

C. TISSERON

Sur deux classes d'anneaux

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1973, tome 10, fascicule 1
, p. 47-61

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1973__10_1_47_0

© Université de Lyon, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR DEUX CLASSES D'ANNEAUX

par Claude TISSERON

Ce texte constitue un résumé; les démonstrations seront publiées dans [7].

I - INTRODUCTION.

Sauf mention du contraire, tous les modules considérés sont des modules à gauche; idéal signifie idéal à gauche, noethérien signifie noethérien à gauche etc.

Soit A un anneau et M un A -module; M est quasi-injectif si, pour tout sous-module N de M , tout morphisme de N dans M se prolonge à M . On dit que M est Π -quasi-injectif si tout produit de copies de M est un module quasi-injectif.

Soit M un A -module et soit X une partie de A ; on pose $r_M(X) = \{x \in M : Xx = 0\}$; on désigne par $\ell_A(M)$ ou $\ell(M)$ l'annulateur de M et par $E_A(M)$ ou $E(M)$ l'enveloppe injective de M . On a le résultat suivant qui caractérise les modules Π -quasi-injectifs.

1. PROPOSITION ([2] et [6]). *Pour un A -module M les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) M est Π -quasi-injectif ;
- (b) M est un $A/\ell(M)$ module injectif ;
- (c) $M = r_{E(M)}(\ell(M))$.

En particulier, tout module Π -quasi-injectif et fidèle (i.e. dont l'annulateur est nul) est injectif.

On étudie ici les anneaux, introduits dans [2], tels que tout module quasi-injectif est Π -quasi-injectif. Un tel anneau est appelé un Q -anneau (à gauche).

L'étude des Q -anneaux introduit une notion plus générale, celle de $C1$ anneaux ; les $C1$ anneaux ayant en commun avec les Q -anneaux un certain nombre de propriétés, nous étudions simultanément ces deux notions. On définit maintenant les $C1$ anneaux.

Soient A un anneau et $T(A)$ un ensemble de représentants des types de A -modules simples, on désigne toujours par E l'enveloppe injective du A -module $\bigoplus_{S \in T(A)} S$. Le module E est un cogénérateur injectif de la catégorie $\text{Mod } A$ des A -modules à gauche et E est contenu, à un isomorphisme près, dans tout cogénérateur injectif de $\text{Mod } A$. On dira par abus de langage que E est le cogénérateur minimal de $\text{Mod } A$.

2. DEFINITION. - Si tout sous- A -module quasi-injectif de E est Π -quasi-injectif, on dit que A est un $C1$ anneau (à gauche).

Il revient au même dire que, pour tout sous-module quasi-injectif M de E , on a $M = r_{E(M)}(\ell(M))$. Comme E est un cogénérateur, on a $\mathcal{A} = \ell(r_E(\mathcal{A}))$ pour tout idéal à gauche \mathcal{A} de A et on voit apparaître une certaine "symétrie" entre les idéaux de A et les sous-modules quasi-injectifs de E qui sera précisée ultérieurement.

Pour terminer, donnons quelques exemples de Q -anneaux et de $C1$ anneaux.

3. EXEMPLES. -

- (1) Il résulte de [2] ou de [6] que tout anneau artinien est un Q -anneau.
- (2) Soit A un anneau commutatif noethérien local et complet pour la topologie définie par son radical, il résulte de [4] que A est un $C1$ anneau.
- (3) Soit A un anneau dans lequel les idéaux (à gauche) forment une chaîne; montrons que A est un $C1$ anneau. Pour cela, on montre plus généralement que sur un tel anneau tout module quasi-injectif à socle essentiel est Π -quasi-injectif.

