PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

JEAN-MARC BRAEMER

Cohomologies de certaines formes sphériques

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1972, tome 9, fascicule 3
, p. 67-90

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1972__9_3_67_0>

COHOMOLOGIES DE CERTAINES FORMES SPHERIQUES

Jean-Marc **BRAEMER**

1. - INTRODUCTION.

1.1. Un vieux théorème de W. Killing et H. Hopf montre que si M est une variété riemannienne de dimension $n \geqslant 2$, et K un nombre réel, M est une variété *complète connexe de courbure constante* K, si et seulement si M est isométrique à l'une des variétés suivantes :

S^n/G où G est un sous-groupe de $O(n+1)$, si $K > 0$;

$\mathbb{R}^n/G$ où G est un sous-groupe de $E(n)$ (groupe des déplacements de $\mathbb{R}^n$) si $K = 0$;

$\mathbb{H}^n/G$ où $\mathbb{H}^n$ est l'espace hyperbolique de dimension n, et G est un sous-groupe du groupe de Lorentz $O^1(n+1)$.

Dans tous les cas, G opère *proprement, discontinument, et librement* sur l'espace considéré.

Nous nous intéressons ici aux variétés de la première catégorie que l'on appelle les *formes sphériques* (et qui sont donc, à isométrie près, toutes les variétés riemanniennes complètes, connexes de dimension $\geqslant 2$, et de courbure constante positive).

Soit donc G un sous-groupe de $O(n+1)$ opérant proprement, discontinument et librement sur la sphère S^n ; puisque cette dernière est compacte, et que l'opération de G est propre et discontinue, G est nécessairement *fini*.

Dire que G opère librement signifie qu'il opère *sans point fixe*, i.e. que pour $x \in S^n$ et $s \in G$, $sx = x$ implique $s = 1$ (Voir [1]).

1.2. Dans sa thèse, G. Vincent se propose de classifier tous les sous-groupes finis des groupes orthogonaux opérant sans point fixe sur la sphère correspondantes. Pour ce faire, il est amené à considérer ces groupes comme images de représentations *fidèles*, orthogonales de groupes finis abstraits (i.e. définis par générateurs et relations). Si $\pi : \Gamma \to O(n+1)$ est une telle représentation, elle doit être supposée *sans point fixe*, i.e. 1 est le seul élément de Γ dont l'image par π a $+1$ pour valeur propre (remarquons d'ailleurs que cette condition entraîne que π est fidèle). De plus, si π est une telle représentation sans point fixe, et π se décompose en une somme de représentations irréductibles $\pi_1 \oplus \pi_2 \oplus \dots \oplus \pi_k$ chaque π_i $(1\leq i\leq k)$ est sans point fixe, et réciproquement.

1.3. Plus généralement (voir ( )), la recherche des sous groupes finis des groupes orthogonaux opérant sans point fixe sur la sphère correspondante, se ramène à la recherche des groupes finis admettant des représentations linéaires unitaires sans point fixe. Soit donc G un groupe fini, et $\rho : G \to U(n)$ une représentation unitaire sans point fixe de G, et soit $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p$ un système complet de représentations (unitaires) irréductibles de G ; alors

$$\rho = \sum_{i=1}^{p} n_i \rho_i \qquad (n_i \in \mathbb{N})$$

et on a vu que, si $n_i \neq 0$, ρ_i est sans point fixe.

Si G est abélien, chaque ρ_i est fidèle et de degré 1. G est donc isomorphe à un sous-groupe fini de $U(1) = S^1$; si g est l'ordre de G, G est donc le groupe des racines g-ième de l'unité, et G est un groupe cyclique. Les variétés obtenues en faisant opérer sans point fixe de tels groupes sur des sphères sont les *espaces lenticulaires*, dont la K-théorie (réelle et complexe) a été étudiée dans (12),(13) et surtout (14).

Si G n'est pas abélien, il résulte de ce qui précède que tous les sous-groupes abéliens de G sont cycliques. On démontre alors, cf. (3) que de tels groupes se caractérisent par l'une des conditions équivalentes suivantes :

I) Tous les sous-groupes abéliens de G sont cycliques ;

II) Tout p-sous-groupe de G est soit cyclique, soit un groupe quaternionique généralisé ;

III) Les p-sous-groupes de Sylow de G sont de l'un des deux types suivant :

(a) tous cycliques (y compris les 2 sous-groupes de Sylow)

(b) cycliques si $p \neq 2$, quaternioniques généralisés si $p = 2$;

IV) G est à cohomologie périodique de période > 0. [3] p. 262)

1.4. Rappelons que si m est entier > 1, le *groupe quaternionique généralisé* Q_m est le groupe engendré par deux générateurs s et t soumis aux relations :

$$s^{2m} = 1 \ ; \ t^2 = s^m \ ; \ tst^{-1} = s^{2m-1} = s^{-1}$$

Ce groupe est d'ordre $4m$, et ses éléments se mettent d'une manière unique sous forme canonique $r = s^k t^\alpha$ où $0 \leq k \leq 2m-1$ et $\alpha = 0,1$.

Dans le cas où $m = 2$, le groupe Q_2 que l'on note simplement Q, et que l'on appelle le *groupe quaternionique*, est d'ordre 8 ; il est donc engendré par deux générateurs s et t soumis aux relations :

$$s^4 = 1 \qquad s^2 = t^2 \qquad tst^{-1} = s^3$$

Il peut être identifié au sous-groupe $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ de $Sp(1)$ (quaternions de norme 1), où $s = i$, $t = j$, $st = k$, d'où son nom.

Ce groupe a pour centre $Z(Q) = \{1, s^2\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_2$, et a d'autre part trois sous-groupes d'ordre 4 : les sous-groupes cycliques engendrés par s, t et st (notons que $(st)^2 = s^2$). Enfin, les classes de conjugaison de Q sont données par le tableau suivant :

1	s	s^2	t	st
	s^3		s^2t	s^3t

On s'intéresse ici aux représentations linéaires unitaires sans point fixe de Q et aux formes sphériques qu'elles permettent de définir.

1.5. Q possède quatre représentations (unitaires) irréductibles de degré 1, données par

$$s \longmapsto \pm 1 \qquad t \longmapsto \pm 1$$

que nous noterons respectivement

$1 = \xi_0\ (s \mapsto 1, t \mapsto 1)$; $\xi_1\ (s \mapsto 1,\ t \mapsto -1)$; $\xi_2 (s \mapsto -1,\ t \mapsto 1)$; $\xi_3\ (s \mapsto -1,\ t \mapsto -1)$,

La somme des carrés des degrés des représentations irréductibles de Q devant être égal à 8 (l'ordre du groupe), il ne peut rester qu'une représentation irréductible de degré 2 ; elle est définie par :

$$s \mapsto \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \qquad t \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On note ρ cette représentation.

