PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

HENRY MAILLOT

Sur les applications du type $\alpha \mapsto \alpha \wedge \beta$

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1972, tome 9, fascicule 3
, p. 91-102
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1972__9_3_91_0>

SUR LES APPLICATIONS DU TYPE $\alpha \longmapsto \alpha \wedge \beta$

Henry MAILLOT

Introduction : Soient M une variété riemamienne (de dimension finie ou non), ω une forme différentielle de degré p sur M. $\forall\, x \in M$, $(\nabla\omega)(x)$ est une application linéaire continue de T_xM dans l'espace vectoriel des formes p-linéaires alternées continues sur T_xM. Lorsque $\forall x \in M$, $(\nabla\omega)(x)$ est du type $v \to v^b \wedge S(x)$ où v^b désigne la forme linéaire associée à v et S(x) une forme p-1 linéaire alternée continue sur T_xM, nous dirons que ω est coéquiprojective. Dans [2], nous étudions quelques propriétés des formes différentielles équiprojectives et coéquiprojectives. Le présent article est une étude algébrique et topologique des applications du type $\alpha \longmapsto \alpha \wedge \beta$ où α et β sont des formes multilinéaires alternées continues sur un espace vectoriel topologique localement convexe séparé E.

Notations :

e.v.t. est mis pour espace vectoriel topologique sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;
e.l.c. pour e.v.t. localement convexe.

Si E est un espace vectoriel, E* désigne son dual algébrique. Si E est un e.v.t. E' est son dual topologique.

Si E et F sont des e.v.t., $\mathcal{A}_0(E,F) = F$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{A}_p(E^p,F)$ est l'espace vectoriel des applications p-linéaires alternées continues de E^p dans F.

$\mathfrak{S}$ est un recouvrement de E par des parties bornées de E. Sauf mention du contraire $\mathcal{A}_p(E^p,F)$ sera muni de la topologie de la convergence uniforme sur les éléments de $\mathfrak{S}^p$. $\mathcal{A}_p$ sera mis pour $\mathcal{A}_p(E^p,K)$.

N.D.L.P. Pour des raisons techniques, l'article ci-dessus qui devait être publié dans le tome 8, fasc. 3-4 n'a pu être inséré que dans le tome 9 fasc. 3.

Si $k \in \mathbb{N}^*$, un élément de $\mathcal{L}_k(E^k,F)$ est dit polynomial s'il est combinaison linéaire d'éléments du type $(x_1,\dots,x_k) \longrightarrow (u_1 \wedge \dots \wedge u_k)(x_1,\dots,x_k)\, v$ où $\forall\ i = 1,\dots,k$, $u_i \in E'$ et $v \in F$.

$\mathcal{P}_k(E^k,F)$ est l'espace vectoriel des éléments polynomiaux de $\mathcal{L}_k(E^k,F)$.

$\mathcal{P}_o(E^{\circ},F) = F$ et $\mathcal{P}_k$ est mis pour $\mathcal{P}_k(E^k,K)$.

Si $a \in \mathcal{L}_p(E^p,F)$ et $x_1,\dots,x_k \in E$ on pose :

$$i_{x_k \dots x_1}\, a = i_{x_k} \dots i_{x_1}\, a$$

Si A et B sont deux ensembles, $\mathcal{F}(A,B)$ est l'ensemble des applications de A dans B.

Si A est un ensemble et B un espace topologique $\mathcal{F}_\sigma(A,B)$ est l'ensemble des applications de A dans B , muni de la topologie de la convergence simple.

Pour tout $(k,\ell) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que $k \leq \ell$ et tout sous-espace vectoriel $\mathfrak{X}$ de $\mathcal{A}_k$, $\mathcal{M}(\mathfrak{X}, \mathcal{A}_\ell)$ est l'ensemble des applications de $\mathfrak{X}$ dans $\mathcal{A}_p$ du type $\hat{S} : a \longmapsto a \wedge S$, avec $S \in \mathcal{A}_{\ell-k}$.

$\mathcal{M}_\sigma(\mathfrak{X}, \mathcal{A}_\ell)$ est l'espace vectoriel $\mathcal{M}(\mathfrak{X}, \mathcal{A}_\ell)$ muni de la topologie de la convergence simple.

Dans ce qui suit nous démontrons, entre autres, les résultats suivants :

Soient E un elc séparé , $\mathfrak{X}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}_k$ tel que $\mathcal{P}_k \subset \mathfrak{X}$, alors :

1) Si S est une forme p-linéaire alternée sur E telle que $\forall a \in \mathcal{P}_k$, $a \wedge S$ soit continue alors S est continue.