Soit M un A -module quasi-injectif dont le socle est essentiel; montrons que $M = r_{E(M)}(\ell(M))$. On a toujours $M \subset r_{E(M)}(\ell(M))$. Soit $y \in E(M)$ tel que $\ell(M)y = 0$. Montrons que $y \in M$. Si $\ell(M) = \text{Ann}(y)$, alors $A/\ell(M) \simeq Ay$ a un socle non nul et il existe un idéal \mathcal{A} de A tel que $\mathcal{A}/\ell(M)$ soit simple. Comme $\ell(M) = \bigcap_{x \in M} \text{Ann}(x)$, on voit aisément qu'il existe $x \in M$ tel que $\text{Ann}(x) = \ell(M) = \text{Ann}(y)$. Si $\ell(M) \subsetneq \text{Ann}(y)$, alors il existe $x \in M$ tel que $\text{Ann}(x) \subset \text{Ann}(y)$ car, sinon, on aurait $\ell(M) \subsetneq \text{Ann}(y) \subset \bigcap_{x \in M} \text{Ann}(x)$, ce qui est absurde. Dans tous les cas il existe $x \in M$ tel que $\text{Ann}(x) \subset \text{Ann}(y)$; on a alors un morphisme $u : E(M) \rightarrow E(M)$ tel que $u(x) = y$; comme M est quasi-injectif, on a $u(M) \subset M$ et $y = u(x) \in M$.

II - PREMIERES PROPRIETES.

Les Q -anneaux et les $C1$ anneaux ont en commun les propriétés de stabilités suivantes.

1. PROPOSITION. -

- (a) *Tout produit fini de Q -anneaux (resp. de $C1$ anneaux) est un Q -anneau (resp. un $C1$ anneau) ;*
- (b) *Soit $f : A \rightarrow B$ un épimorphisme d'anneaux surjectif ou tel que B soit un A -module à droite plat, alors :*
 - (i) *Si A est un Q -anneau, B est aussi un Q -anneau ;*
 - (ii) *Si A est un $C1$ anneau et si pour tout B -module simple S le A -module $f_*(S)$ obtenu par restriction est simple, B est un $C1$ anneau.*
- (c) *A est un Q -anneau (resp. un $C1$ anneau) si et seulement si pour tout entier n l'anneau $M_n(A)$ des matrices d'ordre n est un Q -anneau (resp. un $C1$ anneau).*

2. PREMIERE CARACTERISATION DES $C1$ ANNEAUX.

Donnons d'abord deux propriétés des $C1$ anneaux.

2.1. PROPOSITION. - Soit A un C1 anneau noethérien; alors tout A -module quasi-injectif dont le socle est essentiel est Π -quasi-injectif.

2.2 PROPOSITION. - Soit A un C1 anneau tel que $\bigcap_{n \geq 1} \mathcal{R}(A)^n = 0$, alors pour tout élément x du cogénérateur minimal E il existe n tel que $\mathcal{R}(A)^n x = 0$.

Disons maintenant qu'un module simple S est attaché à un module M s'il existe des sous-modules N' et N de M tels que $N' \subset N \subset M$ et $N/N' \simeq S$. On a alors la caractérisation suivante :

2.3. PROPOSITION. -

(a) Soit A un C1 anneau, alors A vérifie la condition (i) suivante :

(i) Les correspondances $\alpha \mapsto r_E(\alpha)$ et $M \mapsto l(M)$ sont des bijections réciproques entre l'ensemble des idéaux bilatères de A contenus dans $\mathcal{R}(A)$ et l'ensemble des sous-modules quasi-injectifs et essentiels de E .

(b) Considérons les conditions suivantes :

(ii) Pour tout module S simple, S est le seul module simple attaché à $E(S)$;

(iii) Le module $\bigoplus_{S \in T(A)} E(S)$ est injectif (et coïncide alors avec E).

Si A vérifie les conditions (i), (ii) et (iii) alors A est un C1 anneau.

2.4. REMARQUES. - Les conditions (ii) et (iii) sont toujours vérifiées pour un anneau noethérien commutatif. La condition (ii) est vérifiée dès que tous les A -modules simples sont injectifs, i.e. lorsque A est un V -anneau et ceci nous amène à étudier les liens entre les C1 anneaux et les V -anneaux, ce qui est fait entre autre dans le numéro suivant.

3. C1 ANNEAUX ET Q ANNEAUX SANS RADICAUX.

Il est immédiat de vérifier qu'un anneau A sans radical est un C1 anneau si et seulement si A est un V -anneau tel que le module $\bigoplus_{S \in T(A)} S$ soit injectif.

On a le premier résultat suivant.

3.1. PROPOSITION (RENAULT). - Soit A un C1 anneau sans radical; alors $A = \prod_{i=1}^n V_i$ où pour $1 \leq i \leq n$ V_i est un C1 anneau sans radical dont le centre est un corps.

