

ALAIN BOUVIER

ALAIN FAISANT

Propriétés des demi-groupes de fractions

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1970,
tome 7, fascicule 2
, p. 115-136

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1970__7_2_A3_0

© Université de Lyon, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

PROPRIETES DES DEMI-GROUPES DE FRACTIONS

Alain BOUVIER - Alain FAISANT

MM. ZARISKY et SAMUEL, [10] ont étudié l'ensemble des éléments d'un anneau A rendus inversibles dans l'anneau de fractions $A[S^{-1}]$, lorsque A est commutatif, unitaire, et intègre, et S une partie multiplicative de A . En partant de cette idée on étudie pour un demi-groupe D l'application $S \longmapsto J(S)$ où $J(S)$ désigne précisément l'ensemble des éléments de D rendus inversibles dans $D[S^{-1}]$ demi-groupe des fractions de D par rapport à S , [7]. On montre comment cette application permet d'étendre aux demi-groupes de fractions d'un demi-groupe quelconque certains résultats connus pour les anneaux dans le cas commutatif intègre : conditions de fermeture de diagrammes, propriétés de transfert pour les homomorphismes, les idéaux, la factorisation ; commutation avec l'équivalence de Rees ; condition suffisante pour que $D[ST^{-1}]$ soit isomorphe à $D[TS^{-1}]$

Les notations et la terminologie utilisées sont celles de [7] dont ce travail constitue une suite.

§1. THEOREME FONDAMENTAL

Si S est un complexe d'un demi-groupe D , on note φ_S l'homomorphisme canonique de D dans $D[S^{-1}]$.

(1-1) Théorème : Pour tout complexe S d'un demi-groupe D l'homomorphisme $\varphi_S : D \longrightarrow D[S^{-1}]$ est un épimorphisme de la catégorie des demi-groupes.

Démonstration : Supposons que $u \circ \varphi_S = v \circ \varphi_S$ et soit e l'élément neutre de $D[S^{-1}]$.

* $u(e) = v(e)$ En effet, S n'étant pas vide, soit $s \in S$; on a :
 d'une part : $u(e)v(e) = u(e)v(\varphi_S(s))v(\varphi_S(s))^{-1} = u(e)u(\varphi_S(s))v(\varphi_S(s))^{-1}$
 $= u(\varphi_S(s)) \cdot v(\varphi_S(s))^{-1} = v(\varphi_S(s))v(\varphi_S(s))^{-1} = v(e)$

et d'autre part : $u(e)v(e) = u(\varphi_S(s))^{-1}u(\varphi_S(s))v(e)$
 $= u(\varphi_S(s))^{-1}v(\varphi_S(s))v(e)$
 $= u(\varphi_S(s))^{-1}v(\varphi_S(s)) = u(\varphi_S(s))^{-1}u(\varphi_S(s))$
 $= u(e)$

* $\forall s, s \in S : u(\varphi_S(s))^{-1} = v(\varphi_S(s))^{-1}$ En effet puisque $u(e) = v(e)$:
 $u(\varphi_S(s))^{-1}u(\varphi_S(s)) = v(\varphi_S(s))^{-1}v(\varphi_S(s))$ donc $u(\varphi_S(s))^{-1}u(\varphi_S(s))$
 $= v(\varphi_S(s))^{-1}u(\varphi_S(s))$

$$\begin{aligned}
 \text{soit encore : } u(\varphi_S(s)^{-1}) &= v(\varphi_S(s)^{-1})u(\varphi_S(s)^{-1})u(\varphi_S(s)^{-1})^{-1} \\
 &= v(\varphi_S(s)^{-1})u(e) = v(\varphi_S(s)^{-1})v(e) \\
 &= v(\varphi_S(s))^{-1}
 \end{aligned}$$

* $\forall x, x \in D[S^{-1}]$: $u(x) = v(x)$ En effet x s'écrit

$$x = \varphi_S(x_1)^{\alpha_1} \dots \varphi_S(x_n)^{\alpha_n} \text{ avec } \alpha_i = \pm 1 \text{ et } \alpha_i = 1$$

seulement si $x_i \in S$. Donc :

$$\begin{aligned}
 u(x) &= u(\varphi_S(x_1)^{\alpha_1}) \dots u(\varphi_S(x_n)^{\alpha_n}) = v(\varphi_S(x_1)^{\alpha_1}) \dots v(\varphi_S(x_n)^{\alpha_n}) \\
 &= v(x)
 \end{aligned}$$

Remarque : Il est immédiat que φ_S est simplifiable dans la sous-catégorie des demi-groupes avec élément neutre, le résultat ci-dessus est strictement plus fort.

§2. L'APPLICATION J

(2.1) Soit D un demi-groupe : à tout complexe S de D on associe le complexe $J(S) = \{x, x \in D, \varphi_S(x) \in \mathcal{A}(D[S^{-1}])\}$ et l'on désigne par J l'application ainsi définie.

Lorsque $S = \emptyset$ le problème universel (D, S) , [6], admet encore une solution : le couple (D^1, i) où $i : D \longrightarrow D^1$ est l'injection canonique. Ceci permet de prolonger J à l'ensemble $\mathfrak{P}(D)$. (il est à remarquer que i n'est pas nécessairement

un épimorphisme)

- . Il est clair que $J(D) = D$, $J(\emptyset) = \mathcal{U}(D)$ et que $J(S) = \emptyset$ équivaut à $S = \mathcal{U}(D) = \emptyset$
- . $\forall S, S \in \mathcal{F}(D) : S \subseteq J(S)$ et $J(S)$ est une partie stable de D .

(2.2) Proposition : Pour toute partie S de D $J(S)$ est la plus grande des parties T de D telles que $D[T^{-1}] \approx D[S^{-1}]$ par un isomorphisme σ tel que $\sigma \circ \varphi_T = \varphi_S$

Démonstration : . On a $D[J(S)^{-1}] \approx D[S^{-1}]$; en effet φ_S rend inversibles les éléments de $J(S)$ et il existe donc un unique homomorphisme σ tel que $\sigma \circ \varphi_{J(S)} = \varphi_S$; d'autre part $S \subseteq J(S)$ donc pour la même raison il existe un unique homomorphisme τ tel que $\tau \circ \varphi_S = \varphi_{J(S)}$. On en déduit $\sigma \circ \tau \circ \varphi_S = \varphi_S$ et $\tau \circ \sigma \circ \varphi_{J(S)} = \varphi_{J(S)}$ donc, (d'après (1.1)) : $\sigma \circ \tau = 1$ et $\tau \circ \sigma = 1$.

