PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

CHARLES CASSIDY

Sur les sections distributions des fibrés vectoriels

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1972, tome 9, fascicule 2
, p. 61-82
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1972__9_2_61_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1972. t.9-2

SUR LES SECTIONS DISTRIBUTIONS DES FIBRES VECTORIELS

Charles CASSIDY

Nous nous proposons dans ce travail de revenir sur certains aspects fondamentaux de la théorie des sections distributions des fibrés vectoriels : théorème des noyaux, relations entre noyaux et propriétés spectrales des opérateurs elliptiques.

Soit E un fibré vectoriel basé sur une variété X de classe C^∞, paracompacte. Dans un premier chapitre, nous introduisons les espaces de sections $\mathcal{E}(E)$, $\mathcal{D}(E)$, $\mathcal{E}'(E)$ et $\mathcal{D}'(E)$ et nous rappelons brièvement les propriétés vectorielles topologiques de ces espaces.

Il faut remarquer que si E est un fibré hermitien et si on se donne une mesure régulière positive sur la base X de ce fibré, il est possible d'identifier $\mathcal{E}(E)$ à un sous-espace dense de $\mathcal{D}'(E)$; c'est ce qui se passe dans la théorie des distributions classiques. En l'absence de telles données, il est naturel d'introduire la notion de fibré volume que nous présentons dans le deuxième chapitre comme fibré associé au fibré des repères. Le fibré volume permet ensuite de définir un nouveau fibré dit adjoint géométrique de E et noté par E'. Les espaces $\mathcal{E}'(E')$ et $\mathcal{D}'(E')$ attachés à ce fibré jouent ici un rôle très important : celui des espaces de distributions $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{D}'$ dans la théorie classique.

Le troisième chapitre contient une démonstration du théorème des noyaux de L. SCHWARTZ pour les sections distributions des fibrés vectoriels. Des résultats concernant les espaces nucléaires y sont utilisés ainsi que les notions de fibré adjoint géométrique et de produit tensoriel externe de deux fibrés vectoriels.

Enfin, dans le dernier chapitre où la variété X est supposée compacts, les propriétés spectrales des opérateurs elliptiques permettent de trouver par voie élémentaire une expression du noyau associé à une application linéaire continue de $\mathcal{D}(E)$ dans $\mathcal{D}'(F)$.

Les notions de fibré volume et de fibré adjoint géométrique ont été considérées notamment dans les articles de Atiyah-Bott (1), (2), T. KOTAKE (1). Pour les courants, cette théorie est équivalente à celle de G. de RHAM (1).

CHAPITRE I.

LES ESPACES DE SECTIONS.

Nous suppoeons que X est une variété C^∞, de dimension finie n, sans bord, séparée et connexe. En particulier, X est localement compacte.

Nous supposons de plus que X est paracompacte. Ceci entraîne que X est dénombrable à l'infini et admet des partitions différentiables de l'unité.

Enfin, pour tout atlas $\mathcal{A}' = (c'_j) = (U'_j, \varphi'_j)$ de la variété X, les hypothèses précédentes entraînent qu'il existe toujours un atlas équivalent $\mathcal{A} = (U_i, \varphi_i)$ tel que :

- le recouvrement (U_i) de X soit dénombrable, localement fini, plus fin que (U'_j) et formé d'ensembles ouverts relativement compacts.

- pour tout i, $\overline{U_i}$ soit contenu dans le domaine d'une carte.

- il existe une suite de compacts (K_i) de R^n tels que $K_i \subset \varphi_i(U_i)$ pour chaque i et ou les $\varphi_i^{-1}(K_i)$ recouvrent X.

Dans la suite, nous ne considérons que de tels atlas $\mathcal{A}=(c_i) = (U_i, \varphi_i)$ que nous appelons simplement atlas dénombrables.

Si E est un fibré vectoriel complexe de base X et de rang fini r, nous désignons par $\mathcal{E}(E)$ l'espace vectoriel des sections C^∞ de E.

Pour toute $f \in \mathcal{E}(E)$ et pour toute carte vectorielle $c = (U, \varphi, \tau)$ de E, nous désignons par f_c la partie principale $\tau \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to C^r$ et par f_c^i l'application $pr_i \circ \tau \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to C$.

Pour tout compact K de X contenu dans le domaine U d'une carte vectorielle $c = (U, \varphi, \tau)$, pour tout entier $s \geq 0$ et pour toute $f \in \mathcal{E}(E)$, posons :

$$N_{K,s}(f) = \sup_{x \in K,\ |\alpha| \leq s,\ 1 \leq i \leq r} |D^\alpha f_c^i(\varphi(x))| .$$

La donnée de toutes les semi-normes de ce type définit sur $\mathcal{E}(E)$ une structure d'espace vectoriel topologique localement convexe séparé. La topologie de $\mathcal{E}(E)$ peut être aussi obtenue en ne considérant qu'une suite de compacts (K_i) subordonnée à un atlas dénombrable $(c_i) = (U_i, \varphi_i, \tau_i)$ en ce sens que $K_i \subset U_i$ pour chaque i et les K_i recouvrent X. L'espace $\mathcal{E}(E)$ est de Fréchet et de Montel. Nous désignons par $\mathcal{E}'(E)$ le dual fort de $\mathcal{E}(E)$.

Pour toute partie compacte K de X, nous désignons par $\mathcal{D}(E|K)$ le sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{E}(E)$ formé des sections de E dont le support est contenu dans K. Muni de la topologie induite, $\mathcal{D}(E|K)$ est de Fréchet et de Montel.

$\mathcal{D}(E)$ est l'espace des sections C^∞ de E à support compact. Il est muni de la topologie limité inductive des $\mathcal{D}(E|K)$ lorsque K parcourt l'ensemble des parties compactes de X. Puisque, par hypothèse, X est dénombrable à l'infini, on peut se borner à une suite de compacts (K_i) recouvrant X pour définir la topologie de $\mathcal{D}(E)$. $\mathcal{D}(E)$ est un espace $\mathcal{LF}$ et de Montel. Son dual fort est noté $\mathcal{D}'(E)$.

