C. TISSERON

Sur deux classes d'anneaux

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1973, tome 10, fascicule 1
, p. 47-61
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1973__10_1_47_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1973 t. 10-1

SUR DEUX CLASSES D'ANNEAUX

par Claude TISSERON

Ce texte constitue un résumé; les démonstrations seront publiées dans [7].

I - INTRODUCTION.

Sauf mention du contraire, tous les modules considérés sont des modules à gauche ; idéal signifie idéal à gauche, noethérien signifie noethérien à gauche etc.

Soit A un anneau et M un A-module; M est quasi-injectif si, pour tout sous-module N de M, tout morphisme de N dans M se prolonge à M. On dit que M est Π-quasi-injectif si tout produit de copies de M est un module quasi-injectif.

Soit M un A-module et soit X une partie de A; on pose $r_M(X) = \{x \in M : Xx = 0\}$; on désigne par $\ell_A(M)$ ou $\ell(M)$ l'annulateur de M et par $E_A(M)$ ou $E(M)$ l'enveloppe injective de M. On a le résultat suivant qui caractérise les modules Π-quasi-injectifs.

1. PROPOSITION ([2] et [6]). *Pour un A-module* M *les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) M *est* Π-*quasi-injectif ;*

(b) M *est un* $A/\ell(M)$ *module injectif ;*

(c) $M = r_{E(M)}(\ell(M))$.

En particulier, tout module Π-quasi-injectif et fidèle (i.e. dont l'annulateur est nul) est injectif.

On étudie ici les anneaux, introduits dans [2], tels que tout module quasi-injectif est Π-quasi-injectif. Un tel anneau est appelé un *Q-anneau* (à gauche).

L'étude des Q-anneaux introduit une notion plus générale, celle de C1 anneaux ; les C1 anneaux ayant en commun avec les Q-anneaux un certain nombre de propriétés, nous étudions simultanément ces deux notions. On définit maintenant les C1 anneaux.

Soient A un anneau et T(A) un ensemble de représentants des types de A-modules simples, on désigne toujours par E l'enveloppe injective du A-module $\bigoplus_{S \in T(A)} S$. Le module E est un cogénérateur injectif de la catégorie Mod A des A-modules à gauche et E est contenu, à un isomorphisme près, dans tout cogénérateur injectif de Mod A. On dira par abus de langage que E est le cogénérateur minimal de Mod A.

2. DEFINITION. - *Si tout sous-*A*-module quasi-injectif de* E *est* Π*-quasi-injectif, on dit que* A *est un* C1 *anneau (à gauche).*

Il revient au même dire que, pour tout sous-module quasi-injectif M de E, on a $M = r_{E(M)}(\ell(M))$. Comme E est un cogénérateur, on a $\mathfrak{a} = \ell(r_E(\mathfrak{a}))$ pour tout idéal à gauche $\mathfrak{a}$ de A et on voit apparaître une certaine "symétrie" entre les idéaux de A et les sous-modules quasi-injectifs de E qui sera précisée ultérieurement.

Pour terminer, donnons quelques exemples de Q-anneaux et de C1 anneaux.

3. EXEMPLES. -

(1) Il résulte de [2] ou de [6] que tout anneau artinien est un Q-anneau.

(2) Soit A un anneau commutatif noethérien local et complet pour la topologie définie par son radical, il résulte de [4] que A est un C1 anneau.

(3) Soit A un anneau dans lequel les idéaux (à gauche) forment une chaîne; montrons que A est un C1 anneau. Pour cela, on montre plus généralement que sur un tel anneau tout module quasi-injectif à socle essentiel est Π-quasi-injectif.