ξ_0, ξ_1, ξ_2, ξ_3 n'étant pas fidèles *n'opèrent pas sans point fixe* sur S^1. Par contre on vérifie sans peine que ρ est une représentation sans point fixe (+1 n'étant jamais valeur propre de $\rho(r)$ pour $r \in Q$, $r \neq 1$). Il résulte alors d'une remarque faite plus haut que, *les seules sphères sur lesquelles* Q *opère sans point fixe sont les sphères* S^{4n-1} ; Q opère sur cette sphère au moyen de la représentation $n\rho$. Dans ce qui suit, on pose :

$\rho_n = n\rho$ c'est une représentation unitaire *de degré* $2n$;

$X_n = S^{4n-1}/Q$, Q opérant sur S^{4n-1} au moyen de ρ_n.

2. - COHOMOLOGIE ENTIERE ET COHOMOLOGIE MODULO 2 DE X_n.

2.1. Il est clair que X_n est une variété compacte connexe de dimension (réelle) $4n-1$. La suite spectrale suivante (Borel-Cartan) relie la cohomologie entière de X_n à la cohomologie de Q :

$$E_2^{pq} = H^p(Q, H^q(S^{4n-1}, \mathbb{Z})) \Longrightarrow H^{p+q}(X_n, \mathbb{Z}).$$

Or, on connaît bien la cohomologie du groupe Q (voir ( ) p. 253, ou ( ) p. 59). Q opérant trivialement sur $\mathbb{Z}$, elle est périodique de période 4, et donnée par les formules suivantes :

$$H^o(Q,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

$$H^{4k+2}(Q,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$$

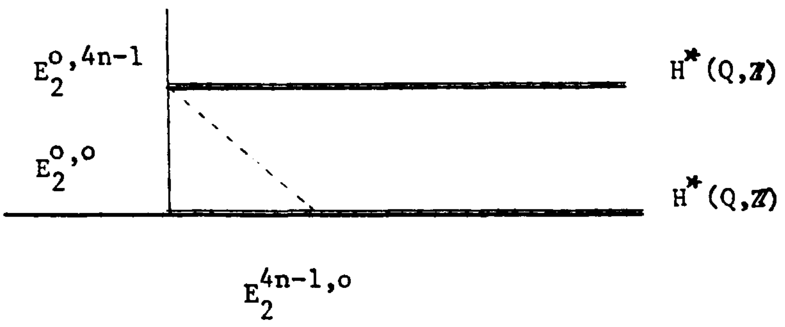
$$H^{4k+4}(Q,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_8$$

$$H^{2k+1}(Q,\mathbb{Z}) = 0 .$$

On vérifie d'abord, facilement, que pour tout $r \in Q$, $\det(\rho(r)) = +1$; il en résulte que l'opération de Q respecte l'orientation de S^{4n-1}, donc que X_n est *orientable*, et

$$H^o(X_n,\mathbb{Z}) = H^{4n-1}(X_n,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

D'autre part, le support de la suite spectrale ci-dessus réduit à



Les seules différentielles éventuellement non nulles sont :

$$d_{4n} : E_{4n}^{k,4n-1} \longrightarrow E_{4n}^{k+4n,o}$$

On sait qu'il en résulte alors une suite exacte infinie :

$$\cdots \xrightarrow{d} E_2^{k,o} \longrightarrow E^k = H^k(X_n,\mathbb{Z}) \longrightarrow E_2^{k-4n+1,\, 4n-1} \xrightarrow{d} E_2^{k+1,o} \longrightarrow \cdots$$

On ne s'intéresse en fait qu'à $0<k<4n-1$, pour lesquels on a

$$E_2^{k-4n+1,4n-1} = 0$$

et par conséquent

$$H^k(X,\mathbb{Z}) \overset{\sim}{\to} E_2^{k,o} \overset{\sim}{\to} H^k(Q,\mathbb{Z})$$

En résumé, la cohomologie entière de X_n est donnée par :

$$(2.1.1)\qquad \left|\begin{array}{lll} H^o(X_n,\mathbb{Z}) = H^{4n-1}(X_n,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} & & \\ H^{2k+1}(X_n,\mathbb{Z}) = 0 & \text{si} & 0\leqslant k<2n \\ H^{4k+2}(X_n,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & \text{si} & 0\leqslant k\leqslant n-1 \\ H^{4k+4}(X_n,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_8 & \text{si} & 0\leqslant k<n-1 \end{array}\right.$$

2.2. La cohomologie de X_n à coefficients dans $\mathbb{Z}_2$ est alors immédiatement donnée par la formule des coefficients universels :

$$0 \to H^k(X_n,\mathbb{Z}) \times Z_2 \to H^k(X_n,\mathbb{Z}_2) \to \mathrm{Tor}(H^{k+1}(X_n,\mathbb{Z})\mathbb{Z}_2) \to 0$$

dont il résulte que

$$(2.2.1)\qquad \left|\begin{array}{l} H^o(X_n,\mathbb{Z}_2) = H^{4n-1}(X_n,\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 \\ H^{4p+1}(X_n,\mathbb{Z}_2) = \mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \\ H^{4p+2}(X_n,\mathbb{Z}_2) = (\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2) \otimes \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \\ H^{4p+3}(X_n,\mathbb{Z}_2) = \mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_8,\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 \\ H^{4p}(X_n,\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_8 \otimes \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2 \end{array}\right.$$

3. - KU-THEORIE DE X_n.

3.1. Soit G un groupe fini, et soit $RU(G)$ son anneau des représentations (unitaires). Alors si $\rho : G \to U(n)$ est une représentation unitaire de degré n opérant sans point fixe sur S^{2n-1}, il résulte de l'isomorphisme de Thom en KU-théorie, une suite exacte :

$$(3.1.1)\qquad 0 \to KU^1(S^{2n-1}/G) \to RU(G) \overset{\varphi}{\to} RU(G) \to KU^o(S^{2n-1}/G) \to 0 \quad ,$$

où φ est la multiplication par $\lambda_{-1}(\rho)$, (voir [5], p. 102 et suivantes). Rappelons simplement que l'application naturelle $RU(G) \to KU^o(S^{2n-1}/G)$ est définie de la manière suivante : si σ est une représentation unitaire de G, de degré k $(k>1)$ G opère à gauche sur $S^{2n-1}\times\mathbb{C}^k$, au moyen de σ sur S^{2n-1}, et au moyen de σ sur $\mathbb{C}^k$. L'espace quotient $S^{2n-1}\times_G\mathbb{C}^k$ est un fibré vectoriel complexe de rang k sur S^{2n-1}/G, et l'application en question fait correspondre à la représentation σ la classe de ce fibré dans $KU^o(S^{2n-1}/G)$.