CHAPITRE II /: LES SECTIONS DISTRIBUTIONS.

A. Fibré volume.

Afin d'introduire pour des fibrés généraux une notion naturelle de "section généralisée", il est commode de définir la notion de fibré volume.

Rappelons qu'un repère p en un point x de la variété X est un ensemble de n vecteurs $e_1,\dots,e_n$ formant une base de l'espace tangent T_xX. Désignons par $\pi : P \to X$ le fibré des repères. C'est un $GL(n,R)$-fibré principal et l'action à droite de $GL(n,R)$ sur P est donnée par :

$$p\,a = \left(\sum_{i=1}^{n} a_1^i e_i,\dots,\sum_{i=1}^{n} a_n^i e_i\right)$$

où $p = (e_1,\dots,e_n) \in P$ et $a = (a_j^i) \in GL(n,R)$. D'autre part, il est possible de considérer R comme un $GL(n,R)$-espace à gauche suivant la loi :

$$a\,r = |\text{dét } a^{-1}|\,r$$

où $r \in R$ et $a = (a_j^i) \in GL(n,R)$.

Le fibré $\pi(R)$ de base X et de fibre type R associé au fibré des repères est noté Ω et est appelé le ***fibré volume*** de X. L'espace de ce fibré est précisément le quotient de $P \times R$ par l'action à droite de $GL(n,R)$ donnée par :

$$(p,r)\,a = (pa, a^{-1}r)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} a_n^i e_i,\dots,\sum_{i=1}^{n} a_n^i e_i,\ |\text{dét } a|\,r\right).$$

Ω est un fibré vectoriel réel de rang 1.

Une mesure de Radon μ sur la variété X est dite ***régulière*** (resp. ***régulière positive***), si pour chaque carte $c = (U,\varphi)$ de X, la mesure induite par μ sur $\varphi(U)$ a la forme $\rho_c\lambda$ où ρ_c est une fonction C^∞ (resp. C^∞ strictement positive) et où λ est la mesure de Lebesgue sur R^n.

THEOREME 1. - *Les mesures régulières sur* X *sont en correspondance biunivoque avec les sections* C^{∞} *du fibré volume* Ω.

Preuve. - Soit σ une section C^{∞} de Ω, σ_c sa partie principale dans une carte $c = (U, \varphi)$ de X. On obtient une mesure μ_U sur U en posant :

$$\mu_U(f) = \int_{\varphi(U)} f(\varphi^{-1}(u))\, \sigma_c(u)\, du$$

pour f continue à support compact dans U. Dans deux cartes $c = (U, \varphi)$ et $d = (V, \psi)$ de X, on a l'égalité :

$$\sigma_c(\varphi(x)) = |\text{dét}\, J_{\varphi(x)}(\psi\circ\varphi^{-1})|\, \sigma_d(\psi(x))$$

pour $x \in U \cap V$ et où l'on désigne par $J_{\varphi(x)}(\psi\circ\varphi^{-1})$ la matrice jacobienne de $\psi\circ\varphi^{-1}$ au point $\varphi(x)$. Par suite, pour supp $f \subset U \cap V$, on a :

$$\begin{aligned}
\mu_V(f) &= \int_{\psi(U\cap V)} f(\psi^{-1}(v))\, \sigma_d(v)\, dv \\
&= \int_{\varphi(U\cap V)} f(\varphi^{-1}(u))\, \sigma_d(\psi\circ\varphi^{-1}(u))\, |\text{dét}\, J_u(\psi\circ\varphi^{-1})|\, du \\
&\qquad\qquad (\text{changement de variable } v = \psi\circ\varphi^{-1}(u)) \\
&= \int_{\varphi(U\cap V)} f(\varphi^{-1}(u))\, \sigma_c(u)\, du \\
&= \mu_U(f).
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mu_U = \mu_V$ sur $U \cap V$ et par suite il existe une mesure régulière μ sur X dont la restriction à U est la mesure μ_U pour chaque carte $c = (U, \varphi)$.

Réciproquement, la donnée d'une mesure régulière μ sur X détermine pour chaque carte $c = (U, \varphi)$ de X une fonction $\rho_c : \varphi(U) \to R$ de classe C^{∞} (ρ_c est la densité de la mesure induite par μ sur $\varphi(U)$ par rapport à la mesure de Lebesgue λ). D'après le théorème du changement de variable, on a :

$$\rho_c(\varphi(x)) = |\text{dét } J_{\varphi(x)}(\psi\circ\varphi^{-1})| \ \rho_d(\psi(x))$$

pour deux cartes $c = (U,\varphi)$, $d = (V,\psi)$ et $x\in U\cap V$. Ces fonctions ρ_c définissent donc par recollement une section $\sigma\in\mathcal{E}(\Omega)$ qui induit la mesure donnée μ sur X.

C.Q.F.D.

Le théorème précédent nous permet d'identifier l'ensemble des mesures régulières sur X et l'ensemble des sections C^∞ du fibré volume $\Omega = \pi(R)$ de X. Comme l'ensemble R^+ des nombres réels strictement positifs est fermé pour l'action à gauche de GL(n,R) sur R donnée par :

$$a\, r = |\text{dét } a^{-1}|\, r,$$

il est possible de considérer le fibré $\Omega^+ = \pi(R^+)$ de base X , associé au fibré principal des repères et de fibre type R^+. C'est un sous-fibré du fibré volume Ω dont les sections C^∞ correspondent aux mesures régulières positives sur X. La fibre de Ω^+ étant convexe, il existe des sections de Ω^+ donc des mesures régulières positives. De plus, deux telles mesures ont l'une par rapport à l'autre une densité de classe C^∞ et strictement positive.

B. Sections distributions.

Le fibré dual de E est noté E^* ; on appelle *adjoint géométrique de* E le fibré

$$E' = E^*\otimes\Omega.$$

Il existe un isomorphisme

$$E' = \text{End}(E,\Omega)$$

et par suite une section f de E et une section σ de E' définissent une section

$$x\in X \longrightarrow \langle\sigma(x),\, f(x)\rangle\in\Omega_x$$

de Ω.