Si on suppose de plus que A est noethérien, on a le résultat plus précis suivant :

3.2. PROPOSITION. - Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) A est un C1 anneau noethérien sans radical ;
- (b) A est un V-anneau noethérien ;
- (c) A est produit fini de V-anneaux noethériens quasi-simples ;
- (d) Tout A -module semi-simple est injectif.

Pour les Q-anneaux on a un résultat semblable, à savoir :

3.3. PROPOSITION. - Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) A est un Q-anneau sans radical ;
- (b) A est un Q-anneau sans radical noethérien ;
- (c) A est produit fini d'anneau V_i $1 \leq i \leq n$ tels que B_i est un V-anneau noethérien, quasi-simple, tel que tout B_i -module quasi-injectif est injectif ;
- (d) Tout A -module quasi-injectif est injectif.

Ce résultat est pour l'essentiel dû à RENAULT [5].

3.4. REMARQUE. - En utilisant un anneau introduit par COZZENS [1] , on peut montrer qu'il existe un V-anneau à droite quasi-simple A tel que tout A -module à droite quasi-injectif soit injectif et vérifiant de plus les conditions suivantes :

- A est sans diviseurs de 0, principal à gauche et à droite.
- Tous les A -modules à droite simples sont isomorphes.

Il est facile de voir que le socle à droite d'un tel anneau est nul. Ceci peut d'ailleurs se généraliser de la façon suivante :

3.5. PROPOSITION. - Un \mathbb{Q} -anneau (resp. un C1 anneau) réduit A est produit direct d'un produit fini de corps et d'un \mathbb{Q} -anneau (resp. un C1 anneau) réduit à socle nul.

4. CARACTERES NOETHERIENS DES \mathbb{Q} -ANNEAUX.

Il résulte de 3.3 qu'un \mathbb{Q} -anneau A tel que $\mathcal{R}(A) = 0$ est noethérien ; on a un résultat plus fort lorsque $A/\mathcal{R}(A)$ est semi-simple et artinien (ce qui se produit lorsque A est un \mathbb{Q} -anneau commutatif).

4.1. PROPOSITION (RENAULT [5]). -

1. Soit A un \mathbb{Q} -anneau tel que $A/\mathcal{R}(A)$ soit semi-simple et artinien ; alors si $X = \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{R}(A)^n$, l'anneau A/X est noethérien.
2. Un \mathbb{Q} -anneau parfait à gauche ou parfait à droite est artinien (à gauche).

Cette seconde assertion permet aisément de montrer que, si A est un \mathbb{Q} -anneau tel que $A/\mathcal{R}(A)$ soit semi-simple et artinien, alors pour tout entier n l'anneau $A/\mathcal{R}(A)^n$ est artinien. Ceci montre que, si A est un \mathbb{Q} -anneau tel que $A/\mathcal{R}(A)$ soit artinien, alors l'anneau $B = A/X$ où $X = \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{R}(A)^n$ est un \mathbb{Q} -anneau noethérien dont la topologie $\mathcal{R}(B)$ -adique est artinienne et séparée. On peut démontrer que le complété de B pour la topologie $\mathcal{R}(B)$ -adique se comporte à peu près comme dans le cas commutatif. C'est ce qu'on va voir maintenant avec des hypothèses un peu plus générales.

III - \mathbb{Q} -ANNEAUX ET C1 ANNEAUX NOETHERIENS SEMI-LOCAUX.

On suppose maintenant toujours que les anneaux sont noethériens. Soit A un anneau; on dit que A est *quasi-local* si les conditions suivantes sont vérifiées :

(a) A est noethérien.

(b) $\bigcap_{n \geq 1} \mathcal{R}(A)^n = 0$;

(c) $A/\mathcal{R}(A)$ est un anneau quasi-simple (i.e. 0 et A sont les seuls idéaux bilatères).

Si A vérifie les conditions (a), (b) et (c), $A/\mathcal{R}(A)$ est semi-simple et artinien, on dit que A est *semi-local*; si de plus $A/\mathcal{R}(A)$ est simple et artinien, on dit que A est *local*.

Si A est un \mathcal{Q} -anneau tel que $A/\mathcal{R}(A)$ soit artinien, alors A/X , où $X = \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{R}(A)^n$, est un \mathcal{Q} -anneau semi-local.