3.2. *L'anneau* $RU(Q)$: En 1.5. nous avons trouvé les représentations irréductibles $1 = \xi_o$, ξ_1, ξ_2, ξ_3 et σ de Q, qui donnent la structure additive de l'anneau $RU(Q)$. La structure multiplicative s'obtient facilement par produits tensoriels, et en utilisant le fait bien connu que deux représentations sont équivalentes si et seulement si leurs caractères sont les mêmes ; on obtient alors la table suivante :

$1 = \xi_o$	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ρ
ξ_1	1	ξ_3	ξ_2	ρ
ξ_2	ξ_3	1	ξ_1	ρ
ξ_3	ξ_2	ξ_1	1	ρ
ρ	ρ	ρ	ρ	$1+\xi_1+\xi_2+\xi_3$

Pour calculer la KU-théorie de X_n, il convient donc maintenant de calculer $\lambda_{-1}\sigma_n$:

$$\lambda_{-1}\sigma_n = \sum_{p=o}^{\infty} (-1)^p \lambda^p \sigma_n \quad ,$$

où $\lambda^p\rho_n$ est la p-ième puissance extérieure de ρ_n. Comme ρ est de degré 2,

$$\lambda^o\rho = 1 \qquad \lambda^1\rho = \rho \qquad \lambda^2\rho = \det \rho = 1 \quad ;$$

par conséquent

$$\boxed{\lambda_{-1}\sigma = 2-\sigma}\ .$$

On sait que l'application $\lambda_t : RU(Q) \to RU(Q)$ est multiplicative ; il en résulte alors immédiatement que

$$\boxed{\lambda_{-1}\rho_n = (2-\rho)^n}\ .$$

Il faut maintenant décomposer cette représentation (virtuelle) en représentations irréductibles. Pour cela on remarque que :

$$\rho^o = 1 \quad , \quad \rho^{2k-1} = 4^{k-1}\rho \quad \text{et} \quad \rho^{2k} = 4^{k-1}(1+\xi_1+\xi_2+\xi_3) \text{ pour } k\geq 1,$$

et un calcul simple montre que

$$\lambda_{-1}\rho_n = 2^{n-2}\left[(2^{n-1}+3)+(2^{n-1}-1)(\xi_1+\xi_2+\xi_3)-2^n\rho\right]$$

que l'on peut aussi écrire

$$\boxed{\lambda_{-1}\rho_n = 2^{n-2}\left[4+(2^{n-1}-1)(1+\xi_1+\xi_2+\xi_3)-2^n\rho\right]}\ .$$

3.3. Les notations étant celles de 3.1., $KU^o(X_n)$ est donc isomorphe à l'anneau quotient $RU(Q)/\mathrm{Im}\,\varphi$. Pour calculer ce quotient, on utilise le calcul des facteurs invariants (voir par exemple [4] p. 26). Plus précisément, on sait qu'il existe une base $\sigma_o, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ de $RU(Q)$, et des entiers $(a_i)_{o\leq i\leq 4}$ non tous nuls (si $\mathrm{Im}\varphi \neq 0$) tels que

- a_i divise a_{i+1},
- les $a_i\sigma_i$ forment une base de $\mathrm{Im}\varphi$.

Il est clair que, si l'on trouve une telle base, et de tels entiers, on aura les générateurs du $KU^o(X_n)$ avec leurs ordres.

Pour faire ce calcul, il est pratique de prendre pour base de $RU(Q)$, non pas celle qui est formée par les représentations irréductibles, mais la suivante :

$1 = \xi_o$, $\xi_1' = \xi_1 - 1$, $\xi_2' = \xi_2 - 1$, $\alpha' = \alpha - 4$ où l'on a posé $\alpha = 1+\xi_1+\xi_2+\xi_3$

et enfin $\rho' = \rho - 2$.

Dans cette base, $\boxed{\lambda_{-1}\rho_n = 2^{n-2}\left((2^{n-1}-1)\alpha' - 2^n\rho'\right)}$;

d'autre part, $\alpha'\xi_1' = -4\xi_1'$, $\rho'\xi_1' = -2\xi_1'$,

$$\alpha'\xi_2' = -4\xi_2' \quad , \quad \rho'\xi_2' = -2\xi_2' \quad ,$$

$$\alpha'\rho' = -2\alpha' \quad ,$$

$$\alpha'^2 = -4\alpha' \quad , \quad \rho'^2 = \alpha' - 4\rho' \quad .$$

Si $x = a_o + a_1\xi_1' + a_2\xi_2' + a_3\alpha' + a_4\rho' \in RU(Q)$, $a_i \in \mathbb{Z}$,

$$\varphi(x) = 2^{n-2}\left[(2^{n-1}-1)\alpha' - 2^n\rho'\right] \quad (a_o + a_1\xi_1' + a_2\xi_2' + a_3\alpha' + a_4\rho') \quad ,$$

$$\varphi(x) = 2^{n-2}\left[4a_1\xi_1' + 4a_2\xi_2' + ((2^{n-1}-1)a_o + 4a_3 - 2(2^n-1)a_4)\alpha' - 2^n(a_o - 4a_4)\rho'\right] \quad .$$

Si $f : RU(Q) \to \mathbb{Z}$ est une forme linéaire, $f(\operatorname{Im}\varphi)$ est un idéal de $\mathbb{Z}$; il est donc de la forme $\mathbb{Z}a_f$ où a_f est un entier ; le problème est de trouver une forme linéaire g telle que $\mathbb{Z}a_g$ soit maximal parmi les $\mathbb{Z}a_f$. Il est clair que 2^{n-2} divisera tous les a_f ; d'autre part, il est possible de choisir les a_i de telle sorte que

$$(2^{n-1}-1)a_o + 4a_3 - 2(2^n-1)a_4 = 1 \quad ,$$

par exemple en prenant

$a_o = -1$, $a_1 = a_2 = a_4 = 0$ et $a_3 = 2^{n-3}$, si bien que, si l'on appelle p_o, p_1, p_2, p_3 et p_4 les projections canoniques de $RU(Q)$ sur $\mathbb{Z}$, et si l'on pose

$$\sigma_o = \alpha' + 2^n\rho' \quad ,$$

$RU(Q) = \mathbb{Z}\sigma_o \oplus \mathrm{Ker}\, p_3$, et

$\mathrm{Im}\,\varphi = \mathbb{Z}\, 2^{n-2}\sigma_o + \mathrm{Im}\varphi \cap \mathrm{Ker}\, p_3$.

Les éléments de $\mathrm{Im}\varphi \cap \mathrm{Ker}\, p_3$ sont de la forme :

$$2^n\left[a_1\xi_1' + a_2\xi_2' - 2^{n-2}(a_o - 4a_4)\rho'\right] ,$$

$$\text{où } (2^{n-1}-1)a_o + 4a_3 - 2(2^n-1)a_4 = 0 .$$

Si l'on prend par exemple $a_o = a_3 = a_4 = 0$ et $a_1 = a_2 = 1$, on voit qu'en posant

$$\sigma_1 = \xi_1' ,$$

$$\sigma_2 = \xi_2' ,$$

$RU(Q) = \mathbb{Z}\sigma_o \oplus \mathbb{Z}\sigma_1 \oplus \mathbb{Z}\sigma_2 \oplus \mathrm{Ker}\, p_3 \cap \mathrm{Ker}\, p_1 \cap \mathrm{Ker}\, p_2$,

$\mathrm{Im}\,\varphi = \mathbb{Z}\, 2^{n-2}\sigma_o \oplus \mathbb{Z}\, 2^n\sigma_1 \oplus \mathbb{Z}\, 2^n\sigma_2 + \mathrm{Im}\varphi \cap \mathrm{Ker}\, p_3 \cap \mathrm{Ker}\, p_2 \cap \mathrm{Ker}\, p_1$.