Cette correspondance est régulière et, pour $\sigma \in \mathcal{E}(E')$ fixé, l'application linéaire

$$f \in \mathcal{D}(E) \longrightarrow \int_X <\sigma(x), f(x)> \in C$$

est continue et nous permet de considérer naturellement $\mathcal{E}(E')$ comme sous-espace de $\mathcal{D}'(E)$.

De même, pour $f \in \mathcal{E}(E)$ fixé, l'application linéaire

$$\sigma \in \mathcal{D}(E') \longrightarrow \int_X <\sigma(x), f(x)> \in C$$

est continue et nous permet de considérer naturellement $\mathcal{E}(E)$ comme sous-espace de $\mathcal{D}'(E')$.

Pour cette raison, les éléments de $\mathcal{D}'(E)$ (resp. $\mathcal{D}'(E)$) sont appelés les *sections distributions* de E' (resp. E).

Ce qui précède nous indique que les sections distributions de E' peuvent être considérées d'une part comme les éléments de $\mathcal{D}'(E)$ et d'autre part comme les éléments de $\mathcal{D}'(E'')$. Cela ne pose pas de difficultés comme le montre d'ailleurs le théorème suivant.

THEOREME 2. - *Il existe un isomorphisme régulier canonique entre* E *et* E''.

Preuve. - En effet,

$$\begin{aligned} E'' &= (E^* \otimes \Omega)^* \otimes \Omega \\ &\approx E^{**} \otimes \mathrm{End}(\Omega, \Omega). \end{aligned}$$

Le fibré $\mathrm{End}(\Omega, \Omega)$ admet la section $x \to \mathrm{Id}_{\Omega_x}$ qui, pour chaque x est une base de $\mathrm{End}_x(\Omega, \Omega)$. Par suite, $\mathrm{End}(\Omega, \Omega)$ est trivial et, étant de rang 1, nous avons :

$$E^{**} \otimes \mathrm{End}(\Omega, \Omega) \approx E^{**} \approx E. \qquad \text{c.q.f.d.}$$

C. Cas des fibrés hermitiens.

Soit μ une mesure régulière positive sur X. Si h est une structure hermitienne sur E, il découle de la théorie générale des fibrés hermitiens que h définit un isomorphisme régulier entre les sections de E et celles de E^*. Après multiplication par μ , nous obtenons des isomorphismes $\mathcal{D}(E) \simeq \mathcal{D}(E')$ et $\mathcal{E}(E) \approx \mathcal{E}(E')$ qui s'étendent aux espaces de sections distributions.

C'est ce qui se produit dans la théorie classique ou X est orientée E est le fibré trivial $X \times C^r$ et la structure hermitienne nous est fournie par le produit scalaire. Dans ce cas particulier, il est possible de considérer l'espace des sections distributions sur E comme l'espace $\mathcal{D}'(E)$ en vertu de l'isomorphisme $\mathcal{D}'(E') \simeq \mathcal{D}'(E)$.

CHAPITRE III. LES NOYAUX.

Dans ce chapitre, nous étendons aux sections distributions l'une des démonstrations classiques du théorème des noyaux de L. SCHWARTZ (voir par exemple F. TREVES (1), page 531).

A. Noyaux.

Soit E (resp. F) un fibré vectoriel de rang r (resp. s) basé sur une variété X (resp. Y). Désignons par $E \boxtimes F$ l'ensemble des éléments de $E_x \otimes F_y$ quand (x,y) décrit $X \times Y$. Si $c = (U, \varphi, \tau)$ et $d = (V, \psi, \theta)$ sont des cartes vectorielles de E et F respectivement, une carte vectorielle de $E \boxtimes F$ est donnée par

$$c \times d = (U \times V, \varphi \times \psi, \tau \otimes \theta)$$

où $(\tau \otimes \theta)_{(x,y)} = \tau_x \otimes \theta_y$. Si maintenant (c_i) et (d_j) sont des atlas dénombrables de E et F respectivement, alors $(c_i \times d_j)$ est un atlas dénombrable de $E \boxtimes F$ et la structure de fibré vectoriel ainsi obtenue sur $E \boxtimes F$ est appelée *produit tensoriel externe* de E et F. C'est un fibré de base $X \times Y$ et de rang rs.

Les éléments de $\mathcal{D}'(E \boxtimes F)$ sont appelés *noyaux*.

Le théorème suivant nous montre en particulier que les noyaux appartenant à $\mathcal{D}'(E' \boxtimes F')$ sont les sections distributions de $E \boxtimes F$.

THEOREME 3. - *Nous avons les isomorphismes réguliers suivants :*

$$\Omega\,(X \times Y) \approx \Omega(X) \boxtimes \Omega(Y)$$

et

$$E' \boxtimes F' \approx (E \boxtimes F)'.$$

Preuve. - Soient n et m les dimensions respectives de X et Y. Le premier isomorphisme se déduit du fait que la mesure de Lebesgue sur R^{n+m} égale le produit tensoriel des mesures de Lebesgue sur R^n et R^m et que les sections différentiables d'un fibré volume Ω sont les mesures régulières sur la base de ce fibré.

Quant au deuxième isomorphisme, nous avons pour les fibres au-dessus d'un point (x,y) quelconque :

$$\begin{aligned}
(E' \boxtimes F')_{(x,y)} &= (E^* \otimes \Omega(X))_x \otimes (F^* \otimes \Omega(Y))_y \\
&\approx E^*_x \otimes (\Omega(X))_x \otimes F^*_y \otimes (\Omega(Y))_y \\
&\approx E^*_x \otimes F^*_y \otimes (\Omega(X))_x \otimes (\Omega(Y))_y \\
&\approx (E_x \otimes F_y)^* \otimes (\Omega(X \times Y))_{(x,y)} \\
&= ((E \boxtimes F)')_{(x,y)} \quad .
\end{aligned}$$

c.q.f.d.