. si $\sigma : D[T^{-1}] \longrightarrow D[S^{-1}]$ est un isomorphisme tel que $\sigma \circ \varphi_T = \varphi_S$

On a $\forall t \in T \varphi_S(t) = \sigma \circ \varphi_T(t) = \sigma(\varphi_T(t)) \in \sigma(\mathcal{U}(D[T^{-1}])) \subseteq \mathcal{U}(D[S^{-1}])$, donc $t \in J(S)$. Ainsi $T \subseteq J(S)$

(2-3) Corollaire : L'application J est une fermeture sur $\mathcal{F}(D)$.

- . J est extensive car $S \subseteq J(S)$.
- . J est croissante : si $S \subseteq T$ φ_T rend inversibles les éléments de S donc il existe un homomorphisme unique σ tel que $\sigma \circ \varphi_S = \varphi_T$.

Comme σ conserve l'élément neutre, [6], si $x \in J(S)$

$\varphi_S(x) \in \mathcal{U}(D[S^{-1}])$ d'où $\varphi_T(x) = \sigma \circ \varphi_S(x) \in \mathcal{U}(D[T^{-1}])$ soit : $x \in J(T)$.

J est idempotente: d'après (2.2) $D[S^{-1}] \approx D[J(S)^{-1}] \approx D[J^2(S)^{-1}]$;

il résulte alors de (2.2) que $J^2(S) \subseteq J(S)$ donc $J^2(S) = J(S)$.

(2.4.) Théorème : Les propriétés suivantes sont équivalentes

1) $J(S) = J(T)$

2) $D[S^{-1}] \approx D[T^{-1}]$ par un isomorphisme σ tel

que $\sigma \circ \varphi_T = \varphi_S$

3) $\varphi_S(T) \subseteq \mathcal{U}(D[S^{-1}])$ et $\varphi_T(S) \subseteq \mathcal{U}(D[T^{-1}])$

Démonstration

1) \implies 2). car d'après (2.2) : $D[S^{-1}] \approx D[J(S)^{-1}] = D[J(T)^{-1}] \approx D[T^{-1}]$

2) \implies 3) car $(D[S^{-1}], \varphi_S)$ et $(D[T^{-1}], \varphi_T)$ sont alors solutions

du même problème universel

3) \implies 1) Si $\varphi_S(T) \subseteq \mathcal{U}(D[S^{-1}])$ on a $T \subseteq J(S)$ donc $J(T) \subseteq J(S)$ d'après

(2.3). De même $J(S) \subseteq J(T)$.

(2.5) Pour tout complexe S de D : $J(S \cdot \mathcal{U}(D^1)) = J(S) \cdot \mathcal{U}(D^1) = J(S)$

. $J(S) \subseteq J(S) \cdot \mathcal{U}(D^1)$ d'une part ; d'autre part si $x = y \cdot u \in J(S) \cdot \mathcal{U}(D^1)$ alors $\varphi_S(x) \in \mathcal{U}(D[S^{-1}])$ donc $x \in J(S)$.

. On a $J(S) \subseteq J(S \cdot \mathcal{U}(D^1))$ car $S \subseteq S \cdot \mathcal{U}(D^1)$ et d'après (2.3). Réciproquement $J(S \cdot \mathcal{U}(D^1)) \subseteq J(S)$

car $S \cdot \mathcal{U}(D^1) \subseteq J(S)$ et d'après (2.3).

Définitions : On dit qu'une partie S est un fermé si $S = J(S)$.

Un ouvert est le complémentaire d'un fermé.

(2.6) $\mathcal{U}(D)$ est le plus petit fermé

En effet $\mathcal{U}(D)$ est fermé : si $\mathcal{U}(D) = \emptyset$ on a $J(\emptyset) = \mathcal{U}(D) = \emptyset$

si $\mathcal{U}(D) \neq \emptyset$ on a $D[\mathcal{U}(D)^{-1}] \approx D$, cf [6]

donc $J(\mathcal{U}(D)) = \mathcal{U}(D)$

$\mathcal{U}(D)$ est le plus petit fermé car pour toute partie $S: \mathcal{U}(D) \subseteq J(S)$.

On ne connaît pas encore la caractérisation des fermés dans le cas général. Remarquons toutefois que si $\langle S \rangle$ est le sous-demi-groupe engendré par $S : \{x, x \in D, xDx \cap \langle S \rangle \neq \emptyset\} \subseteq J(S)$ car si $xyx \in xDx$ alors $\varphi_S(xyx) \in \mathcal{U}(D[S^{-1}])$ donc $\varphi_S(x) \in \mathcal{U}(D[S^{-1}])$ et $x \in J(S)$.

(2.7) Théorème : Soit S un complexe d'un demi-groupe commutatif D :

1) $J(S) = \{x, x \in D, xD \cap \langle S \rangle \neq \emptyset\}$

2) Les fermés de D sont les parties stables consistantes et les ouverts sont les idéaux premiers.

Démonstration : 1) Si $xy \in \langle S \rangle$ alors $\varphi_S(xy)$ est inversible donc

$\varphi_S(x)$ aussi car D est commutatif et l'on a

$x \in J(S)$. Si $x \in J(S)$ il existe $(a, s) \in Dx \cap \langle S \rangle$

tel que : $\varphi_S(x) \varphi_S(a) \varphi_S(s)^{-1} = e_D[S^{-1}]$

donc il existe $t \in \langle S \rangle$ tel que $xat = st \in \langle S \rangle$

) $J(\emptyset) = \mathcal{U}(D)$ est une partie consistante et stable ;
 si $S \neq \emptyset : xy \in J(S)$ entraîne $\varphi_S(x) \cdot \varphi_S(y) \in \mathcal{U}(D[S^{-1}])$

donc $x, y \in J(S)$.