Les éléments de $\mathrm{Im}\varphi \cap \mathrm{Ker}\, p_3 \cap \mathrm{Ker}\, p_2 \cap \mathrm{Ker}\, p_1 \cap$ sont de la forme :

$$-2^{2n-2}(a_o - 4a_4)\rho' ,$$

où l'on a toujours $a_1 = a_2 = (2^{n-1}-1)a_o + 4a_3 - 2(2^n-1)a_4 = 0$.

Cette dernière relation montre en particulier que a_o doit être *pair*, et l'on voit que ces relations peuvent être vérifiées en prenant $a_o - 4a_4 = 2$ si

$a_1 = a_2 = a_3 = 0$, $a_4 = 2^{n-1}-1$, et $a_o = 2(2^n-1)$, ce qui permet de déterminer $\mathrm{Im}\varphi$, en effet :

si l'on pose $\sigma_3 = \rho'$, alors :

$RU(Q) = \mathbb{Z}\sigma_o \oplus \mathbb{Z}\sigma_1 \oplus \mathbb{Z}\sigma_2 \oplus \mathbb{Z}\sigma_3 \oplus \mathbb{Z}.1$

et

$\mathrm{Im}\varphi = \mathbb{Z}\, 2^{n-2}\sigma_o \oplus \mathbb{Z}\, 2^n\sigma_1 \oplus \mathbb{Z}\, 2^n\sigma_2 \oplus \mathbb{Z}\, 2^{2n-1}\sigma_3$.

Il résulte donc de la suite exacte (3.1.1) que

si $n>2$	$\widetilde{KU}^{o}(X_n) = \mathbb{Z}_{2^{n-2}} \oplus \mathbb{Z}_{2^n} \oplus \mathbb{Z}_{2^n} \oplus \mathbb{Z}_{2^{2n-1}}$
si $n = 2$	$\widetilde{KU}^{o}(X_2) = \widetilde{KU}^{o}(S^7/Q) = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_8$

;

par contre, pour $n = 1$, il convient de refaire le calcul des facteurs invariants précédent. Dans ce cas, Q opère sur S^3 au moyen de ρ, et $\lambda_{-1}\rho = 2-\rho = -\rho'$; les éléments de $\mathrm{Im}\varphi$ sont donc de la forme :

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= -\rho'(a_o+a_1\xi_1'+a_2\xi_2'+a_3\alpha'+a_4\rho')\\ &= 2a_1\xi_1'+2a_2\xi_2'+(2a_3-a_4)\alpha'+(4a_4-a_o)\rho'\end{aligned}$$

et l'on voit tout de suite que :

$\mathrm{Im}\varphi = \mathbb{Z}2\xi_1' \oplus \mathbb{Z}2\xi_2' \oplus \mathbb{Z}\alpha' \oplus \mathbb{Z}\rho'$, si bien que dans ce cas :

$$\boxed{\widetilde{KU}^{o}(X_1) = \widetilde{KU}^{o}(S^3/Q) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2} \quad ,$$

ce qui achève le calcul de la KU-théorie des espaces X_n.

Remarque. - On sait qu'il existe une suite spectrale (Atiyah - Hirzebruch) qui relie la cohomologie de X_n à sa Ku-théorie :

$$E_2^{pq} = \widetilde{H}^p(X_n, KU^q(pt)) \Rightarrow \widetilde{KU}^{p+q}(X_n) \quad \text{qui dégénère dans notre cas.}$$

Cette suite spectrale ne permet pas de calculer complètement $\widetilde{KU}^{o}(X_n)$ mais on peut lire l'ordre de ce groupe sur la diagonale $p+q = 0$; on trouve en effet que *l'ordre* de $KU^{o}(X_n)$ *est bien* 2^{5n-3} ce qui est conforme aux résultats précédents.

3.4. Pour terminer ce paragraphe, il reste à calculer le noyau de φ qui donnera $KU^1(X_n)$. Soit donc $x = a_o+a_1\xi_1'+a_2\xi_2'+a_3\alpha'+a_4\rho'$ un élément de $RU(Q)$, et regardons à quelles conditions $\varphi(x) = 0$:

- si $n = 1$, il faut et il suffit que $a_1 = a_2 = 0 = 2a_3-a_4 = 4a_4-a_o$

i.e. $a_1 = a_2 = 0$, $a_4 = 2a_3$ et $a_o = 4a_4 = 8a_3$.

Structure multiplicative de $\widetilde{KU}^{o}(X_n)$: on l'obtient comme structure quotient de $RU(Q)$ puisque l'application $RU(Q) \longrightarrow KU^{o}(X_n)$ est un homomorphisme d'anneaux On trouve :

$$\sigma_o^2 = (\alpha'+2^n\rho')^2 = -4\alpha'-2^{n+2}(\alpha'+2^n\rho')+2^{2n}\rho' = -4\alpha' = -4\sigma_o + 2^{n+2}\sigma_3 ,$$

$$\sigma_o\sigma_1 = -4\sigma_1 ,$$

$$\sigma_o\sigma_2 = -4\sigma_2 ,$$

$$\sigma_o\sigma_3 = (\alpha'+2^n\rho')\rho' = (2^n-2)\alpha' - 2^{n+2}\rho' = -2\sigma_o - 2^{n+1}\sigma_3 ,$$

$$\sigma_1^2 = -2\sigma_1 ,$$

$$\sigma_1\sigma_2 = \xi_1'\xi_2' = \alpha' - 2\xi_1' - 2\xi_2' = \sigma_o - 2\sigma_1 - 2\sigma_2 - 2^n\sigma_3 ,$$

$$\sigma_1\sigma_3 = -2\sigma_1 ,$$

$$\sigma_2^2 = -2\sigma_2 ,$$

$$\sigma_2\sigma_3 = -2\sigma_2 .$$

§ 4. KO-THEORIE DE X_n.

4.1. $RO(Q)$ et $RSp(Q)$: Soit $RO(Q)$ (resp. $RSp(Q)$) l'anneau des représentations réelles orthogonales (resp. le groupe des représentations quaternioniques) de Q. On sait qu'il existe des applications

$$RO(Q) \underset{c}{\overset{r}{\leftrightarrows}} RU(Q) \underset{h}{\overset{q}{\rightleftarrows}} RSp(Q)$$

définies de la manière suivante :

- si σ est une représentation unitaire de Q, $r(\sigma)$ est la *représentation réelle sous-jacente à* σ, et $q(\sigma) = \sigma \otimes 1_{\mathbb{H}}$ est la *représentation "quaternifiée"* de σ.
- Si π est une représentation orthogonale, $c(\pi) = \pi \otimes 1_{\mathbb{C}}$ est la *représentation complexifiée de* π.