B. Produit tensoriel des sections distributions.

Dans ce paragraphe, nous voulons définir $\langle f, S \otimes T\rangle$ pour $f \in \mathcal{D}(E \boxtimes F)$, $S \in \mathcal{D}'(E)$ et $T \in \mathcal{D}'(F)$.

Nous commençons par définir $\langle f,T\rangle$ comme élément de $\mathcal{D}(E)$ auquel nous pouvons ensuite appliquer S. La définition fait intervenir des partitions de l'unité et il faut montrer qu'elle est indépendante du choix de ces partitions de l'unité.

Soit $f \in \mathcal{D}(E \boxtimes F)$ et x un point fixé de X. Supposons d'abord que $\text{supp}_y(f(x,.)) \subset V$ où V est le domaine d'une carte d de F. Pour fixer les idées, supposons que $x \in U$ où U est le domaine d'une carte c de E.

Si $(u_k)_{1 \leq k \leq r}$ et $(v_\ell)_{1 \leq \ell \leq s}$ sont des bases pour les sections de E et F au-dessus des cartes c et d respectivement, nous avons :

$$f(x,y) = \sum_{k,\ell} A^{k,\ell}(x,y)\ u_k(x) \otimes v_\ell(y)$$
$$= \sum_k u_k(x) \otimes \Big(\sum_\ell A^{k,1}(x,y)\ v_\ell(y)\Big)$$

où les $A^{k,\ell}$ sont des fonctions, d'où une section de E :

$$x \in X \to \sum_k u_k(x) < \sum_\ell A^{k,1}(x,y)\ v_\ell(y),\ T(y) >$$

notée :

$$< f(.,y),\ T(y) >$$

et qui ne dépend évidemment pas du choix des bases (u_k) et (v_ℓ).

Pour x fixé et $\text{supp}_y(f(x,.)) \subset V$, l'action de T est additive.

Dans le cas général, soit (β_j) une partition de l'unité subordonnée à un atlas (d_j) de F. Nous pouvons écrire :

$$f(x,.) = \sum_j \beta_j(.)\ f(x,.)$$

et il est naturel de définir :

$$< f(.,y),\ T(y) > \ = \ \sum_j < \beta_j(y)\ f(.,y),\ T(y) > .$$

Si (β'_i) est une autre partition de l'unité subordonnée à un atlas (d'_i) , montrons que :

$$\sum_j < \beta_j(y)\ f(.,y),\ T(y) > \ = \ \sum_k < \beta'_i(y)\ f(.,y),\ T(y) > .$$

En effet, par l'additivité de T pour x fixé et $\mathrm{supp}_y(f(x,.))$ contenu dans le domaine d'une carte de F, nous avons :

$$\langle \beta_j(y)\ f(.,y),\ T(y)\rangle = \sum_i \langle \beta_j(y)\,\beta'_i(y)\ f(.,y),\ T(y)\rangle$$

$$\text{et } \langle \beta'_i(y)\ f(.,y),\ T(y)\rangle = \sum_j \langle \beta'_i(y)\,\beta_j(y)\ f(.,y),\ T(y)\rangle$$

d'où l'égalité cherchée.

THEOREME 4. -

a) Pour $f \in \mathcal{D}(E \boxtimes F)$ *et* $T \in \mathcal{D}'(F)$ *, on a :*

$$\langle f(.,y),\ T(y)\rangle \in \mathcal{D}(E).$$

b) L'application

$$f \in \mathcal{D}(E \boxtimes F) \longrightarrow \langle f(.,y),\ T(y)\rangle \in \mathcal{D}(E)$$

est linéaire et continue.

Preuve. - Puisque f est a support compact, il en est de même de $\langle f(.,y),\ T(y)\rangle$.

T étant additive par définition, il suffit de se borner au cas où :

$$f(x,y) = A(x,y)\ p(x) \otimes q(y)$$

où $p \in \mathcal{E}(E)$, $q \in \mathcal{E}(F)$ et $A \in \mathcal{E}(U \times V)$, U et V étant des domaines de cartes de E et F respectivement.

Nous ponvons aussi supposer que $\mathrm{supp}_x A(.,y) \subset H$ (oompact fixe de U) pour chaque $y \in V$ et $\mathrm{supp}_y A(x,.) \subset K$ (compact fixe de V) pour chaque $x \in U$, d'où l'égalité :

$$\langle f(x,y),\ T(y)\rangle = p(x) \langle A(x,y) q(y), T(y)\rangle .$$

Il suffit maintenant de prouver que la fonction :

$$g(x) = \langle A(x,y)\ q(y),\ T(y)\rangle$$

est C^∞.

Mais puisque q est C^∞ et que T est linéaire et continue, le problème se ramène à prouver que l'application :

$$x \in U \rightarrow A(x,.) \in \mathcal{D}(V)$$

est C^∞ résultat classique bien connu car U et V sont des ouverts de R^n et R^m respectivement (à un difféomorphisme près).

Enfin, pour montrer que l'application :

$$f \longrightarrow \langle f(.,y), T(y) \rangle$$

est linéaire et continue, on se ramène aux cartes locales comme précédemment et on applique TREVES (1), th. 40-3.

c.q.f.d.

Le théorème précédent nous dit que $\langle f(.,y); T(y) \rangle$ appartient à $\mathcal{D}(E)$; l'application de $S \in \mathcal{D}'(E)$ à cet élément nous donne un nombre co complexe noté $\langle f, S \otimes T \rangle$. C'est par définition le *produit tensoriel des sections distributions* S et T.

D'après la deuxième partie de ce théorème, $S \otimes T \in \mathcal{D}'(E \boxtimes F)$ et le sous-espace de $\mathcal{D}'(E \boxtimes F)$ engendré par les éléments de la forme $S \otimes T$, où $S \in \mathcal{D}'(E)$ et $T \in \mathcal{D}'(F)$ est noté $\mathcal{D}'(E) \otimes \mathcal{D}'(F)$.