Soit M un A-module quasi-injectif dont le socle est essentiel; montrons que $M = r_{E(M)}(\ell(M))$. On a toujours $M \subset r_{E(M)}(\ell(M))$. Soit $y \in E(M)$ tel que $\ell(M)y = 0$. Montrons que $y \in M$. Si $\ell(M) = \mathrm{Ann}(y)$, alors $A/\ell(M) \simeq Ay$ a un socle non nul et il existe un idéal $\mathfrak{a}$ de A tel que $\mathfrak{a}/\ell(M)$ soit simple. Comme $\ell(M) = \bigcap_{x \in M} \mathrm{Ann}(x)$, on voit aisément qu'il existe $x \in M$ tel que $\mathrm{Ann}(x) = \ell(M) = \mathrm{Ann}(y)$. Si $\ell(M) \subsetneq \mathrm{Ann}(y)$, alors il existe $x \in M$ tel que $\mathrm{Ann}(x) \subset \mathrm{Ann}(y)$ car, sinon, on aurait $\ell(M) \subsetneq \mathrm{Ann}(y) \subset \bigcap_{x \in M} \mathrm{Ann}(x)$, ce qui est absurde. Dans tous les cas il existe $x \in M$ tel que $\mathrm{Ann}(x) \subset \mathrm{Ann}(y)$; on a alors un morphisme $u : E(M) \to E(M)$ tel que $u(x) = y$; comme M est quasi-injectif, on a $u(M) \subset M$ et $y = u(x) \in M$.

II - PREMIERES PROPRIETES.

Les Q-anneaux et les C1 anneaux ont en commun les propriétés de stabilités suivantes.

1. PROPOSITION. -

(a) Tout produit fini de Q*-anneaux (resp. de* C1 *anneaux) est un* Q*-anneau (resp. un* C1 *anneau) ;*

(b) Soit $f : A \to B$ *un épimorphisme d'anneaux surjectif ou tel que* B *soit un* A*-module à droite plat; alors :*

(i) Si A *est un* Q*-anneau,* B *est aussi un* Q*-anneau ;*

(ii) Si A *est un* C1 *anneau et si pour tout* B*-module simple* S *le* A*-module* $f_*(S)$ *obtenu par restriction est simple,* B *est un* C1 *anneau.*

(c) A *est un* Q*-anneau (resp. un* C1 *anneau) si et seulement si pour tout entier* n *l'anneau* $M_n(A)$ *des matrices d'ordre* n *est un* Q*-anneau (resp. un* C1 *anneau).*

2. PREMIERE CARACTERISATION DES C1 ANNEAUX.

Donnons d'abord deux propriétés des C1 anneaux.

2.1. PROPOSITION. - *Soit* A *un* C1 *anneau noethérien; alors tout* A-*module quasi-injectif dont le socle est essentiel est* Π-*quasi-injectif.*

2.2 PROPOSITION. - *Soit* A *un* C1 *anneau tel que* $\bigcap\limits_{n\geq 1} \mathcal{R}(A)^n = 0$, *alors pour tout élément* x *du cogénérateur minimal* E *il existe* n *tel que* $\mathcal{R}(A)^n x = 0$.

Disons maintenant qu'un module simple S est attaché à un module M s'il existe des sous-modules N' et N de M tels que $N' \subset N \subset M$ et $N/N' \simeq S$. On a alors la caractérisation suivante :

2.3. PROPOSITION. -

(a) Soit A *un* C1 *anneau, alors* A *vérifie la condition (i) suivante :*

(i) Les correspondances $\mathfrak{a} \mapsto r_E(\mathfrak{a})$ *et* $M \mapsto \ell(M)$ *sont des bijections réciproques entre l'ensemble des idéaux bilatères de* A *contenus dans* $\mathcal{R}(A)$ *et l'ensemble des sous-modules quasi-injectifs et essentiels de* E.

(b) Considérons les conditions suivantes :

(ii) Pour tout module S *simple,* S *est le seul module simple attaché à* E(S);

(iii) Le module $\bigoplus\limits_{S\in T(A)} E(S)$ *est injectif (et coïncide alors avec* E*).*

Si A *vérifie les conditions (i), (ii) et (iii) alors* A *est un* C1 *anneau.*

2.4. REMARQUES. - Les conditions (ii) et (iii) sont toujours vérifiées pour un anneau noethérien commutatif. La condition (ii) est vérifiée dès que tout les A-modules simples sont injectifs, i.e. lorsque A *est un* V-*anneau* et ceci nous amène à étudier les liens entre les C1 anneaux et les V-anneaux, ce qui est fait entre autre dans le numéro suivant.

3. C1 ANNEAUX ET Q ANNEAUX SANS RADICAUX.

Il est immédiat de vérifier qu'un anneau A sans radical est un C1 anneau si et seulement si A est un V-anneau tel que le module $\bigoplus\limits_{S\in T(A)} S$ soit injectif.

On a le premier résultat suivant.

