PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

PAUL-JEAN CAHEN

Premiers, copremiers et fibrés

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1973, tome 10, fascicule 1
, p. 9-24
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1973__10_1_9_0>

© Université de Lyon, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1973 t. 10-1

PREMIERS, COPREMIERS ET FIBRES .

par Paul-Jean CAHEN

RESUME.

On montre que sur un anneau noéthérien (à gauche), les premiers de Goldman sont aussi les éléments premiers dans l'ensemble des théories de torsion, au sens de la théorie des treillis, pour l'opération d'intersection. On définit les copremiers comme étant les éléments premiers pour l'opération d'union. Sur un anneau commutatif, un premier est la plus grande théorie faisant d'un corps résiduel un module sans torsion, un copremier est la plus petite faisant d'un corps résiduel un module de torsion. Mais, en général, il n'y a pas bijection entre les premiers et les copremiers ; une condition pour cette bijection est que les premiers soient fortement premiers. Dans le cas d'un anneau non noéthérien, considéré comme algèbre sur un anneau commutatif, on montre que l'ensemble des premiers de Goldman est la réunion de ses fibres, chacune se retrouvant dans le tensorisé par un corps résiduel de l'anneau de base. On peut en conclure qu'une algèbre finie sur un anneau commutatif satisfait à la bijection entre premiers et copremiers.

A. PREMIERS ET COPREMIERS SUR UN ANNEAU NOETHERIEN.

Dans cette première partie, R désigne un anneau unitaire et noéthérien (à gauche) Une théorie de torsion λ sur R, est pour nous une théorie héréditaire dans la catégorie R-Mod des R-modules à gauche ; elle est définie aussi bien par :

- la classe $\mathcal{T}_\lambda$ des modules de λ-torsion,
- la classe $\mathcal{F}_\lambda$ des modules λ-libres,
- le radical de torsion qui associe à chaque module M son sous-module de torsion $\lambda(M)$,
- La localisation qui associe à chaque module M le localisé M_λ.

Les théories de torsion sur R forment un ensemble partiellement ordonné :

une théorie est dite plus large qu'une autre si elle possède d'avantage de modules de torsion. Cet ensemble est même un treillis complet : à une famille $(\lambda)_{i\in I}$ de théories est associé un infimum $\Lambda_{i\in I}\lambda_i$, dont les modules de torsion sont ceux de la classe intersection $\bigcap_{i\in I}\mathcal{T}_{\lambda_i}$ et un supremum $\vee_{i\in I}\lambda_i$, dont les modules libres sont ceux de la classe $\bigcap_{i\in I}\mathcal{F}_{\lambda_i}$.

Si M est un R-module, on note $\chi(M)$ la plus large des théories faisant de M un module libre. On utilise la notion de premier due à Goldman ([5]§6). Il y a bijection entre les premiers et les classes d'isomorphismes de modules injectifs indécomposables : à un tel module E correspond le premier $\chi(E)$.

De même on note $\xi(M)$ la plus petite théorie faisant de M un module de torsion. On dit qu'une théorie est propre si un module au moins n'est pas de torsion, non triviale si un module au moins n'est pas libre.

On note R-Spec l'ensemble des premiers de R, enfin on note E(M) l'enveloppe injective d'un module M et Ann(x) l'annulateur d'un élément x.

1 - IDEAUX CRITIQUES, PREMIERS.

DEFINITION 1. 1. - *Soit* λ *une théorie de torsion ; on dit qu'un idéal* I *est* λ*-critique si* R/I *est* λ*-libre et si* R/J *est un module de* λ*-torsion pour tout idéal* J *contenant strictement* I.

En d'autres termes, I est maximal parmi les idéaux tels que R/I ne soit pas de torsion ; si λ est propre, il y a donc nécéssairement des idéaux λ-critiques.

Si I est un idéal λ-critique, comme $\chi(R/I) \geqslant \lambda$, alors I est aussi $\chi(R/I)$-critique, la théorie de torsion $\chi(R/I)$ est un premier et I est un idéal "critique" ([8] § 2). Un idéal peut donc être critique pour deux théories distinctes ; par contre on sait qu'il y a bijection entre premiers et classes d'équivalences d'idéaux critiques ; en particulier un idéal ne peut être critique pour deux premiers distincts :

LEMME 1.2. - *Si* τ *est premier et si* I *est* τ*-critique alors* $\tau = \chi(R/I)$.