Si S est stable et consistant soit $x \in J(S)$; il existe d'après 1) $y \in D$ tel que $xy \in \langle S \rangle = S$ d'où $x \in S$ d'après la consistance de S .

Remarque : . La réunion de deux fermés n'est pas nécessairement un fermé car l'intersection de deux idéaux premiers n'est pas nécessairement premier.

(2.8) Corollaire : Soient S et T deux complexes d'un demi-groupe commutatif D . Les assertions suivantes sont équivalentes.

a) $J(S) = J(T)$

b) Pour tout ouvert $A : A \cap \langle S \rangle \neq \emptyset \iff A \cap \langle T \rangle \neq \emptyset$

a) \implies b) Si $x \in A \cap \langle S \rangle$ comme $\langle S \rangle \subseteq J(S)$ on a $x \in J(S)$ donc $x \in J(T)$ soit, d'après (2.7) il existe $y \in D$ tel que $xy \in \langle T \rangle$ et comme A est un idéal : $xy \in A \cap \langle T \rangle \neq \emptyset$

b) \implies a) $J(S)$ est un ouvert et $J(S) \cap \langle S \rangle = \emptyset$ d'où $J(S) \cap \langle T \rangle = \emptyset$ c'est à dire que $T \subseteq J(S)$ donc $J(T) \subseteq J(S)$. De même $J(S) \subseteq J(T)$.

§3. PROPRIÉTÉS DE TRANSFERT POUR LES HOMOMORPHISMES.

Soient D et D' deux demi-groupes, S une partie de D , T une partie de D' et $f : D \longrightarrow D'$ un homomorphisme.

(3.1) Les assertions suivantes sont équivalentes

1) il existe un unique homomorphisme \hat{f} conservant l'élément neutre tel que $\hat{f} \circ \varphi_S = \varphi_T \circ f$

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{f} & D' \\
 \varphi_S \downarrow & & \downarrow \varphi_T \\
 D[S^{-1}] & \dashrightarrow & D'[T^{-1}]
 \end{array}$$

2) $f(S) \subseteq J(T)$

Dans ce cas on a $f(J(S)) \subseteq J(T)$

1) \implies 2) Soit $x = f(s) \in f(S) : \varphi_T(x) = \varphi_T \circ f(s) = \hat{f} \circ \varphi_S(s) \in \mathcal{U}(D'[T^{-1}])$
 car \hat{f} conserve l'élément neutre, donc $x \in J(T)$.

2) \implies 1) $\varphi_T \circ f$ rend inversibles les éléments de S donc il existe \hat{f} conservant le neutre tel que $\hat{f} \circ \varphi_S = \varphi_T \circ f$. L'unicité de \hat{f} s'en déduit aussitôt. Il est clair que $f(J(S)) \subseteq J(T)$

(3-2) Théorème : a) si f est un épimorphisme, il en est de même pour \hat{f}

b) Pour toute partie S de D $f(J(S)) \subseteq J(f(S))$

c) Si $J(f(S)) = J(T)$ et si f est rétractable, \hat{f} l'est aussi

d) Si de plus $J(f(S)) = f(J(S))$ et si f est surjectif [resp. isomorphisme] il en est de même pour \hat{f}

Démonstration :

a) Immédiat puisque φ_S et φ_T sont des épimorphismes (1.1).

- b) On a $f(S) \subseteq J(f(S))$ donc d'après (3.1) $f(J(S)) \subseteq J(f(S))$
- c) On a toujours (dès que \hat{f} existe) : $f(J(S)) \subseteq J(f(S)) \subseteq J(T)$.
 Si de plus $J(f(S)) = J(T)$ et s'il existe r tel que $r \cdot f = 1_D$
 on a : $r(T) \subseteq r(J(T)) = r(J(f(S)))$ or d'après b)
 $r(J(f(S))) \subseteq J(r \cdot f(S)) = J(S)$; donc $r(T) \subseteq J(S)$ et d'après (3.1)
 il existe \hat{r} unique tel que $\hat{r} \cdot \varphi_T = \varphi_S \cdot r$ d'où $\hat{r} \cdot \hat{f} = 1_{D[S^{-1}]}$
 d'après (1.1)
- d) Si f est surjectif il suffit de montrer que les éléments de la forme $\varphi_T(y)$ et $\varphi_T(t)^{-1}$ sont atteints par \hat{f} :

. $\varphi_T(y) = \varphi_T(f(x)) = \hat{f}(\varphi_S(x))$ car f est surjectif

. si $t \in T \subseteq J(T) = f(J(S))$ donc $t = f(s)$, $s \in J(S)$. D'où :

$$\varphi_T(t)^{-1} = [\varphi_T \cdot f(s)]^{-1} = [\hat{f} \cdot \varphi_S(s)]^{-1} = \hat{f}[\varphi_S(s)^{-1}]$$

Si f est un isomorphisme f est rétractable et surjectif donc \hat{f} aussi.

Remarque : On a le transfert " f injectif $\implies \hat{f}$ injectif" dans les cas suivants :

- . S et T simplifiables dans D et D' respectivement, et $f(S) \subseteq J(T)$
- . D et D' commutatifs et $f(J(S)) = J(T)$.

§4. PROPRIÉTÉS DE TRANSFERT POUR LES IDÉAUX

Nous étudions ici les relations entre les idéaux de D et de $D[S^{-1}]$: si I est un idéal de $D[S^{-1}]$, $\varphi_S^{-1}(I)$ peut être vide ; nous nous limiterons donc au cas où $D|S^{-1}|$ est un demi-groupe de fractions à droite ([6] et [8]) ; dans ce cas tout

élément de $D[S^{-1}]$ peut s'écrire $\varphi_S(x) \varphi_S(s)^{-1}$ avec $x \in D$, $s \in \langle S \rangle$.