- enfin si θ est une représentation quaternionique de Q, $h(\theta)$ est la *représentation complexe sous-jacente.*

Ces diverses applications vérifient les relations suivantes :

$$r_o c = q_o h = 2 \quad ,$$

$c_o r(\sigma) = h_o q(\sigma) = \sigma + \bar{\sigma}$, où $\bar{\sigma}$ est la représentation conjuguée de σ. En particulier, c et h sont *injectives*, de plus, c est un *homomorphisme d'anneaux,* ce qui permet d'identifier RO(Q) à un sous-anneau de RU(Q), et RSp(Q) à un sous-groupe de RU(Q).

RU(Q) a pour base canonique les représentations irréductibles ξ_o, ξ_1, ξ_2, ξ_3 et ρ. Les représentations irréductibles de degré 1 sont réelles. Pour connaître la nature de la représentation ρ, on calcule la somme

$$S_\rho = \sum_{r \in Q} \chi_\rho (r^2) \qquad \text{(voir [2], p. 149)} .$$

Ici $r^2 = 1$ si $r = 1$ ou si $r = s^2$, et $r^2 = S^2$ dans tous les autres cas.

Comme

$$\rho(s^2) = \begin{pmatrix} -1 & o \\ o & -1 \end{pmatrix} ,$$

$\chi_\rho(s^2) = -2$, et $S_\rho = -8$, donc ρ est autoconjuguée i.e. $\rho \sim \bar{\rho}$.
Il en résulte donc que

$$c(r(\rho)) = \rho + \bar{\rho} = 2\rho \quad ,$$

donc 2ρ est *réelle.*

Or, on sait que les représentations irréductibles réelles de Q appartiennent à l'une des classes suivantes :

- $c(\pi) = \sigma + \bar{\sigma}$ où σ est une représentation irréductible complexe non équivalente à $\bar{\sigma}$:
- $c(\pi) = 2\sigma$ où σ est une représentation irréductible complexe autoconjuguée ;
- $c(\pi) = \sigma$ où σ est une représentation irréductible complexe équivalente à une représentation réelle.

Nous connaissons ainsi toutes les représentations irréductibles réelles de Q. Pour éviter les confusions, nous les noterons de la manière suivante :

- représentations de degré 1 : $1 = \eta_o$, $\eta_1 (s \mapsto 1 , t \mapsto 1)$,

$$\eta_2(s \mapsto -1,\ t \mapsto 1) \quad \text{et} \quad \eta_3\ (s \mapsto -1,\ t \mapsto -1)$$

- représentation de degré 4 : $\theta : Q \longrightarrow SO(4)$, définie par :

$$s \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad t \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et l'on a les relations suivantes entre RU(Q) et RO(Q) :

$c(\eta_i) = \xi_i$ pour $i = 0,1,2,3$ et $r(\rho) = 0$.

En d'autres termes, *comme sous-anneau de* RU(Q), RO (Q) *est engendré par* $1, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ et 2ρ .

D'autre part, pour des raisons évidentes de dimensions, 1, ξ_1, ξ_2 et ξ_3 ne sont pas sous-jacentes à des représentations quaternoniques, par contre, il en est bien ainsi des représentations, 2 , $2\xi_1$, $2\xi_2$, $2\xi_3$ et ρ , comme on le voit sans peine puisque tout quaternion q se met de manière unique sous la forme

$$q = \begin{pmatrix} Z & Z' \\ -\bar{Z}' & \bar{Z} \end{pmatrix}$$ où Z et Z' sont deux nombres complexes. Il en résulte que :

4.1.2. *Comme sous-groupe libre de* RU(Q), RSp(Q) *est engendré par* $2, 2\xi_1, 2\xi_2, 2\xi_3$ *et* ρ .

Enfin, on vérifie que, dans RU(Q)

4.1.3. *Le produit d'une représentation réelle par une représentation quaternionique est quaternionique.*

4.1.4. *Le produit de deux représentations quaternioniques est une représentation réelle.*

4.2. Soit G un groupe fini, et soit $p : E \to X$ un G-fibré vectoriel réel de rang $4n$, que nous supposerons quaternionique (pourqu'il soit orientable en kO_G-Théorie), on note B(E) et S(E) les fibré en boules et en sphères de E et $X^E = B(E)/S(E)$ l'espace de Thom de E. En kO_G-théorie, on a la suite exacte

$$KO_G^{4,+i}(B(E),S(E)) = \widetilde{KO}_G^{4n+i}(X^E) \longrightarrow KO_G^{4n+i}(B(E)) \longrightarrow KO_G^{4n+i}(S(E)) \quad .$$

Notons $i : X \longrightarrow E$ la section nulle du fibré E. On sait alors construire un homomorphisme de Gysin :

$$i_* : KO_G^i(X) \longrightarrow KO_G^{\Phi,4n+i}(E) \quad ,$$

où $KO_G^{\Phi}(E)$ est la KO_G-théorie à support de E et qui dans ce cas est un *isomorphisme*. D'autre part

$$KO_G^{\Phi}(E) \approx \widetilde{KO}_G(X^E) \quad .$$

Si bien qu'on obtient un *isomorphisme de Thom* que nous noterons encore

$$i_* : KO_G^i(X) \xrightarrow{\sim} \widetilde{KO}_G^{4n+i}(X^E).$$

Comme d'autre part, si $i^* : KO_G^{4n+i}(B(E)) \xrightarrow{\sim} KO^{4n+i}(X)$ est induit par i, on a

$$i^*(i_*(y).x) = y.i^*(i_*(x))$$

quels que soient x et y dans $KO_G^*(X)$; en particulier

$$i^*(i_*(y)) = y\, i^*(i_*(1))$$

quelque soit $y \in KO_G^i(X)$. Posons

$$\Delta_E = i^*(i_*(1))$$

les isomorphismes i_* et i^* permettent donc d'écrire une suite exacte

$$(4.2.1) \qquad KO_G^i(X) \xrightarrow{\phi} KO_G^{G4n+i}(X) \longrightarrow KO_G^{4n+i}(S(E)) \quad ,$$

où ϕ est la multiplication par Δ_E. (Voir [8] et [11]) .