1. COMPLETE D'UN C1 ANNEAU SEMI-LOCAL.

Soit \mathfrak{p} un idéal bilatère de A . et soit \mathcal{C} la sous-catégorie pleine de $\text{Mod } A$ ayant pour objets les modules M tels que $\forall x \in M \exists n \mathfrak{p}^n x = 0$.

Soit $T_{\mathcal{C}} N$ la topologie linéaire sur N pour laquelle N' est ouvert dans N si $N/N' \in \mathcal{C}$. On a alors le lemme suivant :

1.1. LEMME. - Soit A un C1 anneau noethérien, soit \mathfrak{p} un idéal bilatère de A tel que $\bigcap_{n \geq 1} \mathfrak{p}^n = 0$ et tel que pour tout n A/\mathfrak{p}^n est un anneau artinien, alors A vérifie la condition suivante :

(R_p) . Pour tout module M et tout sous-module N de M la topologie $T_{\mathcal{C}} N$ est induite par la topologie $T_{\mathcal{C}} M$.

En utilisant la condition (R_p) , on peut réécrire les démonstrations du cas commutatif et montrer le :

1.2. THEOREME. - Soit A un C1 anneau semi-local, soit \mathfrak{p} un idéal bilatère de A contenant $\mathcal{R}(A)$ et tel que $\bigcap_{n \geq 1} \mathfrak{p}^n = 0$. Soit \hat{A} (resp. \hat{M}) le séparé complété de A (resp. d'un A -module M) pour la topologie \mathfrak{p} -adique. Alors :

- 1) Pour tout A -module de type fini M le morphisme canonique $\hat{A} \otimes_A M \rightarrow \hat{M}$ est un isomorphisme ;
- 2) \hat{A} est un A -module à droite plat ;
- 3) Si $\mathfrak{p} = \mathcal{R}(A)$ alors \hat{A} est de plus fidèlement plat.

On peut aussi montrer que $\hat{\mathfrak{p}} = \mathcal{R}(\hat{A})$ et que la topologie de A est la topologie $\mathcal{R}(\hat{A})$ -adique.

2. Q-ANNEAUX NOETHERIENS QUASI-LOCAUX.

Commençons par énoncer deux lemmes dont le premier est en partie connu.

- 2.1. LEMME. - Soit \mathfrak{p} un idéal premier d'un anneau A , alors il existe un injectif indécomposable F tel que
 - (a) $\text{Ass}(F) = \{\mathfrak{p}\}$ et $E(A/\mathfrak{p}) \simeq F^n$;
 - (b) le module $Q = r_F(\mathfrak{p})$ n'a pas de sous-module quasi-injectif propre non nul.

Ici $\text{Ass}(M)$ désigne l'ensemble des idéaux premiers associés à un A -module M , ce qui a un sens puisque A est noethérien.

- 2.2. LEMME. - Soit F un A -module injectif indécomposable tel que $\text{Ass}(F) = \{\mathfrak{p}\}$. Si F n'a pas de sous-module quasi-injectif propre non nul, alors $\mathfrak{p} = \mathfrak{l}(F)$ et \mathfrak{p} est premier minimal.

Grâce à ces lemmes on peut montrer les propriétés suivantes :

- 2.3. PROPOSITION. - Soit A un Q -anneau tel que $\bigcap_{n \geq 1} \mathcal{R}(A)^n = 0$ alors :
 - (a) A vérifie la condition (C_0) suivante :

(C_0) pour tout idéal premier minimal et non maximal \mathfrak{p} tout injectif indécomposable F tel que $\text{Ass}(F) = \{\mathfrak{p}\}$ n'a pas de sous-module quasi-injectif propre non nul ;

(b) tout idéal premier de A non maximal est un idéal premier minimal.

Désignons par ϕ_A l'application de l'ensemble des types de A -modules injectifs indécomposables sur l'ensemble des idéaux premiers de A définie par $\phi_A(F) = \wp$ où $\text{Ass}(F) = \{\wp\}$

2.4. THEOREME. - Soit A un anneau local tel que la correspondance ϕ_A soit bijective alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) A est un \mathcal{Q} -anneau ;

(b) A est un $C1$ -anneau et vérifie la condition suivante :

Pour tout idéal premier $\wp \neq \mathcal{R}(A)$ l'anneau total des fractions à gauche de l'anneau A/\wp coïncide avec $E_A(A/\wp)$.