3.1. PROPOSITION (RENAULT). - *Soit* A *un* C1 *anneau sans radical; alors* $A = \prod_{i=1}^{n} V_i$ *où pour* $1 \leq i \leq n$ V_i *est un* C1 *anneau sans radical dont le centre est un corps.*

Si on suppose de plus que A est noethérien, on a le résultat plus précis suivant :

3.2. PROPOSITION. - *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) A *est un* C1 *anneau noethérien sans radical ;*

(b) A *est un* V-*anneau noethérien ;*

(c) A *est produit fini de* V-*anneaux noethériens quasi-simples ;*

(d) Tout A-*module semi-simple est injectif.*

Pour les Q-anneaux on a un résultat semblable, à savoir :

3.3. PROPOSITION. - *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) A *est un* Q-*anneau sans radical ;*

(b) A *est un* Q-*anneau sans radical noethérien ;*

(c) A *est produit fini d'anneau* V_i $1 \leq i \leq n$ *tels que* B_i *est un* V-*anneau noethérien, quasi-simple, tel que tout* B_i-*module quasi-injectif est injectif ;*

(d) Tout A-*module quasi-injectif est injectif.*

Ce résultat est pour l'essentiel dû à RENAULT [5].

3.4. REMARQUE. - En utilisant un anneau introduit par COZZENS [1] , on peut montrer qu'il existe un V-anneau à droite quasi-simple A tel que tout A-module à droite quasi-injectif soit injectif et vérifiant de plus les conditions suivantes :

- A est sans diviseurs de 0, principal à gauche et à droite.
- Tous les A-modules à droite simples sont isomorphes.

Il est facile de voir que le socle à droite d'un tel anneau est nul. Ceci peut d'ailleurs se généraliser de la façon suivante :

3.5. PROPOSITION. - *Un Q-anneau (resp. un* C1 *anneau) réduit* A *est produit direct d'un produit fini de corps et d'un Q-anneau (resp. un* C1 *anneau) réduit à socle nul.*

4. CARACTERES NOETHERIENS DES Q-ANNEAUX.

Il résulte de 3.3 qu'un Q-anneau A tel que $\mathcal{R}(A) = 0$ est noethérien ; on a un résultat plus fort lorsque $A/\mathcal{R}(A)$ est semi-simple et artinien (ce qui se produit lorsque A est un Q-anneau commutatif).

4.1. PROPOSITION (RENAULT [5]). -

1. *Soit* A *un Q-anneau tel que* $A/\mathcal{R}(A)$ *soit semi-simple et artinien ; alors si* $X = \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{R}(A)^n$ *, l'anneau* A/X *est noethérien.*
2. *Un Q-anneau parfait à gauche ou parfait à droite est artinien (à gauche).*

Cette seconde assertion permet aisément de montrer que, si A est un Q-anneau tel que $A/\mathcal{R}(A)$ soit semi-simple et artinien, alors pour tout entier n l'anneau $A/\mathcal{R}(A)^n$ est artinien. Ceci montre que, si A est un Q-anneau tel que $A/\mathcal{R}(A)$ soit artinien, alors l'anneau $B = A/X$ où $X = \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{R}(A)^n$ est un Q-anneau noethérien dont la topologie $\mathcal{R}(B)$-adique est artinienne et séparée. On peut démontrer que le complété de B pour la topologie $\mathcal{R}(B)$-adique se comporte à peu près comme dans le cas commutatif. C'est ce qu'on va voir maintenant avec des hypothèses un peu plus générales.

III - Q-ANNEAUX ET C1 ANNEAUX NOETHERIENS SEMI-LOCAUX.

On suppose maintenant toujours que les anneaux sont noethériens. Soit A un anneau; on dit que A est *quasi-local* si les conditions suivantes sont vérifiées :

(a) A est noethérien.

(b) $\bigcap_{n \geq 1} \mathcal{R}(A)^n = 0$;

(c) $A/\mathcal{R}(A)$ est un anneau quasi-simple (i.e. 0 et A sont les seuls idéaux bilatères).

Si A vérifie les conditions (a), (b) et (c) , $A/\mathcal{R}(A)$ est semi-simple et artinien, on dit que A est *semi-local*; *si* de plus $A/\mathcal{R}(A)$ est simple et artinien, on dit que A est *local*.

Si A est un Q-anneau tel que $A/\mathcal{R}(A)$ soit artinien, alors A/X, où $X = \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{R}(A)^n$, est un Q-anneau semi-local.

