ *de* E *telle que :*

$$\sigma(a) = a' \quad ; \quad \sigma(b) = b' \quad ; \quad \sigma(c) = c'$$

(4.4) <u>Demi-droites et angles :</u>

Définition : *Nous dirons qu'une partie* A *d'un espace métrique euclidien* E *est une demi-droite de* E *s'il existe une isométrie de* $R_+ = [\,0, +\infty\,[$ *dans* E *telle que* $\sigma(R_+) = A$.

Il est à remarquer qu'une telle isométrie est unique car si σ et τ sont deux isométries de R_+ sur A, alors $\tau^{-1} \circ \sigma$ est une isométrie de R_+ or on démontre que toute isométrie de R_+ est égale à id_{R+}

Le point $\sigma(0)$ de A, noté $0(A)$, est appelé l'origine de la demi-droite A. D'après cette définition, l'image d'une demi-droite A de E par une isométrie σ de E est une demi-droite et $0(\sigma(A)) = \sigma(0(A))$. En particulier, la transformée d'une demi-droite A par la symétrie ponctuelle $\check{0}(A)$ est une demi-droite A^0 de même origine que A et appelée *l'opposée* de A.

Propriétés élémentaires :

Pour une demi-droite A de E, on a

1/ $A^{00} = A$

2/ L'intersection de A^0 et A est réduite à l'origine commune de ces demi-droites et la réunion $A \cup A^0$ est une droite ; cette droite est la seule qui contienne A et A^0.

3/ Pour tout nombre $\beta > 0$ il existe dans A un point b unique tel que $d(0(A), b) = \beta$.

4/ Pour toute paire $\{a,b\}$ de points de E, il existe une demi-droite unique d'origine a passant par b.

5/ Si la réunion de deux demi-droites A et B est une demi-droite alors $A \subset B$ ou $B \subset A$.

Lemme des angles :

Soit A, B, B' *des demi-droites d'un plan euclidien* E *tel que* $B \neq A^0$ *et :* $0(A) = c = 0(B)$ $\quad 0(A') = c' = 0(B')$.
S'il existe une isométrie σ *de* E *telle que* $\sigma(A \cup B) = A' \cup B'$, *alors :*

$$(\sigma(A) = A' \quad \text{et} \quad \sigma(B) = B')$$

ou

$$(\sigma(A) = B' \quad \text{et} \quad \sigma(B) = A')$$

Preuve : Si $A = B$, alors $A' \cup B' = \sigma(A)$ est une demi-droite, ce qui donne $A' \subset B'$ ou $B' \subset A'$; mais, puisque ces demi-droites ont même origine, on a alors $A' = \sigma(A) = B'$.

Si $A \neq B$, remarquons tout d'abord que A' et B' ne peuvent être dans une même droite sinon, par l'isométrie σ^{-1}, il en serait de même de A et B alors que $A^0 \neq B \neq A$. Par conséquent, si pour deux points distincts a_1 et a_2 de A on a $\sigma(a_1)$ et $\sigma(a_2) \in A'$; alors $\sigma(A) \subset A'$ /; comme on peut toujours trouver dans A trois points distincts, ceci donne :

$$\sigma(A) \subset A' \qquad \text{ou} \qquad \sigma(A) \subset B'$$

on a de même :

$$\sigma(B) \subset B' \qquad \text{ou} \qquad \sigma(B) \subset A'$$

Comme on ne peut avoir

$$\sigma(A) \cup \sigma(B) \subset A' \qquad \text{ou} \qquad \sigma(A) \cup \sigma(B) \subset B'$$

on a forcément l'alternative.

$$(\sigma(A) \subset A' \quad \text{et} \quad \sigma(B) \subset B')$$

ou

$$(\sigma(A) \subset B' \quad \text{et} \quad \sigma(B) \subset A')$$

Dans le premier cas on a du fait que $\sigma(A \cup B) = A' \cup B'$

$$A' - \sigma(A) \subset \sigma(B) \subset B' \qquad \text{et} \qquad B' - \sigma(B) \subset \sigma(A) \subset A'$$

mais comme A' et B' ne peuvent avoir plus d'un point commun, ceci assure que $A' = \sigma(A)$ et $B' = \sigma(A)$.