En particulier, si l'on prend pour X un point, et i = -4n $KO^{\circ}_G(pt) = RO(G)$ est plus généralement

$$KO_G^{-4n}(pt) = \begin{cases} RSp(G) & \text{si n est } \textit{impair} \ , \\ RO(G) & \text{si n est } \textit{pair} \ ; \end{cases}$$

d'autre part si G opère librement sur S(E)

$$KO_G^{*}(S(E)) = KO(S(E))G) \ .$$

Enfin (voir [9]) s'il existe dans G un élément *central* r, tel que $r^2 = 1$ et qui *opère par antipodie sur* (S(E), l'application

$$KO_G(pt) = RO(G) \longrightarrow KO_G(S(E))$$

est *surjective*. Par conséquent,

- si E est une représentation réelle de degré 4n de G, supposée quaternionique,

a) si n est *impair*, on a une suite exacte :

$$(4.2.2) \quad RSp(G) \xrightarrow{\Delta_E} RO(G) \longrightarrow KO(S(E)/G) \longrightarrow 0 \ .$$

b) Si n est *pair*, , on a une suite exacte :

$$(4.2.3) \quad RO(G) \xrightarrow{\Delta_E} RO(G) \longrightarrow KO(S(E)/G) \longrightarrow 0 \ .$$

Tout le problème est de déterminer Δ_E.

4.3. Posons $\theta_n = n\,\theta$; θ_n est donc une représentation réelle de degré 4n opérant sur S^{4n-1} , comme $_n$. Le centre de Q est réduit à $\{1, s^2\}$ et il est clair que

$$\theta(s^2) = -id$$

Soit $E_n = S^{4n-1} \times_Q R^4 \longrightarrow X_n$ le fibré vectoriel sur X_n associée à la représentation θ . Nous noterons ζ_n ce fibré réel de rang 4 et nous l'appellerons le *fibré canonique* sur X_n. Le fibré associé à la représentation θ_n est le fibré $n\zeta_n$.

Comme nous l'avons vu en 4.1., ρ , donc θ est quaternionique ainsi que $\lambda_{-1}\rho = 2-\rho$; il résulte alors de 4.1.3 et 4.1.4 que $\lambda_{-1}(n\rho) = (2-\rho)^n$ est *réelle si* n *est pair et quaternionique si* n *est impair*. D'autre part, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\text{(n pair)} & RO(Q) \arrow[r, "\Delta_E"] \arrow[d, shift left, "c"] & RO(Q) \arrow[r] \arrow[d, shift left, "c"] & KO(X_n) \arrow[r] \arrow[d, shift left, "c"] & 0 \\
(4.3.1) & RO(Q) \arrow[r, "\lambda_{-1}(n\rho)"] \arrow[u, shift left, "r"] \arrow[d, shift right, "q"'] & RU(Q) \arrow[r] \arrow[u, shift left, "r"] \arrow[d, shift right, "r"'] & KU(X_n) \arrow[r] \arrow[u, shift left, "r"] \arrow[d, shift right, "r"'] & 0 \\
\text{(n impair)} & RSp(Q) \arrow[r, "\Delta_E"] \arrow[u, shift right, "n"'] & RO(Q) \arrow[r] \arrow[u, shift right, "c"'] & KO(X_n) \arrow[r] \arrow[u, shift right, "c"'] & 0
\end{tikzcd}$$

est commutatif, si bien que :

- lorsque n est impair $h(\Delta_E) = \lambda_{-1}(n\rho)$,
- lorsque n est pair $c(\Delta_E) = \lambda_{-1}(n\rho)$,

puisque c et h sont injectives.

1) <u>n est impair</u>.

$$\Delta_E = (2-\rho)^n = (-1)^{n-1}\, 2^{n-2}\left[(2^{n-1}-1)\alpha' - 2^n\rho'\right] \in RSp(Q) .$$

Si $x = 2(a_0 + a_1\xi'_1 + a_2\xi'_2 + a_3\alpha') + a_4\rho'$ est un élément quelconque de $RSp(Q)$, alors :

$$x.\Delta_E = (-1)^{n-1}2^{n-1}\left[4a_1\xi'_1 + 4a_2\xi'_2 + \left[(2^{n-1}-1)a_0 + 4a_3 - (2^n-1)a_4\right]\alpha' - 2^n(a_0-2a_4)\rho'\right] .$$

$$\text{Soit } x.\Delta_E = (-1)^{n-1}2^{n-1}\left[4a_1\eta'_1 + 4a_2\eta'_2 + ((2^{n-1}-1)a_0 + 4a_3 - (2^n-1)a_4)\beta' - 2^{n-1}(a^o-2a_,)\,\theta'\right] \in RO(Q) .$$

Un calcul de facteurs invariants analogue à celui de 3.3. montre que l'image de la multiplication par Δ_E est engendrée dans $RO(Q)$ par $2^{n-1}\beta'$, $2^{n+1}\eta'_1$, $2^{n+1}\eta'_2$ et $2^{2n-1}\theta'$, donc :

$$(4.3.2) \quad \boxed{\widetilde{KO}^0(X_n) = \mathbb{Z}_{2^{n-1}} \oplus \mathbb{Z}_{2^{n+1}} \oplus \mathbb{Z}_{2^{n+1}} \oplus \mathbb{Z}_{2^{2n-1}}}$$

Sauf dans le *cas où* n = 1 , $\Delta_E = 2-\rho$,

$$x.\Delta_E = 4a_1\,\xi'_1 + 4a_2\,\xi'_2 = (4a_3-a_4)\,\alpha' - 2(a_o-2a_4)\,\rho' \qquad ;$$

l'image de la multiplication par Δ_E est alors engendrée par β', θ', $4\,\xi'_1$; et $4\,\xi'_2$ et

(4.3.2)' $\boxed{\widetilde{KO}^o(S^3/Q) = \widetilde{KO}^o(X_1) = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4}$.

2) <u>n est pair</u>

$$\Delta_E = (2-\rho)^n = (-1)^{n-1}\,2^{n-2}\left[(2^{n-1}-1)\,\alpha' - 2^n\,\rho'\right] \in RP(Q^o) \quad .$$

Si $x = a_o+a_1\,\xi'_1+a_2\,\xi'_2+a_3\,\alpha'+2a_4\,\rho'$ est un élément quelconque de $RO(Q)$, alors :

$$x.\,\Delta_E=(-1)^{n-1}2^{n-2}\left[4a_1\,\eta'_1+4a_2\,\eta'_2+\left((2^{n-1}-1)a_o+4a_3-4(2^n-1)a_4\right)\beta'-2^{n-1}(a_o-8a_4)\,\rho'\right] .$$

On voit alors que l'image de la multiplication par Δ_E est engendrée par $2^{n-2}(\beta'+2^{n-1}\theta')$, $2^n\,\eta'_1$, $2^n\,\eta'_2$ et $2^{2n-1}\,\theta'$.

Si bien que :

(4.3.3.) $\boxed{\widetilde{KO}^o(X_n) = \mathbb{Z}_{2^{n-2}} \oplus \mathbb{Z}_{2^n} \oplus \mathbb{Z}_{2^n} \oplus \mathbb{Z}_{2^{2n-1}}}$.