C. Quelques théorèmes de densité.

THEOREME 5. - *Tout élément* $f \in \mathcal{D}(E \boxtimes F)$ *est limite d'une suite* (f_i) *d'éléments de* $\mathcal{D}(E) \otimes \mathcal{D}(F)$.

Preuve. - Soients $(c_i)_{i \in I} = (U_i, \varphi_i, \tau_i)$ et $(d_j)_{j \in J} = (V_j, \psi_j, \theta_j)$ des atlas vectoriels dénombrables de E et F respectivement.

Soit f un élément de $\mathcal{D}(E \boxtimes F)$. Puisque f est à support compact, il est possible de l'exprimer comme somme finie :

$$f(x,y) = \sum \alpha_i(x)\ \beta_j(y) \quad f(x,y)$$

ou (α_i) et (β_j) sont des partitions de l'unité subordonnées à un sous-recouvrement fini de supp f. On peut donc supposer que supp f est contenu dans un domaine de carte vectorielle $U \times V$ de $E \boxtimes F$.

Dans ces conditions,

$$f(x,y) = \sum_{i,j} A^{i,j}(x,y)\ u_i(x) \otimes v_j(y)$$

où (u_i) et $v_j)$ sont des bases pour les sections de E et F au-dessus de U et V respectivement et où les $A^{i,j}$ sont des fonctions C^∞ à support compact.

Le théorème découle alors de TREVES (1), th. 39.2.

c.q.f.d.

THEOREME. 6. -

$\mathcal{D}$(E) est dense dans $\mathcal{D}$'(E').

Preuve. - $\mathcal{D}$'(E') étant de Montel est réflexif et son dual s'identifie ainsi à $\mathcal{D}$(E').

D'après un corollaire de Hahn-Banach, le théorème est démontré dès que l'on montre que si l'action d'un élément de $\mathcal{D}$(E') sur $\mathcal{D}$(E) est identiquement nulle, alors cet élément est 0.

Soit $g \in \mathcal{D}(E')$ tel que :

$$\int_X \langle g(x), f(x)\rangle = 0$$

pour toute $f \in \mathcal{D}(E)$ et montrons que g est la section nulle de E'.

Nous avons en particulier :

$$\int_U \langle g(x), f(x)\rangle = 0$$

pour toute f dont le support est contenu dans le domaine U d'une carte vectorielle de E.

Soit (u_k) une base pour les sections de E^*au-dessus de U, soit $({u^*}_k)$ la base duale pour les sections de E au-dessus de U et soit μ une mesure régulière sur X.

Nous avons alors :

$$g(x) = \sum_k G^k(x)\ {u^*}_k(x) \otimes \mu(x)$$

$$\text{et}\quad f(x) = \sum_\ell F^\ell(x)\ u_\ell(x)$$

d'où :

$$\int_U \langle g(x), f(x) \rangle = \sum_k \int_U G^k(x) \, F^k(x) \, \mu(x).$$

Puisque cette expression est nulle par hypothèse pour tous les choix des F^k, nous avons en posant $F^k = 0$ pour tout $k \neq i$,

$$\int_U G^i(x) \quad F^i(x) \, \mu(x) = 0$$

pour toute fonction F^i d'où $G^i = 0$. Cela étant vrai quel que soit i, nous avons $g(x) = 0$ pour $x \in U$ et aussi dans tout domaine de carte d'où la conclusion.

c.q.f.d.

THEOREME. 7. -

$\mathcal{D}'(E) \otimes \mathcal{D}'(E)$ est dense dans $\mathcal{D}'(E \boxtimes F)$.

Preuve. -

D'après le théorème 5, $\mathcal{D}(E') \otimes \mathcal{D}(F')$ est total dans $\mathcal{D}(E' \boxtimes F')$ qui est isomorphe à $\mathcal{D}\,(E \boxtimes F)')$ d'après le théorème 3.

D'autre part, $\mathcal{D}((E \boxtimes F)')$ est dense dans $\mathcal{D}'(E \boxtimes F)$ d'après les théorèmes 6 et 2.

Puisque l'injection $\mathcal{D}(E) \longrightarrow \mathcal{D}'(E')$ est continue, $\mathcal{D}(E') \otimes \mathcal{D}(F')$ est dense dans $\mathcal{D}'(E \boxtimes F)$ et, à fortiori, $\mathcal{D}'(E) \otimes \mathcal{D}'(F)$ est dense dans $\mathcal{D}'(E \boxtimes F)$.

c.q.f.d.

D. Nucléarité des espaces $\mathcal{D}(E)$ et $\mathcal{D}'(E)$.

Si U est un ouvert de R^n, il est bien connu que l'espace $\mathcal{E}(U)$ est nucléaire (TREVES, (1), page 530, corollaire) ; il en est de même pour l'espace $\mathcal{E}(U \, ; \, C^r)$ des applications C^∞ définies sur U et à valeurs dans C^r qui s'exprime comme somme directe de r copies de $\mathcal{E}(U)$.

THEOREME 8. - *L'espace* $\mathcal{E}(E)$ *est nucléaire.*

Preuve. -

Si K est un compact contenu dans l'ouvert U de R^n, l'espace $\mathcal{D}_K(U;C^r)$ des applications C^∞ de U dans C^r dont le support est contenu dans K est un sous-espace vectoriel topologique de $\mathcal{E}(U;C^r)$ et est, par conséquent, nucléaire.

Considérons un atlas vectoriel dénombrable $(c_i) = (U_i, \varphi_i, \tau_i)$ de E et une partition de l'unité (α_i) subordonnée au recouvrement (U_i). Désignons par K_i la partie compacte φ_i (supp α_i) de $\varphi_i(U_i)$ La situation est telle que pour tout $x \in X$, il existe un ouvert U_i et un compact $K_i \subset \varphi_i(U_i)$ contenant $\varphi_i(x)$ tels que l'application $\alpha_i \circ \varphi_i^{-1}$ ne s'annule pas au voisinage de $\varphi_i(x)$.