1. COMPLETE D'UN C1 ANNEAU SEMI-LOCAL.

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal bilatère de A. et soit $\mathcal{C}$ la sous-catégorie pleine de Mod A ayant pour objets les modules M tels que $\forall x \in M \quad \exists n \quad \mathfrak{p}^n x = 0$.

Soit $T_{\mathcal{C}}N$ la topologie linéaire sur N pour laquelle N' est ouvert dans N si $N/N' \in \mathcal{C}$. On a alors le lemme suivant :

1.1. LEMME. - *Soit* A *un* C1 *anneau noethérien, soit* $\mathfrak{p}$ *un idéal bilatère de* A *tel que* $\bigcap \mathfrak{p}^n = 0$ *et tel que pour tout* n $A/\mathfrak{p}^n$ *est un anneau artinien, alors* A *vérifie la condition suivante :*

(R_p). *Pour tout module* M *et tout sous-module* N *de* M *la topologie* $T_{\mathcal{C}}N$ *est induite par la topologie* $T_{\mathcal{C}}M$.

En utilisant la condition (R_p), on peut récrire les démonstrations du cas commutatif et montrer le :

1.2. THEOREME. - *Soit* A *un* C1 *anneau semi-local, soit* $\mathfrak{p}$ *un idéal bilatère de* A *contenant* $\mathcal{R}(A)$ *et tel que* $\bigcap_{n \geq 1} \mathfrak{p}^n = 0$. *Soit* $\hat{A}$ *(resp.* $\hat{M}$*) le séparé complété de* A *(resp. d'un* A*-module* M*) pour la topologie* $\mathfrak{p}$*-adique. Alors :*

1) Pour tout A*-module de type fini* M *le morphisme canonique* $\hat{A}\otimes_A M \to \hat{M}$ *est un isomorphisme ;*

2) $\hat{A}$ *est un* A*-module à droite plat ;*

3) Si $\mathfrak{p} = \mathcal{R}(A)$ *alors* $\hat{A}$ *est de plus fidèlement plat.*

On peut aussi montrer que $\hat{\mathfrak{p}} = \mathcal{R}(\hat{A})$ et que la topologie de A est la topologie $\mathcal{R}(\hat{A})$-adique.

2. Q-ANNEAUX NOETHERIENS QUASI-LOCAUX.

Commençons par énoncer deux lemmes dont le premier est en partie connu.

2.1. LEMME. - *Soit* $\mathfrak{p}$ *un idéal premier d'un anneau* A*, alors il existe un injectif indécomposable* F *tel que*

(a) $\mathrm{Ass}(F) = \{\mathfrak{p}\}$ *et* $E(A/\mathfrak{p}) \simeq F^n$ *;*

(b) le module $Q = r_F(\mathfrak{p})$ *n'a pas de sous-module quasi-injectif propre non nul.*

Ici Ass(M) désigne l'ensemble des idéaux premiers associés à un A-module M, ce qui a un sens puisque A est noethérien.

2.2. LEMME. - *Soit* F *un* A*-module injectif indécomposable tel que* $\mathrm{Ass}(F) = \{\mathfrak{p}\}$*. Si* F *n'a pas de sous-module quasi-injectif propre non nul, alors* $\mathfrak{p} = \ell(F)$ *et* $\mathfrak{p}$ *est premier minimal.*

Grâce à ces lemmes on peut montrer les propriétés suivantes :

2.3. PROPOSITION. - *Soit* A *un* Q*-anneau tel que* $\bigcap_{n\geq 1} \mathcal{R}(A)^n = 0$ *alors :*

(a) A *vérifie la condition* (C_0) *suivante :*

(C_0) *pour tout idéal premier minimal et non maximal* $\mathfrak{p}$ *tout injectif indécomposable* F *tel que* $\mathrm{Ass}(F) = \{\mathfrak{p}\}$ *n'a pas de sous-module quasi-injectif propre non nul ;*

(b) tout idéal premier de A *non maximal est un idéal premier minimal.*

Désignons par ϕ_A l'application de l'ensemble des types de A-modules injectifs indécomposables sur l'ensemble des idéaux premiers de A définie par $\phi_A(F) = \mathfrak{p}$ où $Ass(F) = \{\mathfrak{p}\}$

2.4. THEOREME. - *Soit* A *un anneau local tel que la correspondance* ϕ_A *soit bijective alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) A *est un* Q*-anneau ;*

(b) A *est un* C1*-anneau et vérifie la condition suivante :*
Pour tout idéal premier $\mathfrak{p} \neq \mathcal{R}(A)$ *l'anneau total des fractions à gauche de l'anneau* $A/\mathfrak{p}$ *coïncide avec* $E_A(A/\mathfrak{p})$.