De la même façon, le second cas de l'alternative se réduit à des égalités:

L'égalité $c' = \sigma(c)$ résulte alors de :

$$c' = A' \cap B' = \sigma(A) \cap \sigma(B) = \sigma(A \cap B) = \sigma(c)$$

Lemme de bissectrice :

Soit A, B *deux demi-droites d'un plan euclidien* E *telles que*

$$0(A) = c = 0(B)$$

Il existe alors une symétrie axiale σ *et une seule telle que*

$$\sigma(A) = B.$$

Preuve : Si une telle symétrie existe alors $\sigma(c) = c$ ce qui fait que, pour tout point a de A, $\sigma(a)$ est l'unique point de b tel que $d(c,b) = d(c,a)$ de sorte que, si $A = B$, σ est la symétrie dont l'axe est la droite contenant A; si $A \neq B$, σ est définie par la médiatrice de toute paire $\{a, b\}$, $a \in A$, $b \in B$, $d(a,c) = d(b,c) \neq 0$.

Définition d'un angle :

Un angle *d'un plan euclidien* E *est une figure métrique représentable par la réunion de deux demi-droites* A, B *de même origine. Un tel angle est noté* $\widehat{A,B}$. *On a donc :* $\widehat{A,B} = \widehat{B,A}$.

Si $\widehat{A,B} = \widehat{A',B'}$ *et si* $B = A^0$ *alors* $B' = A'^0$ *, l'angle ainsi défini est dit plat. Si* A *et* B *ont pour origine* u, *on note*

$$\widehat{A,B} = \widehat{aub}$$

où a *(resp.* b) *est un point quelconque de* A *(resp.* B) *distinct de* u.

Du lemme des angles et du lemme de la bissectrice, on déduit la :

Proposition : *Si* $\widehat{A,B} = \widehat{A',B'}$ *, alors il existe une isométrie* σ *de* E *telle que :*

$$\sigma(A) = A' \qquad \textit{et} \qquad \sigma(B) = B'$$

(le cas de l'angle plat, qui ne relève pas du lemme des angles se prouve directement).

Le second cas d'égalité des triangles :

Théorème : *Soit* a, b, c, a', b', c' *des points d'un plan euclidien tels que :*

$$d(a,b) = d(a', b') \quad , \quad d(a,c) = d(a',c')$$

et $\widehat{bac} = \widehat{b'a'c'}$

Dans ces conditions, il existe une isométrie σ *de* E *telle que :*

$$\sigma(a) = a' \quad ; \quad \sigma(b) = b' \quad ; \quad \sigma(c) = c'$$

Preuve : D'après la proposition précédente, il existe une isométrie σ de E qui transforme la demi-droite ab en la demi-droite a'b' et la demi-droite ac en la demi-droite a'c' ; il est clair que cette isométrie répond à la question.

c.q.f.d.

Nous venons de voir tout le parti qu'on peut tirer des translations et des symétries d'un plan euclidien ; il ne semble pas qu'on puisse aller plus loin sans structure vectorielle.

(4.5) Homothéties et demi-plans :

Pour pouvoir utiliser commodément l'espace vectoriel T(E) des translations d'un espace euclidien E, on note le groupe T(E) additivement. Cette structure vectorielle permet, en premier lieu d'avoir la représentation barycentrique d'une droite D de E aum moyen de deux points distincts a et b de D : l'égalité :

$$\xi \, \overrightarrow{ma} + \eta \, \overrightarrow{mb} = 0$$

met en correspondance biunivoque les points m de D et les couples (ξ,η) de R^2 tels que $\xi + \eta = 1$.

