PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

JEAN BRACONNIER

Une remarque sur les groupes de Galois topologiques

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1970, tome 7, fascicule 2
, p. 137-142
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1970__7_2_A4_0>

UNE REMARQUE SUR LES GROUPES DE GALOIS TOPOLOGIQUES

Jean BRACONNIER

On peut étendre [3] le théorème d'Artin relatif aux groupes finis d'automorphismes d'un corps [1] aux groupes compacts d'automorphismes, à l'aide de la théorie de Krull des extensions galoisiennes [2]. On trouvera ci-dessous une démonstration directe de ce résultat, qui permet de retrouver et généraliser cette théorie de Krull.

1. *Groupes de Galois topologiques.*

(1.1) Soient L et M des corps (commutatifs) ; on désigne par Mor(L,M) l'ensemble des morphismes de L dans M et on munit cet ensemble de la *topologie de convergence simple* (L et M étant discrets). Mor(L,M) est ainsi un sous-espace fermé de M^L (muni de ladite topologie) : on note Aut(L) le groupe des automorphismes de L ; muni de la topologie induite par celle de Mor(L,L),

$\mathrm{Aut}(L)$ est un *groupe topologique* : dans ce groupe, un système fondamental de voisinages de id_L est formé par les sous-groupes stabilisateurs des parties finies de L. En général, $\mathrm{Aut}(L)$ n'est pas fermé dans $\mathrm{Mor}(L,L)$.

Soient K un corps et L et M des extensions de K ; on note $\mathrm{Mor}_K(L,M)$ l'ensemble des K-morphismes de L dans M : $\mathrm{Mor}_K(L,M)$ est fermé dans $\mathrm{Mor}(L,M)$. On note $\mathrm{Gal}(L/K)$ le groupe des K-automorphismes de L ; c'est évidemment un sous-groupe fermé de $\mathrm{Aut}(L)$. Lorsque F décrit l'ensemble des parties finies de L, $\mathrm{Gal}(L/K(F))$ décrit un système fondamental de voisinages de id_L dans $\mathrm{Gal}(L/K)$.

(1.2) Soit L un corps. Soit G un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(L)$: on note $\mathrm{Inv}_L(G)$ le corps des invariants de G dans L. Il est clair que $\mathrm{Inv}_L(G) = \mathrm{Inv}_L(\overline{G})$; par suite, on a $\overline{G} \subset \mathrm{Gal}(L/\mathrm{Inv}_L(G))$.

(1.3) **Proposition.** - *Soit* $K \to L$ *une extension algébrique sur* K. *Pour toute extension* $K \to M$ *de* K, *l'espace* $\mathrm{Mor}_K(L,M)$ *est compact.*

Soit $x \in L$; $\mathrm{Mor}_K(L,M).x$ est alors une partie finie de M. Par suite, $\mathrm{Mor}_K(L,M) \subset \prod_{x \in L} \mathrm{Mor}_K(L,M).x \subset M^L$ est relativement compact, donc compact.

(1.4) Corollaire. - *Soit* $K \to L$ *une extension algébrique sur* K. *Alors* $\mathrm{Gal}(L/K)$ *est un groupe compact.*

En effet, on a alors $\mathrm{Gal}(L/K) = \mathrm{Mor}_K(L,L)$.

Remarques.

1) Soit $K \longrightarrow L$ une extension algébrique sur K ; posons $G = \mathrm{Gal}(L/K)$; G est un groupe *profini*. Soit F une partie finie de L ; l'ensemble G.F est fini et $\mathrm{Gal}(L/K(G.F)) = \bigcap_{\sigma \in G} \sigma.\mathrm{Gal}(L/K(F)).\sigma^{-1}$ est un sous-groupe *distingué* et ouvert de G. Lorsque F varie, $\mathrm{Gal}(L/K(G.F))$ décrit évidemment un système fondamental de voisinages de id_L dans G.

2) Soit $K \longrightarrow L$ une extension de K telle que $\mathrm{dimal}_K(L)$ soit fini : alors $\mathrm{Gal}(L/K)$ est localement compact (il possède en effet un sous-groupe ouvert compact d'après (1.3)).