2.5. REMARQUE. - Il existe des anneaux tels que ϕ_A ne soit pas bijective et qui sont cependant des Q-anneaux.

Donnons maintenant des propositions qui fournissent des exemples de Q-anneaux.

3. D'AUTRES EXEMPLES DE Q-ANNEAUX.

3.1. PROPOSITION. - *Soit* A *un anneau sans diviseur de* 0*, local, dont le radical est un idéal à gauche principal et tel que* $A/\mathfrak{M}$ *soit un corps; alors* A *est un* Q*-anneau.*

3.2. PROPOSITION. - *Soit* A *un anneau local sans diviseur de* 0 *dont tout idéal à gauche (resp. tout idéal à droite) est principal, alors* A *est un* Q*-anneau.*

3.3. COROLLAIRE. - *Soit* A *un anneau de DEDEKIND premier, borné à gauche et à droite; alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) A *est un* Q*-anneau ;*

(b) A *est un* C1*-anneau ;*

(c) A *est local.*

Pour démontrer ce corollaire on a besoin du lemme suivant :

3.4. LEMME. - *Soit* A *un* C1-*anneau noethérien; alors* A *est quasi-local dès que l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

(1) Pour tout idéal bilatère maximal $\mathfrak{p}$ *on a* $\bigcap_{n\geq 1} \mathfrak{p}^n = 0$;

(2) A *est premier et il existe un idéal bilatère maximal* $\mathfrak{p}$ *tel que* $\bigcap_{n\geq 1} \mathfrak{p}^n = 0$.

Il résulte aisément de ce lemme le corollaire suivant :

3.5. COROLLAIRE. - *Soit* A *un* C1-*anneau noethérien commutatif ; alors pour tout idéal premier* $\mathfrak{p}$ *de* A *l'anneau* $A/\mathfrak{p}$ *est local.*

IV - Q-ANNEAUX ET C1-ANNEAUX NOETHERIENS COMMUTATIFS.

On suppose maintenant que tous les anneaux sont noethériens et commutatifs. D'après II.3.2, un C1-anneau noethérien commutatif est semi-local et, pour l'étude des C1-anneaux et des Q-anneaux noethériens commutatifs, on peut donc toujours supposer les anneaux semi-locaux.

Soit donc A un anneau semi-local ayant pour idéaux maximaux $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_n$, soit $\hat{A}$ le complété (séparé) de A pour la topologie $\mathcal{R}(A)$-adique et soit E le cogénérateur minimal de Mod A, i.e. $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E(A/\mathfrak{M}_i)$. Il est facile de montrer que E est un $\hat{A}$-module et que E est le cogénérateur minimal de Mod $\hat{A}$; de plus on voit aisément que $\hat{A} \simeq \mathrm{End}_A(E)$ en utilisant les résultats de [4].

1. CARACTERISATION DES C1-ANNEAUX.

1.1. PROPOSITION. - *Avec les notations précédentes pour tout sous-*A*-module* N *de* E *on a* $N = r_E(\ell_{\hat{A}}(N))$.

1.2. THEOREME. - *Soit* A *un anneau semi-local, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) A *est un* C1*-anneau ;*

(b) pour tout sous-module N *de* E *on a* $N = r_E(\ell_A(N))$;

(c) pour tout idéal $\mathfrak{a}$ *de* $\hat{A}$ *on a* $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a} \cap A)\hat{A}$.

1.3. COROLLAIRE. - *Si* A *est un* C1*-anneau, alors* $\mathfrak{a} \to \hat{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}\hat{A}$ *est une bijection entre l'ensemble des idéaux de* A *et l'ensemble des idéaux de* $\hat{A}$, *qui conserve les idéaux premiers.*

1.4. COROLLAIRE. - *Si* A *est un* C1*-anneau réduit, alors* $\hat{A}$ *est un anneau réduit.*

Il est facile de montrer avec 1.3 que, si A est un C1-anneau, alors A est produit fini d'anneaux locaux ; mais on peut montrer ceci comme un corollaire du résultat plus général suivant en utilisant 3.5.