Le segment [a,b] se définit alors comme l'ensemble des points de D à coordonnées barycentriques positives.

De ceci résulte, pour tout nombre réel $\lambda \neq 1$, qu'il existe un point unique m de E tel que $\vec{mb} = \lambda\, \vec{ma}$.

Soit λ un nombre non nul . Une λ-homothétie se définit comme une bijection h de E telle que

$$\overrightarrow{h(a)\,h(b)} = \lambda\, \vec{ab} \quad , \qquad a, b \in E$$

Les 1-homothéties de E sont évidemment les translations de E et, pour $\lambda \neq 1$, toute λ-homothétie admet un point fixe unique qu'on appelle le centre de h.

Notons aussi que pour quatre points a, b, c, d de E tels que $\vec{cd} = \lambda\vec{ab}$ il existe une λ-homothétie h telle que : h(a) = c , h(b) = d.

Ces considérations permettent de montrer que :

Théorème 1 : *Deux droites distinctes d'un plan euclidien* E *sont parallèles si, et seulement si, elles n'ont pas de point commun.*

Preuve : Pour cela, il suffit de montrer que deux droites non parallèles D et D' ont un point commun. Prenons dans D deux points distincts a et b et désignons par a' et b' leurs projections orthogonales sur D' ; il existe alors un nombre λ tel que $\overrightarrow{b'b} = \lambda\overrightarrow{a'a}$ mais, comme D et D' ne sont pas translatées l'une de l'autre, on a $\lambda \neq 1$ et ainsi, le centre de l'homothétie qui transforme a en b et a' en b' est commun à D et D'.

c.q.f.d.

Soit D une droite de E. Pour que D soit invariante par une homothétie h de E (i.e. h(D) = D) il suffit qu'il existe un point a de D tel que $h(a) \in D$. L'ensemble $\mathcal{H}$ des homothéties de E qui conservent D est évidemment un groupe et de la remarque qui précède il résulte que $\mathcal{H}$ opère *transitivement* et *librement* dans E - D ; mais comme l'ensemble $\mathcal{H}^+$ des homothéties positives de $\mathcal{H}$ est un sous-groupe de $\mathcal{H}$ d'indice 2, E - D admet alors *deux* orbites modulo $\mathcal{H}^+$.

Ce résultat s'exprime plus directement sous la forme suivante :

Théorème 2 : *La relation* $\mathcal{R}$ *formée par les couple* (a,b) *de points de* E - D *tels que la droite* D *ne coupe pas le segment* [a,b] *est une relation d'équivalence et l'ensemble* $E/\mathcal{R}$ *est à* deux *éléments.*

Définition : *Les deux parties complémentaires de* E - D *ainsi définie sont appelées les* demi-plans ouverts de E de frontière D.

<u>Remarques</u> :

1/ La symétrie d'axe D permute les deux demi-plans de E définis par D.

2/ Si l'origine a d'une demi-droite A appartient à D et si un point de A appartient à l'un de ces demi-plans, alors tous les points de A distincts de a appartiennent à ce demi-plan.

Nous allons déduire de ceci le premier cas d'égalité des triangles. Auparavant montrons le :

Lemme : *Soit* A, B, C *trois demi-droites de* E *de même origine* u *et telles que* $\widehat{A,B} = \widehat{A,C}$ *. Alors, si* B *et* C *sont distinctes, elles sont symétriques par rapport à* A.

<u>Preuve</u> : Soit a, b, c trois points de A, B, C distincts de u et équidistants de u. Si $B \neq C$ alors $b \neq c$ et, en vertu du deuxième cas d'égalité des triangles, on a $d(a,b) = d(a,c)$, ce qui assure que la droite A est la médiatrice de $\{b,c\}$.

<u>Troisième cas d'égalité des triangles (ex. 1er cas)</u>.