2) $\mathcal{M}(\mathfrak{X}, \mathcal{A}_\ell)$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{F}_\sigma(\mathfrak{X}, \mathcal{A}_\ell)$

3) L'application $S \longrightarrow \hat{S}$ de $\mathcal{A}_p$ sur $\mathcal{M}_\sigma(\mathfrak{X}, \mathcal{A}_\ell)$ est un isomorphisme bicontinu.

4) Si $L : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathcal{A}_\ell$ est une application linéaire telle que, pour tous $u_1,\dots,u_k$ dans E', $u_1 \wedge L(u_1 \wedge \dots \wedge u_k) = o$ alors $L \in \mathcal{M}(\mathfrak{X}, \mathcal{A}_\ell)$.

Le cas particulier $k=1$ nous est fort utile dans [2]. Il s'énonce :
Si $L : E' \to \mathcal{A}_\ell$ est une application linéaire telle que $\forall u \in E'$ $u \wedge L(u) = 0$ alors L est du type $u \to u \wedge S$ où S est un élément de $\mathcal{A}_{\ell-1}$ complètement déterminé par L.

Proposition 1 : *Soit* E *un e.v.t.*, $(p,q) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, *alors :*

1) L'application $(\alpha,\beta) \to \alpha \wedge \beta$ *de* $\mathcal{A}_p \times \mathcal{A}_q$ *dans* $\mathcal{A}_{p+q}$ *est continue.*

2) $\forall x \in E$, $i_x : \mathcal{A}_p \to \mathcal{A}_{p-1}$ *est continue.*

3) L'application $(u_1,\dots,u_p) \to u_1 \wedge \dots \wedge u_p$ *de* $(E')^p$ *dans* $\mathcal{P}_p$ *est une puissance extérieure p-ème de* E'.

La preuve est laissée au lecteur.

Proposition 2 : *Soient* E *un elc séparé*, $p \in \mathbf{N}$, $\varphi : E^p \to K$ *une application p-linéaire alternée. Supposons que :*

1) $p+1 \leqslant \dim E$

2) $\forall u \in E'$ $\quad u \wedge \varphi = 0$

Alors $\varphi = 0$.

Preuve. • Si $p=0$, $\varphi \in K$ et $u \wedge \varphi = \varphi u$. Or il existe $u \in E'$ tel que $u \neq 0$ (Hahn-Banach). donc $\varphi = 0$.

• Supposons $p \geqslant 1$;

Soit $(x_1,\dots,x_p) \in E^p$. Comme $p+1 \leqslant \dim E$, il existe $x_0 \in E$ tel que x_0 n'appartienne pas au sous-espace vectoriel de E engendré par $x_1,\dots,x_p$. Il existe alors une forme linéaire continue u sur E telle que $u(x_0) = 1$ et $\forall i = 1,\dots,p$ $u(x_i) = 0$ (Hahn-Banach).

Or $(u \wedge \varphi)(x_0,\dots,x_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i u(x_i)\, \varphi(x_0,\dots,\check{x}_i,\dots,x_p)$
$= \varphi(x_1,\dots,x_p)$.

donc, d'après l'hypothèse, $\varphi(x_1,\dots,x_p) = 0$. (C.Q.F.D.).

Corollaire : *Soient* E *un elc séparé,* $(p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $\varphi : E^p \to K$ *une application p-linéaire alternée. Supposons que* $\forall \psi \in \mathcal{P}_q$ *on ait* $\psi \wedge \varphi = 0$. *Alors* $\varphi = 0$.

Preuve. • Si $q = 0$, on a $1 \wedge \varphi = \varphi = 0$.

• Supposons $q \geqslant 1$, l'hypothèse entraîne en particulier que pour tous $u_1,\dots,u_q$ dans E' :

$$u_1 \wedge \dots \wedge u_q \wedge \varphi = 0$$

donc, d'après la proposition (2),

pour tous $u_2,\dots,u_q$ dans E' $u_2 \wedge \dots \wedge u_q \wedge \varphi = 0$

d'où, par une récurrence immédiate $\varphi = 0$. (C.Q.F.D.).

Lemme : *Soient* E *un elc séparé,* $k \in \mathbb{N}^*$. *Si* $k \leqslant \dim E$, *il existe* $x_1,\dots,x_k$ *dans* E *et* $u_1,\dots,u_k$ *dans* E' *tels que* $u_i(x_j) = \delta_{ij}$.