On note \mathcal{D} (resp. \mathcal{B}) l'ensemble des idéaux à droite (resp. bilatère) de D , et \mathcal{D}_S , \mathcal{B}_S les ensembles analogues pour $D[S^{-1}]$. Lorsque $I \in \mathcal{D}_S$, $\varphi_S^{-1}(I)$ n'est pas vide puisque :

$$\varphi_S(x) \varphi_S(s)^{-1} \in I \implies x \in \varphi_S^{-1}(I).$$

Nous avons à utiliser les applications suivantes :

$r : \mathcal{D}_S \longrightarrow \mathcal{D}$ définie par $r(I) = \varphi_S^{-1}(I)$; $\delta : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}_S$ définie par $\delta(I) = \varphi_S(I) \cdot D[S^{-1}]$; et $\beta : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}_S$ définie par $\beta(I) = D[S^{-1}] \varphi_S(I) \cdot D[S^{-1}]$.

L'application r est appelée restriction, δ et β sont appelées extensions. Remarquons que $\delta(I) = \{\varphi_S(i) \cdot \varphi_S(s)^{-1}, i \in I, s \in \langle S \rangle\}$ et que $\beta(I) = D[S^{-1}] \cdot \delta(I)$.

Les applications r , δ , β sont des applications croissantes d'ensembles ordonnés par inclusion. De plus :

$$(4.1) \quad \delta \circ r = 1_{\mathcal{D}_S} \quad \text{et} \quad \beta \circ r = 1_{\mathcal{B}_S}$$

ce qui montre que r est injective, δ et β sont surjectives et que : $\text{card } \mathcal{B}_S \leq \text{card } \mathcal{D}_S \leq \text{card } \mathcal{D}$; en général ces applications ne sont pas bijectives.

(4.2) Théorème : Si $D[S^{-1}]$ est un demi-groupe de fractions à droite et si D vérifie l'une des conditions suivantes :

- . D est noëthérien
- . D est noëthérien à droite

Propriétés des demi-groupes de fractions

- . D est artinien
- . D est artinien à droite
- . D est simple
- . D est simple à droite

alors $D[S^{-1}]$ vérifie la même propriété

La démonstration se déduit aisément de (4.1). Il résulte également de (4.1) que $r_\circ \delta$ et $r_\circ \beta$ sont des fermetures dans \mathcal{D} et \mathcal{B} . Si $\bar{\mathcal{D}}$ et $\bar{\mathcal{B}}$ désignant les ensembles d'idéaux fermés pour $r_\circ \delta$ et $r_\circ \beta$ on a :

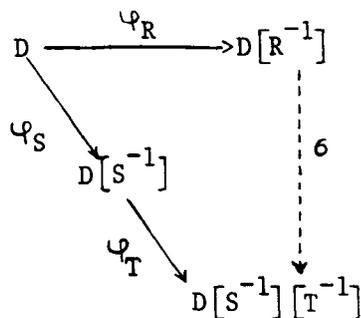
(4.3) Théorème : r et la restriction de δ à $\bar{\mathcal{D}}$ (resp. r et la restriction de β à $\bar{\mathcal{B}}$) sont des isomorphismes réciproques entre les ensembles ordonnés $\bar{\mathcal{D}}$ et \mathcal{D}_S (resp. $\bar{\mathcal{B}}$ et \mathcal{B}_S)

(4.4) Si T est un sous-demi-groupe de $D[S^{-1}]$ contenant $\varphi_S(S)$ et si $R = \varphi_S^{-1}(T)$ alors : $D[R^{-1}]$ est isomorphe à $D[S^{-1}][T^{-1}]$

Démonstration

- . $\varphi_T \circ \varphi_S$ rend inversibles les éléments de R car si $x \in R$ on a $\varphi_S(x) \in T$; il existe donc un homomorphisme σ tel que $\sigma \circ \varphi_R = \varphi_T \circ \varphi_S$

- . φ_R rend inversibles les éléments de S , car si $s \in S$ $\varphi_S(s) \in T$ donc $s \in R$; donc il existe θ tel que $\theta \circ \varphi_S = \varphi_R$



. θ rend inversibles les éléments de T :

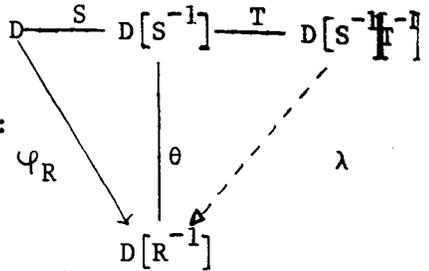
si $t \in T$ on a $t = \varphi_S(x) \cdot \varphi_S(s)^{-1}$; or

$\varphi_S(s) \in T$ donc $\varphi_S(x) \in T$ ie $x \in R$; alors :

$\theta(t) = \varphi_R(x) \cdot \theta[\varphi_S(s)^{-1}]$ inversible.

Il existe donc λ tel que $\lambda \circ \varphi_T = \theta$.

Il résulte alors de (1.1) que $\sigma = \lambda^{-1}$ est un isomorphe.



Lorsque P est un idéal premier on note D_P au lieu de $D[(D-P)^{-1}]$: demi-groupe localisé de D en P

(4-5) Théorème : Soit P un idéal premier et propre de $D[S^{-1}]$ et $P' = r(P)$. Alors $D_{P'}$ est isomorphe à $D[S^{-1}]_P$

Démonstration : P étant un idéal premier propre, $T = D[S^{-1}] - P$ est un sous-demi-groupe de $D[S^{-1}]$; comme $P \cap \varphi_S(S) = \emptyset$ on a $\varphi_S^{-1}(T) = D - r(P)$ et l'on applique (4.4)

On note \mathcal{S} l'ensemble des idéaux bilatères premiers de D ne contenant pas $\langle S \rangle$, et \mathcal{S}_S l'ensemble des idéaux bilatères premiers et propres de $D[S^{-1}]$.

(4.6) Théorème : Lorsque S est simplifiable dans D , ou lorsque D est commutatif, β et r sont des isomorphismes entre les ensembles ordonnés \mathcal{S} et \mathcal{S}_S .