2.5. REMARQUE. - Il existe des anneaux tels que ϕ_A ne soit pas bijective et qui sont cependant des \mathcal{Q} -anneaux.

Donnons maintenant des propositions qui fournissent des exemples de \mathcal{Q} -anneaux.

3. D'AUTRES EXEMPLES DE \mathcal{Q} -ANNEAUX.

3.1. PROPOSITION. - Soit A un anneau sans diviseur de 0, local, dont le radical est un idéal à gauche principal et tel que A/\mathcal{M} soit un corps; alors A est un \mathcal{Q} -anneau.

3.2. PROPOSITION. - Soit A un anneau local sans diviseur de 0 dont tout idéal à gauche (resp. tout idéal à droite) est principal, alors A est un \mathcal{Q} -anneau.

3.3. COROLLAIRE. - Soit A un anneau de DEDEKIND premier, borné à gauche et à droite; alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) A est un \mathcal{Q} -anneau ;

(b) A est un $C1$ -anneau ;

(c) A est local.

Pour démontrer ce corollaire on a besoin du lemme suivant :

3.4. LEMME. - Soit A un C_1 -anneau noethérien; alors A est quasi-local dès que l'une des conditions suivantes est vérifiée :

(1) Pour tout idéal bilatère maximal \mathfrak{p} on a $\bigcap_{n \geq 1} \mathfrak{p}^n = 0$;

(2) A est premier et il existe un idéal bilatère maximal \mathfrak{p} tel que $\bigcap_{n \geq 1} \mathfrak{p}^n = 0$.

Il résulte aisément de ce lemme le corollaire suivant :

3.5. COROLLAIRE. - Soit A un C_1 -anneau noethérien commutatif ; alors pour tout idéal premier \mathfrak{p} de A l'anneau A/\mathfrak{p} est local.

IV - \mathcal{Q} -ANNEAUX ET C_1 -ANNEAUX NOETHERIENS COMMUTATIFS.

On suppose maintenant que tous les anneaux sont noethériens et commutatifs. D'après II.3.2, un C_1 -anneau noethérien commutatif est semi-local et, pour l'étude des C_1 -anneaux et des \mathcal{Q} -anneaux noethériens commutatifs, on peut donc toujours supposer les anneaux semi-locaux.

Soit donc A un anneau semi-local ayant pour idéaux maximaux $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_n$, soit \hat{A} le complété (séparé) de A pour la topologie $\mathcal{R}(A)$ -adique et soit E le cogénérateur minimal de $\text{Mod } A$, i.e. $E = \bigoplus_{i=1}^n E(A/\mathfrak{M}_i)$. Il est facile de montrer que E est un \hat{A} -module et que E est le cogénérateur minimal de $\text{Mod } \hat{A}$; de plus on voit aisément que $\hat{A} \cong \text{End}_A(E)$ en utilisant les résultats de [4].

1. CARACTERISATION DES C_1 -ANNEAUX.

1.1. PROPOSITION. - Avec les notations précédentes pour tout sous- A -module N de E on a $N = r_E(\mathcal{L}_A(N))$.

1.2. THEOREME. - Soit A un anneau semi-local, les assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) A est un C1-anneau ;
- (b) pour tout sous-module N de E on a $N = r_E(\mathfrak{L}_A(N))$;
- (c) pour tout idéal α de \hat{A} on a $\alpha = (\alpha \cap A)\hat{A}$.

1.3. COROLLAIRE. - Si A est un C1-anneau, alors $\alpha \rightarrow \hat{\alpha} = \alpha A$ est une bijection entre l'ensemble des idéaux de A et l'ensemble des idéaux de \hat{A} , qui conserve les idéaux premiers.

1.4. COROLLAIRE. - Si A est un C1-anneau réduit, alors \hat{A} est un anneau réduit.

Il est facile de montrer avec 1.3 que, si A est un C1-anneau, alors A est produit fini d'anneaux locaux ; mais on peut montrer ceci comme un corollaire du résultat plus général suivant en utilisant 3.5.