Ceci résulte du théorème de Hahn-Banach.

Proposition 3 : *Soient* E *un elc séparé,* $p \in \mathbb{N}$, $S : E^p \to K$ *une application p-linéaire alternée,* $x_1,\dots,x_{p+1} \in E$ *et* $u_1,\dots,u_{p+1} \in E'$ *tels que* $\forall\, i,j \in \{1,\dots p+1\}$ $u_i(x_j) = \delta_{ij}$.
Supposons que, $\forall\, u \in E'$, $u \wedge S \in \mathcal{O}\!\mathcal{C}_{p+1}$, *et soit* L *l'application* $u \mapsto u \wedge S$ *de* E' *dans* $\mathcal{O}\!\mathcal{C}_{p+1}$. *Alors :*

(1) $$S = i_{x_1} L(u_1) - u_1 \wedge i_{x_2 x_1} L(u_2) + \dots (-1)^{k-1} u_1 \wedge \dots \wedge u_{k-1} \wedge i_{x_k \dots x_1} L(u_k) + \dots$$

$$+ (-1)^p u_1 \wedge \dots \wedge u_p \wedge i_{x_{p+1} \dots x_1} L(u_{p+1}).$$

En particulier S *est continu.*

Preuve. Démontrons d'abord le

Lemme : *Pour tout* $(y_1,\dots,y_k)\in E^k$ *et tout* $(v_1,\dots,v_k)\in (E')^k$ *tels que* $v_i(y_j)=\delta_{ij}$:

(1') $$(-1)^k\, i_{y_k\dots y_1} L(v_k) = -\, i_{y_{k-1}\dots y_1} S + v_k\wedge i_{y_k\dots y_1} S.$$

Comme $L(v_1)=v_1\wedge S$:

$$i_{y_1} L(v_1) = v_1(y_1)S - v_1\wedge i_{y_1} S$$

De même $$i_{y_2} L(v_2) = v_2(y_2)S - v_2\wedge i_{y_2} S$$

d'où $$i_{y_1} i_{y_2} L(v_2) = i_{y_1} S + v_2\wedge i_{y_1} i_{y_2} S$$

Supposons que (1') est vraie pour $k=1,\dots,h$ et montrons qu'elle l'est pour $k=h+1$:

Soient $y_1,\dots,y_{h+1}\in E$ et $v_1,\dots,v_{h+1}\in E'$ tels que pour tous i,j dans $\{1,\dots,h+1\}$: $v_i(y_j)=\delta_{ij}$.

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$(-1)^h i_{y_{h+1}\dots y_2} L(v_{h+1}) = -\, i_{y_h\dots y_2} S + v_{h+1}\wedge i_{y_{h+1}\dots y_2} S$$

d'où : $$(-1)^h i_{y_1 y_{h+1}\dots y_2} L(v_{h+1}) = -\, i_{y_1 y_h\dots y_2} S - v_{h+1}\wedge i_{y_1 y_{h+1}\dots y_2} S$$

i.e. $$(-1)^{h+1} i_{y_{h+1}\dots y_1} L(v_{h+1}) = -\, i_{y_h\dots y_1} S + i_{y_{h+1}\dots y_1} S$$

(C.Q.F.D.).

Achevons maintenant la démonstration de la proposition (3) :

D'après le lemme précédent pour tous $k = 1, \ldots p+1$

$$(-1)^k i_{x_k \ldots x_1} L(u_k) = - i_{x_{k-1} \ldots x_1} S + u_k \wedge i_{x_k \ldots x_1} S :$$

En multipliant les deux membres à gauche par $u_1 \wedge \ldots \wedge u_{k-1}$ et en sommant pour $k = 1, \ldots, p+1$ on obtient (1), compte tenu du fait que $i_{x_{p+1} \ldots x_1} S = o$ (deg $S = p$)

(C.Q.F.D.).

Corollaire : *Soient* E *un elc séparé,* $p, k \in \mathbb{N}$, $S : E^p \to K$ *une application p-linéaire alternée. Supposons que* $\forall u_1, \ldots, u_k \in E'$

$$u_1 \wedge \ldots \wedge u_k \wedge S \in \mathcal{A}_{k+p}.$$

Alors S *est continue.*

Preuve. D'après l'hypothèse pour tous $u_2, \ldots, u_k$ dans E'

$$\forall u_1 \in E', \; u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_k \wedge S \in \mathcal{A}_{k+p}$$

donc, d'après la proposition (3) :

$$u_2 \wedge \ldots \wedge u_k \wedge S \in \mathcal{A}_{k+p-1}$$

d'où, par récurrence immédiate, $S \in \mathcal{A}_p$ (C.Q.F.D.).