Démonstration : a) Supposons S simplifiable dans D

. si $P \in \mathcal{S}$ P est fermé : soit $x \in r.\beta(P)$, d'où $\varphi_S(x) = \varphi_S(a)\varphi_S(s)^{-1}$.

avec $p \in P$, soit $\varphi_S(xt) = \varphi_S(a)\varphi_S(s)^{-1} \cdot \varphi_S(p) = \varphi_S(a)\varphi_S(b)\varphi_S(u)^{-1}$

avec $sb = pu \in P$ donc $b \in P$. Alors : $\varphi_S(xtu) = \varphi_S(ab)$ donc $xtu = ab \in P$ et $x \in P$.

Il suffit de montrer d'après (4.3) que $P \in \mathfrak{F} \implies \beta(P) \in \mathfrak{F}_S$ et que $P \in \mathfrak{F}_S \implies r(P) \in \mathfrak{F}$.

- si $P \in \mathfrak{F}_S$ $r(P)$ est premier et $r(P) \cap \langle S \rangle = \emptyset$ sinon

$$\beta \circ r(P) = P = D[S^{-1}]$$

- si $P \in \mathfrak{F}$ $\beta(P)$ est propre sinon $P = r \circ \beta(P) = D$; $\beta(P)$ est premier : si $\xi \cdot \eta = \varphi_S(a) \varphi_S(s)^{-1} \cdot \varphi_S(b) \cdot \varphi_S(t)^{-1} \in \beta(P)$ alors $\varphi_S(ac) \in \beta(P)$, avec $sc = bt$; donc $ac \in r \circ \beta(P) = P$ et l'on a soit $a \in P$, d'où $\xi \in \beta(P)$, soit $c \in P$ d'où $sc = bt \in P$ et $b \in P$, donc $\eta \in \beta(P)$.

b) Supposons D commutatif et posons $\beta = \delta = e$

. si $P \in \mathfrak{F}$ P est fermé : soit $x \in r \circ e(P)$, d'où $\varphi_S(x) = \varphi_S(p) \varphi_S(s)^{-1}$ avec $p \in P$; donc $\varphi_S(xs) = \varphi_S(p)$ et il existe $t \in \langle S \rangle$ tel que $xst = pt \in P$ d'où $x \in P$.

. - si $P \in \mathfrak{F}_S$ $r(P) \in \mathfrak{F}$ pour la même raison qu'en a)

- si $P \in \mathfrak{F}$ $e(P)$ est propre (même raison qu'en a) ; $e(P)$ est premier : si $\xi \eta = \varphi_S(a) \cdot \varphi_S(s)^{-1} \cdot \varphi_S(b) \cdot \varphi_S(t)^{-1} \in e(P)$

alors $\varphi_S(ab) \in e(P)$ donc $ab \in r \circ e(P) = P$ donc $a \in P$ ou $b \in P$ soit

$\xi \in e(P)$ ou $\eta \in e(P)$.

§5. COMPOSITION DES DEMI-GROUPES DE FRACTIONS

Soit $\alpha \in D$ un élément fixé ; on pose $\mathfrak{F}_\alpha(D) = \{S \in \mathfrak{F}(D), S \cap \alpha \neq \emptyset\}$ et l'on munit $\mathfrak{F}_\alpha(D)$ des deux lois $(S, T) \longmapsto S.T$ et $(S, T) \longmapsto S \cup T$

qui font de $\mathfrak{D}_\alpha(D)$ un demi-anneau. La loi \cup est idempotente et admet l'élément D pour zéro. $\mathfrak{D}_\alpha(D)$ est préordonné par la relation \leq définie par $S \leq T$ si $J(S) \subseteq J(T)$.

On pose $D_\alpha = \{D[S^{-1}], S \in \mathfrak{D}_\alpha(D)\}$ et l'on définit une application f_α de $\mathfrak{D}_\alpha(D)$ dans D_α par $f_\alpha(S) = D[S^{-1}]$; f_α étant bijective on peut transporter sur D_α la structure de $\mathfrak{D}_\alpha(D)$:

$$D[S^{-1}] \cdot D[T^{-1}] = D[(ST)^{-1}]$$

$$D[S^{-1}] \cup D[T^{-1}] = D[(S \cup T)^{-1}]$$

$$D[S^{-1}] \leq D[T^{-1}] \text{ si } J(S) \subseteq J(T)$$

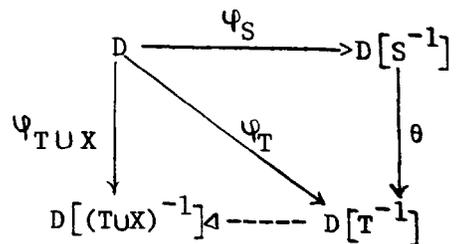
Soit \mathfrak{R} l'équivalence sur D_α associée au préordre \leq :
 $D[S^{-1}] \mathfrak{R} D[T^{-1}]$ si $J(S) = J(T)$ Il résulte de (2.4) que
 $D[S^{-1}] \mathfrak{R} D[T^{-1}]$ si $D[S^{-1}] \approx D[T^{-1}]$. Posons $\Delta_\alpha = D_\alpha / \mathfrak{R}$ et notons $D[S^{-1}]$ la classe de $D[S^{-1}]$ modulo \mathfrak{R} .

(5.1) Théorème : Pour tout $\alpha \in D$ on a les propriétés suivantes :

- a) \mathfrak{R} est compatible avec les deux lois de D_α
- b) Dans Δ_α les deux lois \cdot et \cup coïncident
- c) Δ_α est une bande commutative ayant $D[D^{-1}]$ pour zéro et $D[\langle \alpha \rangle^{-1}]$ pour élément neutre.