1.5. PROPOSITION. - Soit A un anneau noethérien; si pour tout idéal premier ρ l'anneau A/ρ est local, alors A est produit fini d'anneaux locaux.

1.6. COROLLAIRE. - Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) A est un C1-anneau (noethérien commutatif) ;
- (b) A est produit fini d'anneaux locaux A_i ($1 \leq i \leq n$) tels que tout idéal α de A_i vérifie la relation $\alpha = (\alpha \cap A_i)\hat{A}_i$.

2. C1-ANNEAUX LOCAUX INTEGRES.

2.1. PROPOSITION. - Pour un anneau local intègre de dimension 1 il y a équivalence entre :

- (a) A est un Q-anneau ;
- (b) A est un C1-anneau ;
- (c) le complété \hat{A} de A est intègre.

2.2. PROPOSITION. - Pour un anneau local intègre, il y a équivalence entre

(a) A est un C1-anneau ;

(b) pour tout $x \in \hat{A}$ il existe $y \in \hat{A}$ tel que y est inversible dans \hat{A} et $yx \in A$.

2.3. COROLLAIRE. - Soit A un C1-anneau local, alors pour tout idéal premier ρ de A l'anneau $\hat{A}_{\rho}(A_{\rho} / \rho A_{\rho})$ est un corps.

Ce corollaire est dû à Michel RAYNAUD; on ne sait pas si cette condition caractérise les C1-anneaux.

3. Q-ANNEAUX NOETHERIENS COMMUTATIFS.

Pour un Q-anneau, les résultats de 2 et de III. 2.4. deviennent :

3.1. THEOREME. - Pour un anneau semi-local, il y a équivalence entre :

(a) A est un Q-anneau ;

(b) A vérifie les conditions suivantes :

(i) tout idéal premier minimal et non maximal est dans la décomposition primaire de 0 dans A ;

(ii) $\dim_K(A) \leq 1$;

(iii) pour tout idéal α de \hat{A} on a $\alpha = (\alpha \cap A)\hat{A}$;

(c) A est produit fini d'anneaux locaux A_i qui vérifient l'analogue des conditions (i) à (iii).

3.2. COROLLAIRE. - Si A est un Q-anneau alors \hat{A} est un Q-anneau.

La réciproque de ce corollaire est fautive comme on va le voir dans les exemples suivants.

3.3. EXEMPLES ET REMARQUES. - Soit A un anneau semi-local de dimension 1 et réduit, soit R le radical de A et soit \hat{A} le complété R -adique de A .

1 - Si A est un anneau complet, alors, d'après 3.1., A est un Q-anneau ;

2 - Si A n'est pas complet, il résulte de ce qui précède que \hat{A} est un \mathbb{Q} -anneau dès que \hat{A} est réduit. Ceci se produit par exemple lorsque l'anneau A est excellent ([3] 7.8.2.) ; cependant même dans ce cas il peut arriver que A ne soit pas un \mathbb{Q} -anneau comme le montre l'exemple suivant .

3 - Soit B l'anneau $\mathbb{C}[X,Y]$ et soit $p = X(X^2+Y^2)+X^2-Y^2$, l'idéal principal \mathfrak{p}^B est premier dans B ; l'idéal $r = XB + YB$ est maximal dans B et l'anneau $A = (B/\mathfrak{p}B)r/\mathfrak{p}B$ est local, intègre et de dimension 1. Le complété \hat{A} de A pour la topologie $R(A)$ -adique s'identifie au complété de $B/\mathfrak{p}B$ pour la topologie $r/\mathfrak{p}B$ -adique i.e. à $\hat{B}/\hat{\mathfrak{p}}B$ où $\hat{B} = \mathbb{C}[[X,Y]]$. L'anneau A est excellent d'après [3](7.8.3 (ii) et (iii)). L'anneau $\hat{A} = \hat{B}/\hat{\mathfrak{p}}B$ n'est pas intègre car dans \hat{B} on peut écrire les relations

$$p = (X-1)Y^2+X^2(X+1) = (X-1)(Y^2-X^2(X+1)(1+X+X^2+\dots)).$$

Il résulte donc de 2.7 que A n'est pas un \mathbb{Q} -anneau, bien que \hat{A} soit un \mathbb{Q} -anneau d'après la remarque précédente. En particulier le corollaire 3.2, n'admet pas de réciproque.