Remarque. Pour les mêmes raisons que dans le cas complexe on est en mesure de donner aussi la structure multiplicative de $\widetilde{KO}^o(X_n)$.

5. PROBLEMES D'IMMERSION ET DE PLONGEMENT.

On se propose maintenant d'appliquer les critères de non-immersion et de non plongement d'Atiyah (voir [7]).

5.1. Soit donc $X_n = S^{4n-1}/Q$ où Q opère sur S^{4n-1} au moyen de la représentation réelle $n\theta$. Si $\tau(X_n)$ est le fibré tangent à la variété X_n, on a un isomorphisme

$$n\,\zeta_n \xrightarrow{\sim} \tau(X_n) \oplus 1 \quad ,$$

où ζ_n est le fibré canonique sur X_n associé à la représentation θ, si bien que si τ est la classe stable de $\tau(X_n)$, dans $\widetilde{KO}(X_n)$, on a

$$\tau + 1 = n\,\zeta \quad ,$$

où ζ est la classe stable du fibré ζ_n (que nous avons encore noté y_3 plus haut).

Suivant Atiyah, posons $\quad \nu_0 = (4n-1) - \tau \in \widetilde{KO}(X_n)$

et $\quad \zeta' = \zeta - 4 \quad ;$

alors $\quad \nu_0 = (4n-1) - [n(\zeta'+4)+1] \quad ,$

$$\boxed{\nu_0 = -n\zeta'} \quad .$$

Atiyah montre que si X_n est immergeable dans $\mathbb{R}^{4n-1+k}$ alors $\gamma^i(\nu_0) = 0$ pour $i > k$;

: plongeable dans $\mathbb{R}^{4n-1+k}$ alors $\gamma^i(\nu_0) = 0$

pour $i \geq k$.

5.2. γ-structure :

$$\gamma_t(\nu_0) = \gamma_t(-n\zeta') = [\gamma_t(\zeta')]^{-n} \quad ,$$

$$\gamma_t(\zeta') = \gamma_t(\zeta-4) = \gamma_t(\zeta).\gamma_t(-4) = \gamma_t(\zeta).(\gamma_t(1))^{-4} ,$$

Soit $\quad \gamma_t(\zeta') = (1-t)^4 \; \gamma_t(\zeta).$

Or : $\quad \gamma_t(\zeta) = \sum_{i=0} t^i/(1-t)^i \; \lambda^i(\zeta) \quad ;$

ζ est la classe du fibré associé à la représentation θ, et il est facile de voir que, dans $RO(Q)$, $\lambda^0\theta = 1$, $\lambda^1\theta = 0$, $\lambda^2\theta = 2 + \beta$,

$$\lambda^3\theta = \theta \; , \lambda^4\theta = 1 \text{ et } \; \lambda^i\theta = 0 \quad \text{pour } i>4.$$

Pour plus de simplicité, continuons le calcul dans $RO(Q)$:

$$(1-t)^4 \; \gamma_t(0) = (1-t)^4+t(1-t)^3\theta+t^2(1-t)^2(2+\;)+t^3(1-t)\theta+t^4 \; .$$

Soit $\quad \gamma_t(\theta') = 1+(\theta-4)t+(8+\beta-3\theta)t^2+(-8-2\beta+4\theta)t^3 + (4+\beta-2\theta)t^4 \; ,$

$$\gamma_t(\theta') = 1+\theta' t+(\beta'-3\theta')t^2-2(\beta'-2\theta')t^3+(\beta'-2\theta')t^4 \; .$$

Cette expression de $\gamma_t(\theta')$ peut se modifier de la manière suivante :

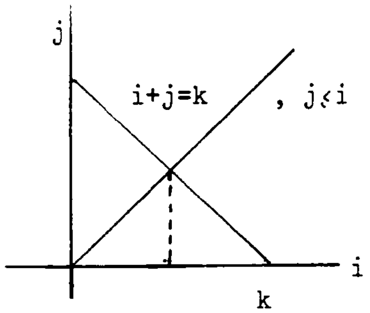
$$\gamma_t(\theta') = 1+\theta' t - \theta' t^2 + (\beta'-2\theta')(t^2-2t^4+t^4) \quad ,$$

$$= 1+\theta' t(1-t) + (\beta' - 2\theta') [t(1-t)]^2 \quad ,$$

si bien qu'en posant $2z = t(1-t)$,

$$\gamma_t(\theta') = 1 + 2z\theta' + z^2\theta'^2 = (1+\theta'z)^2.$$

Alors ,
$$\gamma_t(\nu_o) = \left[\gamma_t(\theta')\right]^{-n} = (1+\theta'z)^{-2n}$$



$$= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}\binom{-2n}{i}\theta'^i t^i (1-t)^i$$
$$= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}\binom{-2n}{i}\theta'^i t^i \left[\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\binom{i}{j}t^j\right]$$
$$= 1 + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\, 2^{-i}\binom{-2n}{i}\binom{i}{j}\theta'^i\, t^{i+j}$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\Bigg(\sum_{i=\left[\frac{k+1}{2}\right]}^{k}(-1)^{k-i}2^{-i}\binom{-2n}{i}\binom{i}{k-i}\theta'^i\Bigg)t^k ,$$

où $\left[\frac{k+1}{2}\right]$ désigne la partie entière de $\frac{k+1}{2}$. Donc :

(5.2.1)
$$\gamma^k(\nu_o) = \sum_{i=\frac{k+1}{2}}^{k}(-1)^{k-i}2^{-i}\binom{-2n}{i}\binom{i}{k-i}\theta'^i .$$

Or on sait (voir 4.2) que $\theta'^i = (-1)^i 4^{i-1}\left[(2^{i-1}-1)\beta' - 2^{i-1}\theta'\right]$,

d'où il résulte que :

$$\gamma^k(\nu_o) = (-1)^k \sum_{i=\left[\frac{k+1}{2}\right]}^{k} 2^{i-2}\binom{-2n}{i}\binom{i}{k-i}\left[(2^{i-1}-1)\beta' - 2^{i-1}\theta'\right] ,$$

(5.2.2.)
$$\gamma^k(\nu_o) = (-1)^k\left[\sum_{i=\left[\frac{k+1}{2}\right]}^{k} 2^{i-2}(2^{i-1}-1)\binom{-2n}{i}\binom{i}{k-i}\beta' - \sum_{i=\left[\frac{k+1}{2}\right]}^{k} 2^{2i-3}\binom{-2n}{i}\binom{i}{k-i}\theta'\right]$$

par conséquent :

1) <u>lorsque n est impair</u> :

$$(5.2.3) \qquad \gamma^k(\nu_o) = 0 \iff \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=\left[\frac{k+1}{2}\right]}^{k} 2^{i-2}(2^{i-1}-1)\binom{-2n}{i}\binom{i}{k-i} \equiv 0 \bmod (2^{n-1}) \\ \text{et} \\ \displaystyle\sum_{i=\left[\frac{k+1}{2}\right]}^{k} 2^{2i-3}\binom{-2n}{i}\binom{i}{k-i} \equiv 0 \bmod (2^{2n-1}) \; . \end{cases}$$