Démonstration :

. Compatibilité avec la loi \cup :
 supposons $D[S^{-1}] \approx D[T^{-1}]$ et montrons que pour tout $X \in \mathfrak{D}_\alpha(D)$
 $D[(S \cup X)^{-1}] \approx D[(T \cup X)^{-1}]$: il



existe par hypothèse un isomorphisme θ tel que $\theta \circ \varphi_S = \varphi_T$, d'autre part φ_{TUX} rend inversibles les éléments de T, donc il existe ϵ tel que $\epsilon \circ \varphi_T = \varphi_{TUX}$. Il s'ensuit que φ_{TUX} rend inversibles les éléments de SUX : c'est évident pour les éléments de X, et si $s \in S$ $\varphi_{TUX}(s) = \epsilon \circ \theta \circ \varphi_S(s)$ est inversible. De même φ_{SUX} rend inversibles les éléments de TVX d'où l'isomorphisme d'après (2.4)

. compatibilité avec la loi . : notons d'abord que pour tout $S \in \mathfrak{D}_\alpha(D)$ on a $\alpha \in J(S)$ car $S \in \mathfrak{D}_\alpha(D) \implies \exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\alpha^n \in S$ donc $\varphi_S(\alpha^n)$ est inversible dans $D[S^{-1}]$ et $\varphi_S(\alpha)$ aussi, ie $\alpha \in J(S)$. Pour montrer la compatibilité de la loi. nous allons prouver que $\forall S, T \in \mathfrak{D}_\alpha(D) : D[(ST)^{-1}] \cong D[(SUT)^{-1}]$ ce qui démontrera aussi b).

- φ_{SUT} rend inversibles les éléments de ST donc $J(ST) \subseteq J(SUT)$
- φ_{ST} rend inversibles les éléments de SUT : $T \in \mathfrak{D}_\alpha(D) \implies \exists n \in \mathbb{N}^*$
 $\alpha^n \in T$

si $s \in S$ on a $\varphi_{ST}(s) = \varphi_{ST}(s\alpha^n) \varphi_{ST}(\alpha^n)^{-1}$ inversible. De même $S \in \mathfrak{D}_\alpha(D)$ donc $\exists p \in \mathbb{N}^*$ $\alpha^p \in S$ et si $t \in T$ on a $\varphi_{ST}(t) = \varphi_{ST}(\alpha^p t)^{-1}$.

$\varphi_{ST}(\alpha^p t)$ inversible

L'isomorphisme résulte alors de (2.4).

La propriété c) s'en déduit aisément. Notons la conséquence suivante de b) :

(5.2) Corollaire : Si S et T sont deux complexes de D et s'il existe α dans D tel que S et T appartiennent à $\mathfrak{D}_\alpha(D)$ alors $D[(ST)^{-1}]$ est isomorphe à $D[(TS)^{-1}]$

§6. DEMI-GROUPES DE FRACTIONS D'UN DEMI-GROUPE ATOMIQUE

Soit D un demi-groupe commutatif, \mathcal{R} l'équivalence de Green sur D , [5] ; on dit que $p \in D - \mathcal{U}(D)$ est irréductible si $a|p$ ("a divise p") implique soit $a \in \mathcal{U}(D)$, soit $a \mathcal{R} p$. On note $D^* = D - \{0\}$ si D possède un zéro, et $D^* = D$ sinon. D est atomique si tout élément de D^* admet une factorisation complète c'est-à-dire peut s'écrire $d = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ avec $\forall i$ p_i irréductible et $\alpha_i \in \mathbb{N}$. On appelle base de D un système représentatif d'éléments irréductibles, si B est une base d'un demi-groupe atomique D tout élément $d \in D$ s'écrit $u \prod_{p \in B} p^p$ avec $u \in \mathcal{U}(D^1)$, $n_p \in \mathbb{N}$ presque tous m : S est un complexe de D on pose $M(S) = J(S) \cap B$ et $P(S) = \langle M(S) \rangle$. Remarquons que $M(S) \subseteq P(S) \subseteq J(S)$.

(6.1) Soit D un demi-groupe atomique et S un complexe de D^* .

On a : $S \subseteq P(S)^1 \cdot \mathcal{U}(D^1)$

Soit $s \in S$ et B une base de D ; comme $s \in D^*$ on a $s = u p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ donc : $\varphi_S(s) = \varphi_S(u) \varphi_S(p_1)^{\alpha_1} \dots \varphi_S(p_n)^{\alpha_n} \in \mathcal{U}(D[S^{-1}])$ et $\forall i$ $\varphi_S(p_i)$

inversible, soit $p_i \in J(S)$ donc $p_i \in J(S) \cap B$ et

$s = u \cdot p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n} \in P(S)^1 \cdot \mathcal{U}(D^1)$.

(6.2) Proposition : Soit D un demi-groupe atomique et S un complexe de D^* . Les demi-groupes $D[S^{-1}]$, $D[J(S)^{-1}]$, $D[N(S)^{-1}]$, $D[P(S)^{-1}]$ sont isomorphes.

Démonstration :

d'après (2.2) $D[S^{-1}] \cong D[J(S)^{-1}]$

$$\begin{aligned} \text{d'après (2.5) et (6.1)} : S \subseteq P(S)^1 \cdot \mathcal{U}(D^1) \subseteq J(S)^1 \cdot \mathcal{U}(D^1) \\ = J(S) \cdot \mathcal{U}(D^1) \cup \mathcal{U}(D^1) = J(S) \end{aligned}$$

J étant croissante et idempotente : $J(S) \subseteq J(P(S)^1 \cdot \mathcal{U}(D^1)) \subseteq J(S)$
soit $J(S) = J(P(S)^1 \cdot \mathcal{U}(D^1))$.

$$\begin{aligned} \text{Appliquons à nouveau (2.5)} : J(S) = J(P(S)^1 \cdot \mathcal{U}(D^1)) = J(P(S)^1) \\ = J(P(S)) \text{ d'après [6] .} \end{aligned}$$

Par conséquent $D[S^{-1}] \simeq D[P(S)^{-1}]$ (d'après (2.4)). Comme
 $P(S) = \langle M(S) \rangle$ on a : $D[M(S)^{-1}] \simeq D[P(S)^{-1}]$

Notations : $\mathfrak{S}^*(B) = \mathfrak{S}(B) - \{\emptyset\}$; avec les notations du §5 :
 $\mathfrak{F}(D) = \{D[S^{-1}] ; S - \mathcal{U}(D) \neq \emptyset\}$ On dit que $p \in D - \mathcal{U}$ est premier
si $p \mid ab \implies p \mid a$ ou $p \mid b$.

(6.3) Théorème : Soit D un demi-groupe atomique simplifiable de base B dans lequel tout élément irréductible est premier. Alors $\mathfrak{S}^*(B)$ et $\mathfrak{F}(D)$ sont équipotents.