La donnée des applications :

$$f \in \mathcal{E}(E) \longrightarrow (\alpha_i \circ \varphi_i^{-1}).f_{c_i} \in \mathcal{D}_{K_i}(\varphi(U_i);C^r)$$

définit donc $\mathcal{E}(E)$ comme limite projective séparée des espaces $\mathcal{D}_{K_i}(\varphi(U_i);C^r)$, ce qui montre que $\mathcal{E}(E)$ est nucléaire.

c.q.f.d.

COROLLAIRE. - *Les espaces* $\mathcal{D}(E)$ *et* $\mathcal{D}'(E)$ *sont nucléaires.*

Preuve. - Soit (K_i) une suite de compacts telle que $K_i \subset K_{i+1}$ pour tout i et qui recouvre la variété X. Chacun des espaces $\mathcal{D}(E|K_i)$ est nucléaire comme sous-espace vectoriel topologique de $\mathcal{E}(E)$ et il en est de même de $\mathcal{D}(E)$ en tant que limite inductive dénombrable des $\mathcal{D}(E|K_i)$.

D'autre part, l'espace $\mathcal{D}(E|K_i)$ est de Fréchet quel que soit i et ainsi son dual fort $\mathcal{D}'(E|K_i)$ est nucléaire. Puisque $\mathcal{D}'(E)$ est limite projective séparée des $\mathcal{D}'(E|K_i)$ au moyen des applications :

$$T \in \mathcal{D}'(E) \longrightarrow T|_{\mathcal{D}(E|K_i)} \in \mathcal{D}'(E|K_i) ,$$

cet espace est nucléaire.

c.q.f.d.

THEOREME 9. - *Il existe un isomorphisme vectoriel topologique* =

$$L(\mathcal{D}(F);\mathcal{D}'(E)) \approx \mathcal{D}'(E)\,\hat{\otimes}\,\mathcal{D}'(F)$$

si le premier espace est muni de la topologie forte.

Preuve. - C'est une conséquence immédiate de TREVES (1), Prop. 50.5 car $\mathcal{D}(F)$ et $\mathcal{D}'(E)$ sont complets, $\mathcal{D}(F)$,est tonnelé et $\mathcal{D}'(F)$ est nucléaire et complet.

c.q.f.d.

E. Le théorème des noyaux.

A tout noyau $K(x,y) \in \mathcal{D}'(E \boxtimes F)$ sont associées de façon canonique deux applications linéaires continues :

$$K : \mathcal{D}(F) \longrightarrow \mathcal{D}'(E) \qquad (1)$$

et

$$K : \mathcal{D}(E) \longrightarrow \mathcal{D}'(F). \qquad (2).$$

Explicitement, si $g \in \mathcal{D}(F)$, on obtient un élément de $\mathcal{D}'(E)$ en posant :

$$K(g)\ (f) = \langle K(x,y),\ (f \otimes g)(x,y)\rangle \qquad (3)$$

pour toute $f \in \mathcal{D}(E)$. De la même façon, on obtient l'application (2) en fixant d'abord f et en faisant varier g.

Le théorème des noyaux nous apprend que la correspondance $K(x,y) \longleftrightarrow K$ est un isomorphisme. En d'autres termes, si nous nous donnons une application linéaire continue $K : \mathcal{D}(F) \longrightarrow \mathcal{D}'(E)$ (ou encore $K : \mathcal{D}(E) \longrightarrow \mathcal{D}'(F)$), il existe un unique noyau $K(x,y)$ auquel est associé l'application K par la formule (3).

LEMME 1. -

$\mathcal{D}(E|K)\,\hat{\otimes}\,\mathcal{D}(F|L)$ *est un sous-espace vectoriel fermé de* $\mathcal{D}(E \boxtimes F | K \times L)$ *qui induit sur ce sous-espace la topologie* $\varepsilon = \pi$.

Preuve. - L'application canonique $(f,g) \longrightarrow f \otimes g$ de $\mathcal{D}(E|K) \times \mathcal{D}(F|L)$ dans $\mathcal{D}(E \boxtimes F | K \times L)$ étant continue, la topologie induite est moins fine que la topologie $\varepsilon = \pi$ par définition de la topologie π .

D'autre part, soit (f_i) une suite convergeant vers 0 pour la topologie induite. La suite (f_i) converge vers 0 uniformément sur les parties équicontinues de $\mathcal{D}'(E \boxtimes F | K \times L)$ et en particulier sur les ensembles de la forme $A' \otimes B'$ où A' est une partie équicontinue de $\mathcal{D}'(E|K)$ et où B' est une partie équicontinue de $\mathcal{D}'(F|L)$. La suite (f_i) converge donc vers 0 pour la topologie $\mathcal{E}$ ce qui montre que la topologie induite est plus fine que la topologie $\mathcal{E} = \pi$.

c.q.f.d.

LEMME 2. - *Si* K' *est un voisinage compact de* K *et si* L' *est un voisinage compact de* L, *alors* $\mathcal{D}(E \boxtimes F | K \times L)$ *est un sous-espace vectoriel fermé de* $\mathcal{D}(E|K') \hat{\otimes} \mathcal{D}(F|L')$ *lequel induit sur ce sous-espace la topologie initiale.*

Preuve. - Ce résultat découle immédiatement du lemme 1 et du fait que $\mathcal{D}(E \boxtimes F | K \times L)$ est contenu et fermé dans l'adhérence de $\mathcal{D}(E|K') \otimes \mathcal{D}(F|L')$ dans $\mathcal{D}(E \boxtimes F | K' \times L')$.

c.q.f.d.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le théorème des noyaux :

THEOREME 10. - *Il existe un isomorphisme vectoriel topologique :*

$$\mathcal{D}'(E \boxtimes F) \approx L(\mathcal{D}(F); \mathcal{D}'(E))$$

quand le deuxième espace est muni de la topologie forte.