Théorème : *Soit* a, b, c *trois points* non alignés *de* E *et* a', b', c' *des points de* E *tels que :*

$d(b,c) = d(b',c')$; $\widehat{abc} = \widehat{a'b'c'}$; $\widehat{acb} = \widehat{a'c'b'}$

Dans ces conditions, il existe une isométrie σ *de* E *telle que :*

$\sigma(a) = a'$; $\sigma(b) = b'$; $\sigma(c) = c'$

Preuve : On peut supposer, sous-réserve d'utiliser une isométrie, que b' = b et c' = c. Puisque a, b, c ne sont pas alignés, les hypothèses faites sur a', b', c' font que ces points ne sont pas alignés: Si a et a' sont de part et d'autre de la droite bc, le lemme précédent compte tenu de la remarque 2, montre que les demi-droites ba et ba' d'une part les demi-droites ca et ca' d'autre part sont symétriques par rapport à la droite bc et c'est terminé. Si a et a' sont du même côté de la droite bc, la symétrie d'axe bc appliquée au point a ramène au cas précédent:

c.q.f.d.

5. Propositions de programmes.

Pour pouvoir utiliser très tôt l'axiomatique des plans métriques euclidiens qui vient d'être présentée, voici ce qu'on pourrait faire au début de l'enseignement secondaire :

Classes de sixième :

Etude expérimentale des distances et des axiomes de la géométrie plane au moyen du dessin géométrique et des pliages : construction au compas du transformé d'un point par une symétrie ponctuelle ; décelage du milieu d'un couple de points par deux pliages et examen des distances de ce milieu à ces points. Construction au compas d'un parallélogramme et étude du composé de trois symétries centrales ; vérification de l'égalité du parallélogramme par l'enfant sur le modèle qu'il a construit.

Classes de cinquième :

Notions d'espace métrique et d'isométrie d'un espace métrique dans un autre. Groupe des isométries d'un espace métrique ; superposition dans un espace métrique ; figures métriques.
Introduction de l'axiome du milieu et de l'axiome des trois symétries. Définition et étude du groupe des translations et du groupe des vecteurs libres ; présentation de leur isomorphie canonique

L'axiome du parallélogramme et la seconde définition du milieu d'un couple de points.

Les différentes définitions d'une droite d'un espace euclidien (l'équivalence de ces définitions sera admise sans démonstration).

Les différentes définitions d'un plan euclidien (l'équivalence de ces définitions sera admise sans démonstration).

Droites parallèles ; droites orthogonales du plan euclidien - Théorème des obliques - Théorèmes de la perpendiculaire - Théorème de la médiatrice - le premier cas d,égalité des triangles (ex. troisième cas d'égalité).

Notion d'angle - deuxième cas d'égalité des triangles.

Médiatrices et hauteurs d'un triangle.

Classes de quatrième :

Définition d'un axe ou droite orientée (couple constitué par une droite D est une isométrie de R sur D). Repérage d'un point du plan au moyen de deux axes perpendiculaires. Présentation de R^2 comme modèle de la géomètrie plane.

Espace vectoriel des translations et groupe des homothéties du plan euclidien: - Définition barycentrique d'une droite - parallèlisme de deux droites distinctes - Partages du plan en demi-plans.

Troisième cas d'égalité des triangles (ex. premier cas).

Similitudes du plan euclidien et cas de similitude des triangles:

Cosinus et sinus d'un angle - Propriétés du triangle rectangle - Propriétés métriques des triangles.

Somme de deux angles - somme des angles d'un triangle.

Etude des cercles.

Après ceci on pourrait aborder en classe de troisième la géomètrie de l'espace euclidien de dimension 3 en précisant le rôle de modèle joué par R^3.

Ces programmes permettraient de faire avancer de front algèbre et géomètrie ; celle-ci trouverait alors la voie royale que Klein prévoyait pour elle, voie que pourrait emprunter le plus grand nombre dès le plus jeune âge. Il n'y aurait plus de préséance entre les deux mathématiques élémentaires, chacune aidant l'autre à progresser.