Démonstration : . On définit $\psi : \mathfrak{F}(D) \longrightarrow \mathfrak{S}^*(B)$ par
 $\psi(D[A^{-1}]) = J(A) \cap B = M(A)$

C'est bien une application car $D[A^{-1}] = D[C^{-1}] \iff J(A) = J(C)$
donc $J(A) = J(C) \cap B$; $J(A) \cap B \in \mathfrak{S}^*(B)$ car par définition de $\mathfrak{F}(D)$: $A - \mathcal{U}(D) \neq \emptyset$; soit $x \in A - \mathcal{U}(D)$ donc $x = up_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$
et du moins l'un des α_i est distinct de zéro donc $p_i \in J(A) \cap B$
et $J(A) \cap B \neq \emptyset$.

. soit $\varphi : \mathfrak{S}^*(B) \longrightarrow \mathfrak{F}(D)$ définie par
 $\varphi(A) = D[A^{-1}]$. On a bien $\varphi(A) \in \mathfrak{F}(D)$ car $B \cap \mathcal{U}(D) = \emptyset$ donc
 $A - \mathcal{U}(D) = A \neq \emptyset$.

$$\begin{aligned} \cdot \text{ d'après (6.2) : } \varphi \circ \psi \left(\overline{D[A^{-1}]} \right) &= \varphi(J(A) \cap B) \\ &= D[M(A)^{-1}] = D[A^{-1}] \end{aligned}$$

$$\cdot \psi \circ \varphi(A) = \psi(D[A^{-1}]) = J(A) \cap B. \text{ Montrons que } A = J(A) \cap B :$$

il est immédiat que $A \subseteq J(A) \cap B$; soit $p \in J(A) \cap B$ donc $p \in B$ et d'après (2.7) il existe $y \in D$ tel que $py \in \langle A \rangle$. Donc $py = q_1 q_2 \dots q_n$ avec $q_i \in A$. p est irréductible donc premier. Par conséquent :
 $\exists i \ p | q_i$. D'où $p \mathfrak{R} q_i$. Comme $p \in B$ et $q_i \in B$ on a $p = q_i \in A$.

Donc $\psi \circ \varphi(A) = A$.

§7. DEMI-GROUPES A FACTORISATION UNIQUE

Soit B une base d'un demi-groupe atomique D : on dit que D est à factorisation unique si : $\forall d \in D^* : d = up_1 p_2 \dots p_m = vq_1 q_2 \dots q_n$ implique $n = m$ et $\forall i \ p_i \mathfrak{R} q_i$

Dans ce cas tout élément d de D^* peut s'écrire $d = u \prod_{p \in B} p^{v_p(d)}$ avec $v_p(d) \in \mathbb{N}$ et dans ce produit seul un nombre fini de $v_p(d)$ n'est pas nul. [3] On démontre, cf [3], que : $xy \neq 0 \implies v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$.

(7.1) Théorème : Soit D un demi-groupe à factorisation unique. Alors pour tout sous-demi-groupe S de $D[S^{-1}]$ est à factorisation unique.

Démonstration

. d'après [3] il suffit de trouver un sous-ensemble A de $D[S^{-1}]$ tel que tout élément de $D[S^{-1}]$ s'écrive de façon unique à "une unité près" comme produit fini d'éléments de A . Si card

Propriétés des demi-groupes de fractions

$D[S^{-1}] = 1$ le résultat est évident. Supposons donc $\text{card } D[S^{-1}] > 1$.

. Soit B une base de D , $B_0 = \{p \in B, \exists s \in S \text{ } ps = 0\}$ et

$$B' = B - (B_0 \cup J(S))$$

. par définition de B et $J(S)$: $\forall s \in S \text{ } s = u \prod_{p \in B \cap J(S)} p^{v_p(s)}$

. Cherchons les unités de $D[S^{-1}]$ (on note $\frac{d}{s}$ au lieu de $\varphi_S(d) \varphi_S(s)^{-1}$). Si $\frac{d}{s}$ est inversible il existe $\frac{b}{t}$ tel que

$$\frac{d}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{s}{s} \text{ donc } \exists \sigma \in S \text{ tel que } \sigma db = \sigma s^2 t \text{ S. Comme } \text{card } D[S^{-1}] > 1$$

on a $S \subseteq D^*$ donc $\sigma s^2 t \neq 0$ donc si $p \in B$: $v_p(d) + v_p(b) = v_p(s) + v_p(t)$;

et si $p \notin J(S)$: $v_p(d) = v_p(b) = 0$. Donc si $\frac{d}{s}$ est une unité :

$\forall p \notin J(S) \text{ } v_p(d) = 0$. Réciproquement si $\forall p \notin J(S) \text{ } v_p(d) = 0$:

$$\varphi_S(d) = \varphi_S(u) \prod_{p \in B \cap J(S)} \varphi_S(p)^{v_p(d)} \text{ donc } \frac{d}{s} \text{ est inversible.}$$

Les unités de $D[S^{-1}]$ sont donc les fractions de la forme

$$\frac{d}{s} = \varphi_S(u) \prod_{p \in B \cap J(S)} \varphi_S(p)^{v_p(d) - v_p(s)} \text{ avec } u \in \mathcal{U}(D^1).$$

. Soit $\frac{d}{s} \in D[S^{-1}]$ donc $d \neq 0$ et $s \neq 0$ et l'on peut écrire

$$\frac{d}{s} = \varphi_S(u) \varphi_S(v)^{-1} \prod_{p \in B} \varphi_S(p)^{v_p(d) - v_p(s)} \text{ avec } u, v \in \mathcal{U}(D^1).$$

Puisque $\frac{d}{s} \neq 0$ et que $s \in S$: $\forall p \in B_0 \text{ } v_p(d) = v_p(s) = 0$ et l'on

$$\text{peut écrire } \frac{d}{s} = \omega \prod_{p \in B'} \varphi_S(p)^{v_p(d) - v_p(s)} \text{ avec}$$