Preuve. - En vertu du théorème 9, il existe un isomorphisme :

$$L(\mathcal{D}(F) \; ; \mathcal{D}'(E)) \approx \mathcal{D}'(E) \hat{\otimes} \mathcal{D}'(F).$$

Tout revient donc à prouver l'isomorphisme :

$$\mathcal{D}'(E \boxtimes F) \approx \mathcal{D}'(E) \hat{\otimes} \mathcal{D}'(F) \; ;$$

or puisque $\mathcal{D}'(E) \otimes \mathcal{D}'(F)$ est dense dans $\mathcal{D}'(E \boxtimes F)$ d'après le théorème 7 et que $\mathcal{D}'(E \boxtimes F)$ est complet, il suffit de montrer que la topologie induite par $\mathcal{D}'(E \boxtimes F)$ coïncide avec la topologie $\mathcal{E} = \pi$ sur $\mathcal{D}'(E) \otimes \mathcal{D}'(F)$.

Soit $\{T\}$ un filtre de $\mathcal{D}'(E) \otimes \mathcal{D}'(F)$ convergeant vers 0 pour la topologie induite par $\mathcal{D}'(E \boxtimes F)$. Alors $\{T\}$ converge uniformément vers 0 sur toute partie bornée de $\mathcal{D}(E \boxtimes F)$ et en particulier sur les ensembles de la forme $A \otimes B$ où A est borné dans $\mathcal{D}(E)$ et où B est borné dans $\mathcal{D}(F)$.

Le filtre $\{T\}$ converge donc vers 0 uniformément sur les ensembles de la forme $A \otimes B$ où A est une partie équicontinue de $(\mathcal{D}'(E))'$ et où B est une partie équicontinue de $(\mathcal{D}'(F))'$ ce qui montre que la topologie induite est plus fine que la topologie ε sur $\mathcal{D}'(E) \otimes \mathcal{D}'(F)$.

D'autre part, soit A un compact de $\mathcal{D}(E \boxtimes F)$; il existe un compact $K \subset X$ et un compact $L \subset Y$ tels que A soit un compact de $\mathcal{D}(E \boxtimes F | K \times L)$. D'après le lemme 2, A est un compact de $\mathcal{D}(E|K') \hat{\otimes} \mathcal{D}(F|L')$ donc est contenu dans l'enveloppe fermée, convexe et équilibrée du produit tensoriel d'un compact A_1 de $\mathcal{D}(E|K')$ par un compact A_2 de $\mathcal{D}(F|L')$ (TREVES (1) , page 465, corollaire 2). Si le filtre $\{T\}$ de $\mathcal{D}'(E) \otimes \mathcal{D}'(F)$ converge vers 0 pour $\mathcal{E} = \pi$, il converge uniformément vers 0 sur $A_1 \otimes A_2$ donc sur l'enveloppe fermée, convexe et équilibrée de $A_1 \otimes A_2$, puis sur A et par suite $\{T\}$ converge vers 0 pour $\mathcal{D}'(E \boxtimes F)$.

c.q.f.d.

CHAPITRE IV. NOYAUX ET PROPRIETES SPECTRALES DES OPERATEURS ELLIPTIQUES.

Dans ce chapitre, nous donnons une autre démonstration du théorème des noyaux dans le cas des fibrés vectoriels hermitiens basés sur des variétés compactes.

Soit E un tel fibré de rang r basé sur une variété X. Pour tout entier $s \geq 0$, nous considérons l'espace de Sobolev $H^s(E)$. On choisit un atlas vectoriel fini $(c_i) = (U_i, \varphi_i, \tau_i)$ et une partition de l'unité (α_i) subordonnée à cet atlas. On considère sur l'espace $\mathcal{D}(E)$ le produit scalaire :

$$\langle f,g \rangle_s = \sum_i \sum_{|\alpha| \leq s} \sum_{j=1} \int_{\varphi_i(U_i)} D^\alpha (\alpha_i f)^j_{c_i}(u) . D^\alpha (\alpha_i \bar{g})^j_{c_i}(u) du.$$

$H^s(E)$ désigne l'espace de Hilbert complété de $\mathcal{D}(E)$ pour $\langle\ ,\ \rangle_s$. Cette définition ne dépend pas de l'atlas et de la partition de l'unité choisis. De plus, $\mathcal{D}(E) = \bigcap_s H^s(E)$ et la topologie de $\mathcal{D}(E)$ est dénombrablement normée par la famille de normes $\|\ \|_s = \sqrt{\langle\ ,\ \rangle_s}$ définies sur les espaces $H^s(E)$ (R.S. PALAIS (1), page 170, cor. du th. 4).

Si F est un fibré de rang r' basé sur une variété Y et si nous désignons par $|\ |_s$ les normes définies sur les espaces $H^s(F)$, l'une des propriétés fondamentales des espaces dénombrablement normés nous dit que pour toute forme bilinéaire séparément continue B sur $\mathcal{D}(E)\times\mathcal{D}(F)$ il existe une constante M et un entier $m\geq 0$ tels que :

$$|B(f,g)| \leq M\,\|f\|_m\,|g|_m$$

pour toute $f\in\mathcal{D}(E)$ et pour toute $g\in\mathcal{D}(F)$ (Gelfand-Vilenkin (1), page 7, th. 3).

Considérons maintenant un opérateur pseudo-différentiel $\Lambda_E\in OPD(E,E)$ elliptique, d'ordre 1 qui soit auto-adjoint et strictement positif. Un tel opérateur existe toujours et s'étend en un isomorphisme vectoriel topologique de $H^s(E)$ sur $H^{s-1}(E)$ pour tout s (R.T. Seeley (1), page 182, th. 9.1). De plus, pour un tel opérateur Λ_E, il existe une base orthonormée $\{\varphi_k\}$ de $H^o(E) = L^2(E)$ constituée de sections propres de Λ_E (R.T. Seeley (1), page & 183; th. 10.1). Enfin, les valeurs propres λ_k correspondant aux φ_k satisfont $\lambda_k \sim ck^{1/n}$ quand $k\to\infty$, où c et k sont des constantes et n est la dimension de la variété X (R.T. Seeley (2), page 291).