1.5. PROPOSITION. - *Soit* A *un anneau noethérien; si pour tout idéal premier* $\mathfrak{p}$ *l'anneau* $A/\mathfrak{p}$ *est local, alors* A *est produit fini d'anneaux locaux.*

1.6. COROLLAIRE. - *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) A *est un* C1*-anneau (noethérien commutatif) ;*

(b) A *est produit fini d'anneaux locaux* A_i $(1 \leq i \leq n)$ *tels que tout idéal* $\mathfrak{a}$ *de* A_i *vérifie la relation* $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a} \cap A_i)\hat{A}_i$.

2. C1-ANNEAUX LOCAUX INTEGRES.

2.1. PROPOSITION. - *Pour un anneau local intègre de dimension* 1 *il y a équivalence entre : (a)* A *est un* Q*-anneau ;*

(b) A *est un* C1*-anneau ;*

(c) le complété $\hat{A}$ *de* A *est intègre.*

2.2. PROPOSITION. - *Pour un anneau local intègre, il y a équivalence entre*

(a) A *est un* C1-*anneau ;*

(b) pour tout $x \in \hat{A}$ *il existe* $y \in \hat{A}$ *tel que* y *est inversible dans* $\hat{A}$ *et* $yx \in A$.

2.3. COROLLAIRE. - *Soit* A *un* C1-*anneau local; alors pour tout idéal premier* $\mathfrak{p}$ *de* A *l'anneau* $\hat{A} \otimes_A (A_{\mathfrak{p}} / \mathfrak{p} A_{\mathfrak{p}})$ *est un corps.*

Ce corollaire est dû à Michel RAYNAUD; on ne sait pas si cette condition caractérise les C1-anneaux.

3. Q-ANNEAUX NOETHERIENS COMMUTATIFS.

Pour un Q-anneau, les résultats de 2 et de III. 2.4. deviennent :

3.1. THEOREME. - *Pour un anneau semi-local, il y a équivalence entre :*

(a) A *est un* Q-*anneau ;*

(b) A *vérifie les conditions suivantes :*

(i) tout idéal premier minimal et non maximal est dans la décomposition primaire de 0 *dans* A *;*

(ii) $\dim_K(A) \leq 1$;

(iii) pour tout idéal $\mathfrak{a}$ *de* $\hat{A}$ *on a* $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a} \cap A)\hat{A}$;

(c) A *est produit fini d'anneaux locaux* A_i *qui vérifient l'analogue des conditions (i) à (iii).*

3.2. COROLLAIRE. - *Si* A *est un* Q-*anneau alors* $\hat{A}$ *est un* Q-*anneau.*

La réciproque de ce corollaire est fausse comme on va le voir dans les exemples suivants.

3.3. EXEMPLES ET REMARQUES. - Soit A un anneau semi-local de dimension 1 et réduit, soit R le radical de A et soit $\hat{A}$ le complété R-adique de A.

1 - Si A est un anneau complet, alors, d'après 3.1., A est un Q-anneau ;

2 - Si A n'est pas complet, il résulte de ce qui précède que $\hat{A}$ est un Q-anneau dès que $\hat{A}$ est réduit. Ceci se produit par exemple lorsque l'anneau A est excellent ([3] 7.8.2.) ; cependant même dans ce cas il peut arriver que A ne soit pas un Q-anneau comme le montre l'exemple suivant .

3 - Soit B l'anneau $\mathbb{C}[X,Y]$ et soit $p = X(X^2+Y^2)+X^2-Y^2$, l'idéal principal p^B est premier dans B ; l'idéal $r = XB + YB$ est maximal dans B et l'anneau $A = (B/pB)r/pB$ est local, intègre et de dimension 1. Le complété $\hat{A}$ de A pour la topologie R(A)-adique s'identifie au complété de B/pB pour la topologie r/pB-adi-adique i.e. à $\hat{B}/p\hat{B}$ où $\hat{B} = \mathbb{C}[[X,Y]]$. L'anneau A est excellent d'après [3](7.8.3 (ii) et (iii)). L'anneau $\hat{A} = \hat{B}/p\hat{B}$ n'est pas intègre car dans $\hat{B}$ on peut écrire les relations

$$p = (X-1)Y^2+X^2(X+1) = (X-1)(Y^2-X^2(X+1)(1+X+X^2+\dots)).$$

Il résulte donc de 2.7 que A n'est pas un Q-anneau,bien que $\hat{A}$ soit un Q-anneau d'après la remarque précédente. En particulier le corollaire 3.2, n'admet pas de réciproque.