2) <u>Lorsque n est pair</u>

Alors $\widetilde{KO}^o(X_n)$ est engendré par $\alpha'+2^{n-1}\theta'$, η'_1, η'_2 et θ' qui sont respectivement d'ordre 2^{n-2}, 2^n, 2^n et 2^{2n-1}, et :

$$\gamma^k(\nu_o)=(-1)^k \Bigg[\Big(\sum_{i=\left[\frac{k+1}{2}\right]}^{k} 2^{i-2}(2^{i-1}-1)\binom{-2n}{i}\binom{i}{k-i}\Big)(\beta'+2^{n-1}\theta')$$

$$- \Big(\sum_{i=\left[\frac{k+1}{2}\right]}^{k} \left[2^{n+i-3}(2^{i-1}-1)+2^{2i-3}\right] \binom{-2n}{i}\binom{i}{k-i}\Big)\,\theta' \Bigg] \; ;$$

donc

$$(5.2.4.) \quad \gamma^k(\nu_o) = 0 \iff \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=\left[\frac{k+1}{2}\right]}^{k} 2^{i-2}(2^{i-1}-1)\binom{-2n}{i}\binom{i}{k-i} \equiv 0 \bmod (2^{n-2}) \\ \text{et} \\ \displaystyle\sum_{i=\left[\frac{k+1}{2}\right]}^{k} \left[2^{n+i-3}(2^{i-1}-1)+2^{2i-3}\right] \binom{-2n}{i}\binom{i}{k-i} \equiv 0 \bmod (2^{2n-1}) . \end{cases}$$

Application à quelques cas particuliers :

1) n=1 ; $X_1 = S^3/Q$. β' et θ' ont des images nulles dans $\widetilde{KO}(X_1)$, par conséquent,

dans ce cas, *la dimension géométrique de* X_1 *est nulle, et* X_1 *est immergeable dans* $\mathbb{R}^4$ *et plongeable dans* $\mathbb{R}^5$.

2) n=2 ; $X_2 = S^7/Q$ est de dimension 7 , on sait alors que X_2 est plongeable dans $\mathbb{R}^4$ et immergeable dans $\mathbb{R}^{13}$; il en résulte que $\gamma^k(\nu_o) = o$ si $k \geq 7$. Dans ce cas $\beta' + 2^{n-1}\theta'$ est nul dans $\widetilde{KO}^o(X_2)$, donc

$$\gamma^k(\nu_o) = \pm \sum_{i=\left[\frac{k+i}{2}\right]}^{k} (2^{n+i-3}(2^{i-1}-1)+2^{2i-3})\binom{-2n}{i}\binom{i}{k-i}\theta' \quad ;$$

donc

$$\gamma^k(\nu_o)=o \iff \sum_{i=\left[\frac{k+1}{2}\right]}^{k} 2^{i-1}(3.2^{i-2}-1)\binom{-4}{i}\binom{i}{k-i} \equiv 0 \bmod 8 \quad ;$$

évidemment $2^{i-1}(3.2^{i-2}-1)\binom{-4}{i}\binom{i}{k-i} \equiv 0$ mod si $i \geq 4$.

Alors $\gamma^6(\nu_o) = \gamma^5(\nu_o) = \gamma^4(\nu_o) = \gamma^3(\nu_o) = 0$

et $\gamma^2(\nu_o) = 2\theta' \neq 0$.

Il en résulte que $X_2 = S^7/Q$ n'est pas immergeable dans $\mathbb{R}^9$ et n'est pas plongeable dans $\mathbb{R}^{10}$.

3) Si n=3 , les images de β' et θ' dans $\widetilde{KO}(X_3)$ sont respectivement d'ordre 4 et 32. $X_3 = S^{11}/Q$ étant de dimension 11 est immergeable dans $\mathbb{R}^{21}$ et plongeable dans $\mathbb{R}^{22}$, donc $\gamma^k(\nu_o) = 0$ si $k \geq 11$. D'autre part

$$\gamma^k(\nu_o) = 0 \iff \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=\left[\frac{k+1}{2}\right]}^{k} 2^{i-2}(2^{i-1}-)\binom{-6}{i}\binom{i}{k-i} \equiv 0 \bmod 4 \\ \text{et} \\ \displaystyle\sum_{i=\left[\frac{k+1}{2}\right]}^{k} 2^{2i-3}\binom{-6}{i}\binom{i}{k-i} \equiv 0 \bmod 32 \end{cases} \quad ;$$

ces deux convergences sont réalisées dès que $k \geq 7$, ce qui assure dès que

$$\gamma^k(\nu_o) = o \quad \text{si } k \geq 7 \quad ,$$

$$\gamma^6(\nu_o) = {}^5(\nu_o) = 0 \quad ;$$

par contre $\gamma^4(\nu_o) \neq 0$.

$X_3 = S^{11}/Q$ - n'est donc pas immergeable dans $\mathbb{R}^{14}$

- n'est pas plongeable dans $\mathbb{R}^{15}$.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] G. VINCENT : Les groupes linéaires finis sans points fixes Comm. Math. Helv. Vol. 20 (1947) pp. 117-171.

[2] J.A. WOLF : Spaces of Constant curvature. McGraw - Hill Ed.

[3] CARTAN-EILENBERG : Homological Algebra. Princeton Un. Press.

[4] P. SAMUEL : Theorie des nombres. Hermann Ed.

[5] M. F. ATIYAH : K-theory Benjamin Ed.

[6] M. F. ATIYAH : Characters and cohomology of finite groups. IHES n° 9 (1961).

[7] M. F. ATIYAH : Immersions and enbedding of manifolds. Topology Vol. 1 pp. 125-132.

[8] M. KAROUBI : Algèbres de Clifford et K-théorie. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4-ème série t. 1 1968- pp. 161-270.

[9] M. KAROUBI : K-théorie équivariante des fibrés en sphères. Strasbourg 1971/72.

[10] .A. ROUX : Cours de topologie algébrique. Lyon 1972/73.

[11] D. PITT : Free actions of generalised quaternion groups on spheres. Proc. London Math. Soc. (3) 26 (1973) 1-18.

Note : Les résultats de ce travail étaient pratiquement tous établis lorsque nous est parvenu cette dernière publication.

[12] T. KAMBE : The Structure of K_{Λ}-rings of lens space, and their applications.

[13] N. MAHAMMED : Sur la K-théorie des espaces lenticulaires, Th. 3-ème cycle - Lille 1971.

[14] A. CHABOUR : Thèse 3-ème cycle, Alger 1971.

Manuscrit remis le 31 mai 1973.

J.M. BRAEMER
Maître-Assistant
Département de mathématiques
Université Claude Bernard
43, bd du 11 novembre 1918
69621-VILLEURBANNE