Proposition (4) : *Soit* $(L_j)_{j \in J}$ *une suite généralisée d'éléments de* $\mathcal{M}(\mathcal{P}_k, \mathcal{A}_{k+p})$
$\forall j \in J$, $\forall a \in \mathcal{P}_k$, $L_j(a) = a \wedge S_j$; $S_j \in \mathcal{A}_p$

Supposons que (L_j) *converge simplement vers une application de* $\mathcal{P}_k$ *dans* $\mathcal{A}_{k+p}$.

Alors S_j *tend vers une limite* S *dans* $\mathcal{A}_p$.

En effet :

1) Supposons $k = 1$. Le résultat découle de la proposition (3) formule (1), appliquée à S_j et L_j, compte tenu de la continuité de $\wedge$ et des opérateurs i_x.

2) Soit $h > 1$. Supposons que la proposition soit vraie pour $k = 1, \dots, h\text{-}1$ et montrons qu'elle l'est pour $k = h$.

$\forall u_1 \in E'$, $\forall \beta \in \mathscr{P}_{h-1}$, $L_j(u_1 \wedge \beta) = u_1 \wedge \beta \wedge S_j$.

Fixons β et soit M_j l'application

$u_1 \longmapsto L_j(u_1 \wedge \beta) = u_1 \wedge (\beta \wedge S_j)$

de E' dans $\mathscr{A}_{h+p}$.

Les hypothèses impliquent que M_j converge simplement, donc, d'après 1) $\beta \wedge S_j$ tend vers un élément $T \in \mathscr{A}_{h-1+p}$.
Ceci étant vrai pour tout $\beta \in \mathscr{P}_{h-1}$ il résulte de l'hypothèse de récurrence que S_j tend vers un élément S de $\mathscr{A}_p$ (C.Q.F.D.).

Soit $\mathfrak{X}$ un sous-espace vectoriel de $\mathscr{A}_k$ tel que $\mathscr{P}_k \subset \mathfrak{X}$, alors :

Corollaire : $\mathscr{M}(\mathfrak{X}, \mathscr{A}_{k+p})$ *est un sous-espace fermé de* $\mathscr{F}_\sigma(\mathfrak{X}, \mathscr{A}_{k+p})$.

Ceci résulte de la proposition (4) et de la continuité du produit extérieur.

Corollaire : *L'application* $S \longrightarrow \hat{S}$ *de* $\mathscr{A}_p$ *sur* $\mathscr{M}_\sigma(\mathfrak{X}, \mathscr{A}_{k+p})$ *est un isomorphisme bicontinu.*

Preuve. 1) Le produit extérieur étant continu l'application $S \rightarrow \hat{S}$ de $\mathscr{A}_p$ dans $\mathscr{M}_\sigma(\mathfrak{X}, \mathscr{A}_{k+p})$ est continue.

2) D'après la proposition (4) la bijection réciproque de $S \rightarrow \hat{S}$ est continue.

Critère d'appartenance à $\mathcal{L}(E', \mathcal{A}_{p+1})$.

Soit $L : E' \rightarrow \mathcal{A}_{p+1}$ une application linéaire. S'il existe $S \in \mathcal{A}_p$ tel que $\forall u \in E'$, $L(u) = u \wedge S$ alors $\forall u \in E'$, $u \wedge L(u) = 0$.

Réciproquement soit $L : E' \rightarrow \mathcal{A}_{p+1}$ une application linéaire telle que $\forall\ u \in E'$, $u \wedge L(u) = 0$.

D'après un critère connu de divisibilité, $\forall u \in E'$, $\exists S_u \in \mathcal{A}_p$ tel que $L(u) = u \wedge S_u$.

La proposition suivante montre qu'en fait on peut trouver un S *indépendant de* u (et un seul) tel que $\forall u \in E'$, $L(u) = u \wedge S$.

Proposition (5) : *Soient* E *un elc séparé* , $p \in \mathbb{N}$ *tel que* $p+1 \leqslant \dim E$.

$L : E' \rightarrow \mathcal{A}_{p+1}$ *une application linéaire.*

Supposons que $\forall u \in E'$, $u \wedge L(u) = 0$. *Alors il existe un unique* $S \in \mathcal{A}_p$ *tel que*

$$\forall u \in E' \quad , \quad L(u) = u \wedge S.$$

Preuve. L'unicité de S résulte de la proposition (2).