2. *Le théorème d'Artin.*

(2.1) Théorème. - *Soient* L *un corps*, G *un sous-groupe compact de* Aut(L) *et* $K = \mathrm{Inv}_L(G)$. *Alors* L *est une extension algébrique et galoisienne sur* K *et* $G = \mathrm{Gal}(L/K)$.

a) Si G est fini, le théorème se réduit au théorème classique d'Artin.

b) Soit $x \in L$: G.x est fini ; par suite $G \cap \mathrm{Gal}(L/K(G.x))$ est un sous-groupe ouvert de G. On a $\sigma(K(G.x)) = K(G.x)$ pour tout $\sigma \in G$; ainsi $\sigma \longmapsto \sigma \mid K(G.x)$ est un homomorphisme $\varphi : G \rightarrow \mathrm{Gal}(K(G.x)/K)$. Le noyau de φ est $G \cap \mathrm{Gal}(L/K(G.x))$;

donc φ (G) est fini. D'après *a)*, K(G.x) est une extension de degré fini et galoisienne sur $\mathrm{Inv}_{K(G.x)}(\varphi(G)) = K$. Comme $x \in K(G.x)$, ceci montre que L est algébrique et galoisien sur K.

c) Soit $G' = \mathrm{Gal}(L/K)$. D'après *b)* et (1.4) G' est compact. Soit F une partie finie de L ; G'.F est fini ; soit L_F le sous-corps de L engendré par G'.F. $\mathrm{Gal}(L/L_F)$ est un sous-groupe ouvert de Aut(L) et $G' \cap \mathrm{Gal}(L/L_F) = \mathrm{Gal}(L/K(G'.F))$ est un sous-groupe ouvert de G'. On a $\sigma'(L_F) = L_F$ pour tout $\sigma' \in G'$; ainsi $\sigma' \longmapsto \sigma'|L_F$ est un homomorphisme $\psi : G' \longrightarrow \mathrm{Gal}(L_F/(L_F \cap K))$. Le noyau de ψ est Gal(L/K(G'.F)) ; donc ψ (G') est fini. D'après *a)*, L_F est une extension de degré fini et galoisienne sur $\mathrm{Inv}_{L_F}(\psi(G)) = L_F \cap K$ et $\psi(G) = \mathrm{Gal}(L_F/(L_F \cap K))$. Par suite, on a $G' = G\,\mathrm{Gal}(L/K(G'.F)) \subset G\,\mathrm{Gal}(L/L_F)$.

d) Quand F décrit l'ensemble des parties finies de L, il est clair que $\mathrm{Gal}(L/L_F)$ décrit un système fondamental de voisinages de id_L dans Aut(L). On a donc $G' \subset \bigcap_F G\,\mathrm{Gal}(L/L_F) = \overline{G} = G$. Donc $G = G'$.

(2.2) **Corollaire.** - *Soit* G *un sous-groupe relativement compact de* Aut(L). *Alors* $\overline{G} = \mathrm{Gal}(L/\mathrm{Inv}_L(G))$.

Cela résulte de (2.1), si l'on remarque que $\mathrm{Inv}_L(G) = \mathrm{Inv}_L(\overline{G})$.

(2.3) **Corollaire.** - *Soit* $K \rightarrow L$ *une extension d'un corps* K, *telle que* $K = \mathrm{Inv}_L(\mathrm{Gal}(L/K))$. *Pour que* L *soit algébrique (et galoisien) sur* K, *il faut et il suffit que* Gal(L/K) *soit compact.*

C'est nécessaire d'après (1.4). C'est suffisant d'après (2.1).

(2.4) **Corollaire.** - *Soit* $K \to L$ *une extension d'un corps* K. *Alors* $\lambda : G \mapsto \mathrm{Inv}_L(G)$ *est une bijection de l'ensemble des sous-groupes compacts de* Gal(L/K) *sur l'ensemble des sous-extensions* L' *de* L *telles que* L *soit algébrique et galoisien sur* L', *dont la réciproque est* $\gamma : L' \mapsto \mathrm{Gal}(L/L')$.

Si L' est une sous-extension de L telle que L soit algébrique et galoisien sur L', Gal(L/L') est compact et, par définition, $\mathrm{Inv}_L(\mathrm{Gal}(L/L')) = L'$; donc γ est une section de λ.
(2.1) montre que γ est une rétraction de λ.

Dans le cas où L est une extension algébrique et galoisienne sur K, le corollaire ci-dessus *est* le théorème de Krull, si l'on remarque que tout sous-groupe fermé de Gal(L/K) est compact et que L est galoisien sur chaque sous-extension de L.

-:-:-:-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

(1) - E. ARTIN, *Galois theory*, University of Notre-Dame (1959).

(2) - N. BOURBAKI, *Eléments de mathématique, Algèbre, ch.* 5, Paris (Hermann), (1959).

(3) - I. I. PIATECKY-SHAPIRO et I. R. CHAFAREVITCH, Izv. Akad. Nauk. SSSR., sér.math. *30*, (1966), p. 671-704 [= A.M.S. translations, sér. 2, vol. 69 p. 111-145].

(cf. plus précisément le lemme 1 du § 3 ; la démonstration en est d'ailleurs incomplète ; la traduction anglaise est entachée de nombreuses fautes d'impression).

Manuscrit remis en avril 1971

J. BRACONNIER
Professeur
Département de Mathématiques
Université Claude-Bernard
43, boulevard du 11 novembre 1918
VILLEURBANNE