4 - D'après I. 3.3, un anneau de valuation discrète est un \mathbb{Q} -anneau. Donnons maintenant un exemple de \mathbb{Q} -anneau local intègre et de dimension 1 qui n'est pas un anneau de valuation discrète. Soit K un corps de caractéristique différente de 2 et soit $p = X^2-Y^3 \in K[X,Y] = B$. Le polynôme p est premier dans B et est même un élément premier de l'anneau $K[[X,Y]]$ ([0] chapitre 3, §2 exercice 2). Prenons pour A le localisé en $(XB+YB)/\mathfrak{p}B$ de $B/\mathfrak{p}B$. L'anneau A est local intègre et de dimension 1 et le complété $R(A)$ -adique de A s'identifie à $\hat{B}/\hat{\mathfrak{p}}B$ où $\hat{B} = K[[X,Y]]$. Comme p est premier dans \hat{B} , l'anneau $\hat{A} = \hat{B}/\hat{\mathfrak{p}}B$ est intègre et A est un \mathbb{Q} -anneau d'après 2.1.

Il reste à voir que A n'est pas un anneau de valuation discrète. Pour cela, on montre que A n'est pas intégralement clos. Soient x et y les images canoniques

de X et Y dans A . Dans le corps des fractions de A , on a la relation $\frac{x^2}{y^2} - y = 0$ qui montre que $\frac{x}{y}$ est entier sur A ; de plus $\frac{x}{y} \notin A$ comme on peut le montrer aisément et, par conséquent, A n'est pas intégralement clos.

5 - Soient B un anneau commutatif et E un B -module; on note A l'anneau obtenu par extension triviale de B par E , i.e. le groupe $+$ de A est $B \times E$ et, pour $a, a' \in B$ et $x, x' \in E$, on pose :

$$(a, x)(a', x') = (aa', a'x + ax').$$

L'anneau A est alors commutatif avec $(1, 0)$ comme unité. On a alors le résultat suivant :

Si B est un anneau local intègre de dimension 1 de radical \mathcal{M} et complet pour la topologie \mathcal{M} -adique et si $E = E_B(B/\mathcal{M})$, alors l'anneau A extension triviale de B par E est un \mathcal{Q} -anneau presque frobénusien qui n'est pas noethérien et tel que $A/\mathcal{A}(A)$ soit un corps.

6 - Dans tous les exemples précédents, les anneaux considérés sont tels que toute chaîne d'idéaux premiers a au plus deux éléments.

Comme un anneau de valuation commutatif est un C_1 -anneau (I.3.3), il existe des C_1 -anneaux (en général non noethériens) dont les chaînes d'idéaux premiers ont un nombre arbitrairement grand, voire une infinité, d'éléments.

BIBLIOGRAPHIE.

- [0] N. BOURBAKI, *Algèbre commutative*, chapitres 3 et 4, Hermann (1961).
- [1] J.H. COZZENS, *Homological properties of the rings of differential polynomial* Bull. Amer. Math. Soc. 76, 1 (1970) p. 75-79 ;
- [2] K.R. FULLER, *On direct representations of quasi injectives and quasi projectives*, Arch. Math. XX (1969) p. 495-502.
- [3] A. GROTHENDIECK, *Eléments de géométrie algébrique*, IV, (seconde partie), Publications Mathématiques de l'I.H.E.S. n° 24 (1965).

- [4] E. MATLIS, *Injective modules over noetherian rings*, Pac. J. Math. 8 (1958) p. 511-528.
- [5] G. RENAULT, *Sur les anneaux tels que tout produit de copies d'un module quasi-injectif soit quasi-injectif*, Comptes rendus Ac. Sc. 271, p. 12-15.
- [6] C. TISSERON, *Quelques propriétés des modules quasi-injectifs*, Comptes rendus Ac. Sc. 268, p. 1377-1380.
- [7] C. TISSERON, *Sur les anneaux tels que tout produit de copies d'un module quasi-injectif soit quasi-injectif*, (A paraître aux Annali di matematica pura e applicata).

C. TISSERON

Département de Mathématiques
Université Claude Bernard
43, bd du 11 novembre 1918
69621 - VILLEURBANNE