Comme toute application linéaire continue de $\mathcal{D}'(F)$ dans $\mathcal{D}(E)$ peut être considérée comme une forme bilinéaire séparément continue sur $\mathcal{D}(E)\times\mathcal{D}(F)$ (TREVES (1), Prop. 42.2), le théorème des noyaux peut s'énoncer comme suit :

THEOREME 11. - *Si* B *est une forme bilinéaire séparément continue sur* $\mathcal{D}(E)\times\mathcal{D}(F)$, *il existe un unique noyau* $F\in\mathcal{D}'(E\boxtimes F)$ *tel que :*

$$B(f,g) = \langle F(x,y),\ (f\otimes g)r(x,y)\rangle$$

pour toute $f\in\mathcal{D}(E)$ *et pour toute* $g\in\mathcal{D}(F)$.

Preuve. - Soit B une forme bilinéaire séparément continue sur $\mathcal{D}(E)\times\mathcal{D}(F)$. D'après les remarques faites plus haut, il existe une constante M et un entier $m\geq 0$ tels que :

$$|B(f,g)| \leq M \|f\|_m |g|_m$$

pour toute $f \in \mathfrak{D}(E)$ et pour toute $g \in \mathfrak{D}(F)$.

Considérons les formes bilinéaires B' et B" définies par :

$$B'(f,g) = B(\Lambda_E^{-m} f, \Lambda_F^{-m} g)$$

et

$$B'(f,g) = B(\Lambda_E^{-m-q} f, \Lambda_F^{-m-q} g)$$

où q est un entier positif arbitraire.

D'après ce qui précède, la forme B' vérifie :

$$|B'(f,g)| = |B(\Lambda_E^{-m} f, \Lambda_F^{-m} g)|$$

$$\leq M \|\Lambda_E^{-m} f\|_m |\Lambda_F^{-m} g|_m$$

$$\leq M' \|f\|_o |g|_o$$

Désignons par $\{\lambda_i\}$ le spectre de l'opérateur Λ_E, $\{\varphi_i\}$ la base orthonormée de $H^o(E) = L^2(E)$ constituée de sections propres de l'opérateur Λ_E, $\{\mu_j\}$ le spectre de l'opérateur Λ_F et $\{\psi_j\}$ la base orthonormèe de $H^o(F) = L^2(F)$ constituée de sections propres de l'opérateur Λ_F.

L'égalité :

$$B''(\Lambda_E^q \varphi_i, \Lambda_F^q \psi_i) = B'(\varphi_i, \psi_i)$$

entraîne :

$$|B''(\varphi_i, \psi_i)| = |B'(\Lambda_E^{-q} \varphi_i, \Lambda_F^{-q} \psi_i)| .$$

$$\leq \frac{M'}{(\lambda_i)^q (\mu_j)^q} .$$

Or, $\lambda_k \sim c_1 k^{1/n}$ et $\nu_k \sim c_2 k^{1/m}$ quand $k \longrightarrow \infty$ où c_1 et c_2 sont des constantes, et n et m les dimensions respectives de X et Y.

Ceci montre que pour q suffisamment grand la série :

$$\sum_{i,j} |B''(\varphi_i,\psi_j)|^2$$

converge et qu'il existe une section $F \in H^o(E\boxtimes F) = L^2(E\boxtimes F)$ telle que :

$$F(x,y) = \sum_{i,j} B''(\varphi_i,\psi_j)(\varphi_i \otimes \psi_j)(x,y)$$

dans $L^2(E\boxtimes F)$ dont les sections $(\varphi_i \otimes \psi_j)$ constituent une base orthonormée.

Pour toute $f \in \mathcal{D}(E)$ et pour toute $g \in \mathcal{D}(F)$, nous avons :

$$\int_{X,Y} F(x,y)(f\otimes g)(x,y)(\mu\otimes\nu)(x,y) = B''(f,g)$$

$$= B(\Lambda_E^{-m-q}f, \Lambda_F^{-m-q}g)$$

où μ et ν sont des mesures régulières positives sur X et Y. La première égalité est en effet réalisée pour les couples (φ_i,ψ_i) comme le montre la définition de F(x,y).

Finalement,

$$B(f,g) = \int_{X\times Y} F(x,y)(\Lambda_E^{m+q} f \otimes \Lambda_F^{m+q} g)(x,y)(\mu\otimes\nu)(x,y)$$

et le noyau associé à B est $\Lambda_E^{m+q}(.)\otimes\Lambda_F^{m+q}(.)F(x,y)$.

C.Q.F.D.

BIBLIOGRAPHIE.

ATIYAH-BOTT (1) Notes on the Lefschetz fixed point theorem for elliptic complexes. Harvard University, 1964.

ATIYAH-BOTT (2) A Lefeschetz fixed point formula for elliptic complexes. Ann. of Math. 86,(1967), P. 374-407.

G. de RHAM (1) Variétés dirrérentiables, Hermann, Paris 1955.

GELFAND-VILENKIN (1) Generalized Functions ; Volume 4, Applications of Harmonic Analysis. Academic Press, New York & London, 1964.

T. KOTAKE (1) The fixed point theorem of Atiyah-Bott via Parabolic operators. Comm. pures and appl. math. XXII, (1969), P. 789-806.

R.S. PALAIS (1) Seminar on the Atiyah-Singer index theorem. Annals of Mathematics Studies, Number 57. Princeton University Press, Princeton N.J. 1965.

R.T. SEELEY (1) Integro-differantial operators on vector bundles. Trans. A.M.S. 117; (1965); P. 167.204.

R.T. SEELEY (2) Complex Powers of an Elliptic Operator. Proceedings of Syrposia in pure mathematics ; Volume X, Singular Integrals. Am. Math. Soc. Providence R.I. 1967.

F. TREVES (1) Topological Vector Spaces. Distributions and Kernels. Academic Press, New York & London 1967.

Manuscrit remis le 8 juin 1972.

Charles CASSIDY
Département de Mathématiques
Université Claude Bernard
43, bd du 11 novembre 1918
69621 - VILLEURBANNE