4 - D'après I. 3.3,un anneau de valuation discrète est un Q-anneau. Donnons maintenant un exemple de Q-anneau local intègre et de dimension 1 qui n'est pas un anneau de valuation discrète. Soit K un corps de caractéristique différente de 2 et soit $p = X^2-Y^3 \in K[X,Y] = B$. Le polynôme p est premier dans B et est même un élément premier de l'anneau $K[[X,Y]]$ ([0] chapitre 3, §2 exercice 2). Prenons pour A le localisé en (XB+YB)/pB de B/pB. L'anneau A est local intègre et de dimension 1 et le complété R(A)-adique de A s'identifie à $\hat{B}/p\hat{B}$ où $\hat{B} = K[[X,Y]]$. Comme p est premier dans $\hat{B}$,l'anneau $\hat{A} = \hat{B}/p\hat{B}$ est intègre et A est un Q-anneau d'après 2.1.

Il reste à voir que A n'est pas un anneau de valuation discrète. Pour cela, on montre que A n'est pas intégralement clos. Soient x et y les images canoniques de X et Y dans A. Dans le corps des fractions de A, on a la relation $\frac{x^2}{y^2} - y = 0$ qui montre que $\frac{x}{y}$ est entier sur A ; de plus $\frac{x}{y} \notin A$ comme on peut le montrer aisément et, par conséquent, A n'est pas intégralement clos.

5 - Soient B un anneau commutatif et E un B-module; on note A l'anneau obtenu par extension triviale de B par E, i.e. le groupe + de A est $B \times E$ et, pour $a,a' \in B$ et $x,x' \in E$, on pose :

$$(a,x)(a',x') = (aa',a'x + ax').$$

L'anneau A est alors commutatif avec (1,0) comme unité. On a alors le résultat suivant :

Si B est un anneau local intègre de dimension 1 de radical $\mathfrak{m}$ et complet pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique et si $E = E_B(B/\mathfrak{m})$, alors l'anneau A extension triviale de B par E est un Q-anneau presque frobénusien qui n'est pas noethérien et tel que $A/\mathcal{R}(A)$ soit un corps.

6 - Dans tous les exemples précédents, les anneaux considérés sont tels que toute chaîne d'idéaux premiers a au plus deux éléments.
Comme un anneau de valuation commutatif est un C1-anneau (I.3.3), il existe des C1-anneaux (en général non noethériens) dont les chaînes d'idéaux premiers ont un nombre arbitrairement grand, voire une infinité, d'éléments.

BIBLIOGRAPHIE.

[0] N. BOURBAKI, *Algèbre commutative,* chapitres 3 et 4, Hermann (1961).

[1] J.H. COZZENS, *Homological properties of the rings of differential polynomial* Bull. Amer. Math. Soc. 76, 1 (1970) p. 75-79 ;

[2] K.R. FULLER, *On direct representations of quasi injectives and quasi projectives* , Arch. Math. XX (1969) p. 495-502.

[3] A. GROTHENDIECK, *Eléments de géométrie algébrique,* IV, (seconde partie), Publications Mathématiques de l'I.H.E.S. n° 24 (1965).

[4] E. MATLIS, *Injective modules over noetherian rings*, Pac. J. Math. 8 (1958) p. 511-528.

[5] G. RENAULT, *Sur les anneaux tels que tout produit de copies d'un module quasi-injectif soit quasi-injectif*, Comptes rendus Ac. Sc. 271, p. 12-15.

[6] C. TISSERON, *Quelques propriétés des modules quasi-injectifs*, Comptes rendus Ac. Sc. 268, p. 1377-1380.

[7] C. TISSERON, *Sur les anneaux tels que tout produit de copies d'un module quasi-injectif soit quasi-injectif* , (A paraître aux Annali di matematica pura e applicata).

C. TISSERON

Département de Mathématiques
Université Claude Bernard
43, bd du 11 novembre 1918
69621 - VILLEURBANNE