$u, v \in \mathcal{U}(D^1)$. Puisque $\frac{d}{s} \neq 0$ et que $s \in S : \forall p \in B, v_p(d) = v_p(s) = 0$

et l'on peut écrire $\frac{d}{s} = \omega \prod_{p \in B'} \varphi_S(p)^{v_p(d) - v_p(s)}$ avec

$$\omega = \frac{u}{v} \prod_{p \in B \cap J(S)} \varphi_S(p)^{v_p(d) - v_p(s)} \in \mathcal{U}(D[S^{-1}])$$

Pour $p \in B' \quad \alpha_p = v_p(d) - v_p(s) = v_p(d) \geq 0$ donc $\frac{d}{s} = \omega \prod_{p \in B'} \varphi_S(p)^{\alpha_p}$

. L'écriture précédente est unique à une unité près : si

$\frac{d}{s} = \omega' \prod_{p \in B'} \varphi_S(p)^{\beta_p}$, ω' unité, alors $\omega' = \frac{a}{t}$ avec $\forall p \notin B \cap J(S)$

$v_p(a) = 0$. Si $d' = \prod_{p \in B'} p^{\beta_p}$ on a $\frac{d}{s} = \frac{ad'}{t}$ donc il existe

$\sigma \in S$ tel que $\sigma dt = \sigma ad's$. Mais $\frac{d}{s} \neq 0$ et $\sigma t \in S \implies \sigma dt \neq 0$, donc

si $p \in B : v_p(d) + v_p(t) = v_p(a) + v_p(d') + v_p(s)$; si $p \notin J(S) :$

$v_p(d) = v_p(d') = \beta_p$, d'où le résultat.

Remarque : On a démontré que $\frac{d}{s} = \frac{d'}{s'} \implies \forall p \in B' \quad v_p(d) = v_p(d')$

§8. AUTRES PROPRIÉTÉS

(8.1) Proposition : Soit D un demi-groupe commutatif avec élément neutre e_D , et S un sous-demi-groupe de D^* . Si (D, S) est de type (R) [2], les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) $S \subseteq \mathcal{U}(D)$

b) φ_S est un isomorphisme

c) φ_S est surjectif

Démonstration : a) \implies b) d'après [6]

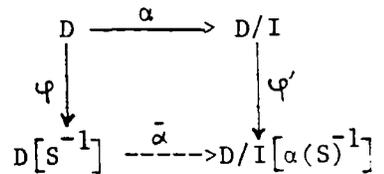
b) \implies c) évident

c) \implies a) $e_D \in S$ car si $s \in S$ $se_D = s$ et comme $S \subseteq D^*$ et $(D, \mathfrak{S}$ est de type (R) on en déduit $e_D = e_S \in S$. Soit $s \in S$; comme φ_S est surjectif, $\exists x \in D : \varphi_S(x) = \varphi_S(s)^{-1}$, donc il existe $t \in S$ tel que $txs = te_D = t$; (D, S) étant de type (R) on a $xs = e_D = e_S$, puisque $S \subseteq D^*$; donc $s \in \mathcal{U}(D)$.

(8.2) Commutation avec l'équivalence de Rees

Soit D un demi-groupe commutatif, I un idéal et S un complexe de D ; $\alpha : D \longrightarrow D/I$, $\varphi : D \longrightarrow D[S^{-1}]$, $\varphi' : D/I \longrightarrow D/I[\alpha(S)^{-1}]$ les homomorphismes canoniques. Alors les demi-groupes $D/I[\alpha(S)^{-1}]$ et $D[S^{-1}]/e(I)$ sont isomorphes.

Démonstration : D'après (3.2) il existe $\bar{\alpha}$ surjectif tel que $\bar{\alpha} \circ \varphi = \varphi' \circ \alpha$. Montrons que l'équivalence d'homomorphisme de $\bar{\alpha}$ est l'équivalence de Rees dans $D[S^{-1}]$ modulo $e(I)$:



. Si $x = \varphi(a) \varphi(s)^{-1}$, $y = \varphi(b) \varphi(t)^{-1}$ et $\bar{\alpha}(x) = \bar{\alpha}(y)$ on a $\varphi'(\alpha(at)) = \varphi'(\alpha(bs))$ donc il existe $u \in \langle \alpha(S) \rangle = \langle S \rangle$ tel que $u \circ \alpha(at) = u \circ \alpha(bs)$; si $u = \alpha(\sigma)$ avec $\sigma \in \langle S \rangle$: $\alpha(\sigma at) = \alpha(\sigma bs)$ donc ou bien $\sigma at = \sigma bs$ d'où $x = y$

ou bien $\sigma at, \sigma bs \in I$ d'où $x, y \in e(I)$

. De même si $x \equiv y \pmod{e(I)} : \bar{\alpha}(x) = \bar{\alpha}(y)$ D'où le résultat.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. BOURBAKI : Algèbre commutative - Ch. 2 - Hermann
- [2] A. BOUVIER : Demi-groupes de type (R) - C.R. Acad. Sc. Paris t 268 (1969) p. 372 - 375
- [3] A. BOUVIER : Demi-groupes de type (R) - Thèse de 3ème Cycle - Lyon
- [4] A. BOUVIER et A. FAISANT : Quelques propriétés des demi-groupes de fractions - Séminaire P. Lefebvre (Lyon 1968/69) Exp. 14
- [5] A.G. CLIFFORD and G.B. PRESTON : The algebraic theory of semi-groups - Math. Surveys Amer. Math. Soc.
- [6] A. FAISANT : Sur les demi-groupes de fractions - Publications du dép. de Math. de Lyon 1969 T 6-1 p. 73-85
- [7] A. FAISANT : Sur les demi-groupes de quotients - C.R. Acad. Sc. Paris t. 268 (1969) p. 521-523
- [8] P. LEFEBVRE : Semi-groups and rings of fractions - University of Tennessee (1968) Knoxville U.S.A.
- [9] P. SAMUEL : Anneaux factoriels - Soc. de Math. de São-Paulo
- [10] ZARISKY and P. SAMUEL : Commutative algebra - Von Nostrand

Manuscrit remis en janvier 1970

A. BOUVIER Maître-assistant
A. FAISANT Assistant
Département de Mathématiques
Université Claude-Bernard
43, boulevard du 11 novembre 1918
VILLEURBANNE