1) Supposons E de dimension finie n.

Soit $r = n - (p+1)$. Considérons l'application

$$\varphi : (E^*)^{r+1} \longrightarrow \mathcal{A}_n(E,K)$$
$$u_1,\dots,u_{r+1} \longrightarrow u_1 \wedge \dots \wedge u_r \wedge L(u_{r+1})$$

φ est multilinéaire. D'après l'hypothèse , l'associativité et l'anticommutativité du produit extérieur, φ est alternée.

D'après une propriété de dualité connue il existe $S \in \mathcal{A}_p(E,K)$ tel que : $\forall u_1,\dots,u_{r+1} \in E^*$

$$\varphi(u_1,\dots,u_{r+1}) = u_1 \wedge \dots \wedge r_{r+1} \wedge S$$

ie. $u_1 \wedge \dots \wedge u_r \wedge L(u_{r+1}) = u_1 \wedge \dots \wedge u_{r+1} \wedge S$.

d'où, en vertu de la proposition (2).

$$\forall\ u_{r+1} \in E^* \quad L(u_{r+1}) = u_{r+1} \wedge S \quad \text{(C.Q.F.D.).}$$

2) Supposons E de dimension infinie.

Lemme : *Soient* F *un sous-espace vectoriel de* E *tel que* $p+2 \leq \dim F$; $u,v \in E'$ *telles que* $u|F = v|F$. *Alors :*

$$L(u)|F^{p+1} = L(v)|F^{p+1}$$

Preuve du lemme. Soient $x_1,\dots,x_{p+1} \in F$. Comme $p+2 \leq$ sim F , il existe $x_{p+2} \in F$ tel que x_{p+2} n'appartienne pas au sous-espace vectoriel de E engendré par $x_1,\dots, x_{p+1}$. Il existe donc $w \in E'$ telle que $w(x_{p+2}) = 1$ et pour tous $i = 1,\dots,p+1$ $w(x_i) = o$ (Hahn-Banach). Or d'après l'hypothèse : $w \wedge L(u) = - u \wedge L(w)$ donc

$$(-1)^{p+1} L(u)(x_1,\dots,x_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+2} (-1)^i u(x_i) L(w)(x_1,\dots,\check{x}_i \dots,x_{p+2})$$

De même :

$$(-1)^{p+1} L(v)(x_1,\dots,x_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+2} (-1)^i v(x_i) L(w)(x_1,\dots\check{x}_i\dots x_{p+2})$$

or $\forall\, i = 1 ,\dots,p+2 \quad u(x_i) = v(x_i)$ (C.Q.F.D.).

Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $p+2 \leq \dim F$. Comme toute forme linéaire sur F se prolonge en une forme linéaire continue sur E (Hahn-Banach), il résulte du lemme précédent qu'il existe une application et une seule

$$L_F : F \to \mathcal{A}_{p+1}(F) \quad \text{telle que :}$$

$$\forall\, u \in E' \qquad L_F(u|F) = L(u)|F^{p+1}.$$

L'opération «restriction» étant linéaire , L_F est linéaire. Par hypothèse, $\forall\, u \in E'$, $u \wedge L(u) = o$ or la restriction d'un produit extérieur est le produit extérieur des restrictions, donc :

$$\forall\, u_1 \in F^* \quad , u_1 \wedge L_F(u_1) = o \quad .$$

Donc, d'après 1) il existe un unique élément S_F de $\mathcal{A}_p(F,K)$ tel que :

$$\forall u_1 \in F^* \quad , L_F(u_1) = u_1 \wedge S_F$$

Soient F_1 ,F_2 deux sous-espaces vectoriels de E tels uque $p+2 \leqslant \dim F_1$ et $p+2 \leqslant \dim F_2$.
Posons $F_3 = F_1 + F_2$. D'après des propriétés déjà utilisées et l'unicité des S_{F_i} , S_{F_1} et S_{F_2} sont des restrictions de S_{F_3} ; donc elles coïncident sur leur domaine commun de définition.
Il en résulte qu'il existe une application p-linéaire alternée et une seule $S : E^p \to K$ qui prolonge les S_F (pour F décrivant l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E tels que $p+2 \leqslant \dim F$).

D'après la construction de S :

$$\forall u \in E' \qquad L(u) = u \wedge S$$

La continuité de S résulte alors de la proposition (3) (C.Q.F.D.).