De toutes façons, si l'on ne me suit pas, je pense avoir fait œuvre utile auprès de mes collègues de l'Enseignement Secondaire en insistant sur la notion d'espace hilbertien : c'est là que la géométrie euclidienne trouve sa finalité. Il serait temps que les futurs enseignants apprennent la géomètrie des espaces de Hilbert parce que c'est celle qu'ils enseigneront dans le cadre plus restreint de la géomètrie euclidienne. Consentira-t-on à orienter dans ce sens les programmes de maîtrise ? Les futurs maîtres y auraient tout à gagner, et bien d'autres avec eux.

APPENDICE

Quelques mois après ces conférences, je me suis aperçu que l'axiome des trois symétries ponctuelles est surabondant ; en effet :

Théorème : *Si un espace métrique* E *satisfait à l'axiome du milieu et à l'axiome du parallélogramme, alors le composé de trois symétries ponctuelles de* E *est une symétrie ponctuelle de* E.

Dans ce qui suit ab désignera la distance de deux points quelconques a et b de E et $a*b$ le milieu de (a,b).

Remarquons tout d'abord que l'axiome du parallélogramme équivaut à «l'axiome de la médiane» i.e. pour trois points (a,b,c) de E on a, avec $b*c = i$:

$$ab^2 + ac^2 = 2ac^2 + \frac{1}{2}bc^2$$

Lemme 1 : *Soit* (a,b,c,d) *un quadruple de points de* E. *Posons* $i = a*b$ *et* $j = c*d$. *Alors :*

$$ac^2 + ad^2 + bc^2 + bd^2 = ab^2 + cd^2 + 4ij^2$$

Preuve : D'après l'axiome de la médiane, on a :

$$2ic^2 + 2id^2 = 4ij^2 + cd^2$$

$$ca^2 + cb^2 = 2ci^2 + \frac{1}{2}ab^2$$

$$da^2 + db^2 = 2di^2 + \frac{1}{2}ab^2$$

d'où l'égalité du lemme par addition.

Corollaire : (Réciproque de l'axiome du parallélogramme)

Si $ac^2 + ad^2 + bc^2 + bd^2 = ab^2 + cd^2$, *alors :*

$$a*b = c*d$$

Lemme 2 : *Soit* (a,b,c) *un triple de points de* E. *Posons* $i = a*b$ *et* $j = a*c$.
Alors : $bc = 2ij$.

Preuve : L'axiome de la médiane donne :

$$2aj^2 + 2bj^2 = 4ij^2 + ab^2$$

$$ba^2 + bc^2 = 2bj^2 + \frac{1}{2}ac^2$$

d'où $$2aj^2 + bc^2 = 4ij^2 + \frac{1}{2}ac^2$$

mais comme $ac = 2aj$, c'est terminé.

Lemme 3 : *Soit* (a,b,c,d) *un quadruple de points de* E.

Posons $i = a*b$, $j = b*c$, $k = c*d$, $\ell = d*a$.

Alors $i*k = j*\ell$.

Preuve : L'axiome de la médiane donne :

$$2ka^2 + 2kb^2 = 4ki^2 + ab^2$$

$$ac^2 + ad^2 = 2ak^2 + \frac{1}{2}dc^2$$

$$bc^2 + bd^2 = 2bk^2 + \frac{1}{2}dc^2$$

d'où : $$ac^2 + ad^2 + bc^2 + bd^2 = 4ik^2 + dc^2 + ab^2$$

Par permutation de (b,d), (i,ℓ) et (k,j), on a :

$$ac^2 + ab^2 + dc^2 + bd^2 = 4j\ell^2 + bc^2 + ad^2$$

d'où :

$$ac^2 + bd^2 = 2(ik^2 + j\ell^2)$$

et le lemme 2 donne alors : $ij^2 + \ell k^2 + jk^2 = ik^2 + j\ell^2$

d'où le résultat d'après le corollaire du lemme 1.