Proposition (6) : *Soient* E *un elc séparé*, k, $p \in \mathbf{N}$ *tels que* $p+k \leqslant \dim E$.
$\varphi : (E')^k \to \mathcal{C}_{k+p}$ *une application* k-*linéaire alternée telle que :*
pour tous $u_1,...,u_k \in E'$, $u_1 \wedge \varphi(u_1,...,u_k) = o$.
Alors il existe un unique $S \in \mathcal{C}_p$ *tel que pour tous* $u_1,...,u_k \in E'$,
$\varphi(u_1,...,u_k) = u_1 \wedge ... \wedge u_k \wedge S$.

Preuve.

1) La proposition est vraie pour $k=1$ (proposition (5)).

2) Soit $h > 1$. Supposons la proposition vraie pour $k = 1,...,h-1$ et montrons qu'elle l'est pour $k = h$.

Pour tout $v \in E'$, soit ψ_v l'application $(u_1,...,u_{h-1}) \longmapsto \varphi(u_1,...,u_{h-1}, v)$ de $(E')^{h-1}$ dans $\mathcal{C}_{h+p}$.

D'après l'hypothèse : $\forall u_1,...,u_{h-1} \in E' \quad u_1 \wedge \psi_v(u_1,...,u_{h-1}) = o$ donc, d'après l'hypothèse de récurrence il existe $S_v \in \mathcal{C}_{p+1}$ tel que :
$\forall u_1,...,u_{h-1} \in E'$, $\psi_v(u_1,...,u_{h-1}) = u_1 \wedge ... \wedge u_{h-1} \wedge S_v$.

Ainsi, pour tous $u_1,\ldots,u_{h-1},v$ dans E' :

$$\varphi(u_1,\ldots,u_{h-1},v) = u_1\wedge \ldots \wedge u_{h-1}\wedge S_v$$

Le 1er membre étant linéaire en v, il résulte de la non dégénérescence du produit extérieur que l'application $v \longmapsto S_v$ de E' dans $c\mathcal{T}_{p+1}$ est linéaire.

De plus, comme φ est alternée, (1) implique pour $u_{h-1} = v$:
$u_1\wedge \ldots \wedge u_{h-2}\wedge v \wedge S_v \quad o$. Ceci étant vrai $\forall\, u_1,\ldots,u_{h-2} \in E'$:

$$v \wedge S_v = o$$

donc d'après l'hypothèse de récurrence, il existe $S \in c\mathcal{T}_p$ tel que : $\forall v \in E'$, $S_v = v \wedge S$.
L'égalité (1) s'écrit donc :
pour tous $u_1,\ldots,u_{h-1}$, v dans E' : $\varphi(u_1,\ldots,u_{h-1},v) = u_1\wedge \ldots \wedge u_{h-1}\wedge v \wedge S$.

(C.Q.F.D.).

D'après la proposition (1) l'application $(u_1,\ldots,u_k) \longrightarrow u_1\wedge\ldots\wedge u_k$ de $(E')^k$ dans $\mathcal{P}_k$ est une puissance extérieure k-ième de E'. La proposition précédente peut donc s'énoncer :

Proposition (6') : *Soient* E *un elc séparé* , $k,p \in \mathbb{N}$ *tels que* $p+k \leqslant \dim E$.
L : $\mathcal{P}_k \longrightarrow c\mathcal{T}_{k+p}$ *une application linéaire telle que :*

pour tous $u_1,\ldots,u_k$ *dans* E' : $u_1\wedge L(u_1\wedge\ldots\wedge u_k) = o$.

Alors il existe un unique $S \in c\mathcal{T}_p$ *tel que*

$$\forall\, a \in \mathcal{P}_k \ , \quad L(a) = a \wedge S.$$

Bibliographie.

1 Y. BAMBERGER
J.P. BOURGUIGNON : Torseurs sur un espace affine
1970 - Centre de Math. Ecole Polytechnique.

2 N. BOURBAKI : Algèbre Ch. 3
Espaces vectoriels topologiques
Topologie générale Ch. 10 (Hermann).

3 H. MAILLOT : Formes différentielles équiprojectives et coéquiprojectives sur une variété banachique.
Pub. du Départ. de Math. (1972).

Manuscrit remis le 12 avril 1972.

H. MAILLOT
Département de Mathématiques
Université Claude Barnard
43, bd du 11 novembre 1918.
69 - VILLEURBANNE