Preuve. Soit E le module injectif tel que $\tau = \chi(E)$, comme R/I est libre, il y a une flèche non nulle $f : R/I \to E$; comme E est libre pour τ mais que R/J est un module de torsion pour tout idéal J contenant I, alors f est injective et, comme E est indécomposable, c'est une extension essentielle de R/I et donc $\tau = \chi(R/I) = \chi(E)$.

DEFINITION 1.3. - *On dit qu'un premier* τ *est essentiel pour* λ *si* $\tau = \chi(R/I)$ *et que* I *est* λ*-critique. On note* $\mathbb{E}_\lambda$ *l'ensemble des idéaux premiers essentiels pour* λ

Si λ est propre, $\mathbb{E}_\lambda$ n'est pas vide.

PROPOSITION 1.4. - *Si* τ *est essentiel pour* λ*, alors* τ *est minimal parmi les premiers plus larges que* λ.

Preuve. Si I est λ-critique, si $\tau = \chi(R/I)$ et si un premier τ' est tel que $\tau \geq \tau' \geq \lambda$, alors R/I est encore sans torsion pour τ' (plus petit que τ) ; mais pour tout J contenant I, R/J est encore de torsion pour τ' (plus large que λ) ; ainsi I est aussi τ'-critique et donc $\tau' = \tau$.

THEOREME 1.5. (J. Raynaud [10]) - *Si* λ *est propre alors* $\lambda = \Lambda_{\tau \in \mathbb{E}_\tau} \tau$. *Si pour un autre ensemble de premiers* K *on a* $\lambda = \Lambda_{\tau \in K} \tau$ *, alors* $\mathbb{E}_\lambda \subseteq K$.

Preuve. Si $\tau_o \in \mathbb{E}_\lambda$, $\tau_o = \chi(R/I)$ pour un idéal λ-critique I, donc $\tau_o \geq \lambda$ ainsi $\Lambda_{\tau \in \mathbb{E}_\lambda} \tau \geq \lambda$. Mais inversement si I est tel que R/I ne soit pas de torsion pour λ alors I est contenu dans un idéal λ-critique J et $\chi(R/J) \in \mathbb{E}_\lambda$ tandis que R/J est libre pour $\chi(R/J)$ donc a fortiori pour $\Lambda_{\tau \in \mathbb{E}_\lambda} \tau$ et ainsi R/I n'est pas non plus un module de torsion pour cet infimum. Maintenant si $\lambda = \Lambda_{\tau \in K} \tau$ et si I est λ-critique, alors R/J est de torsion pour λ, quel que soit J contenant I, et donc a fortiori de torsion pour τ , ceci quel que soit $\tau \in K$. Mais, comme R/I est libre pour λ, il l'est pour au moins un τ_o de K, I est donc τ_o-critique et $\tau_o = \chi(R/I) \in K$, ainsi $\mathbb{E}_\lambda \subseteq K$.

THEOREME 1.6. - *Soit λ une théorie de torsion ; les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) λ est premier,

(ii) Si $\lambda_1 \wedge \lambda_2 = \lambda$, alors $\lambda_1 = \lambda$ ou $\lambda_2 = \lambda$.

(iii) Si $\lambda_1 \wedge \lambda_2 \wedge \dots \wedge \lambda_n \leq \lambda$, alors $\lambda_i \leq \lambda$ pour au moins un λ_i.

Preuve. (ii) et (iii) sont équivalents dans tout treillis. Si $\lambda = \chi(E)$ est premier et si $\lambda_1 \wedge \lambda_2 = \lambda$, alors E est libre pour $\lambda_1 \wedge \lambda_2$ et $\lambda_1 \wedge \lambda_2(E) = 0$; donc $\lambda_1(E)$ ou $\lambda_2(E) = 0$ (E est indécomposable) et E est libre pour au moins disons λ_1 ; donc $\lambda = \chi(E) \geq \lambda_1$ et nécessairement $\lambda = \lambda_1$. Inversement, si λ n'est pas premier, $\mathbb{E}_\lambda$ a plus d'un élément ; on peut en faire une partition en deux sous-ensembles propres K_1 et K_2 ; $\lambda_1 = \Lambda_{\tau \in K_1} \tau$ et $\lambda_2 = \Lambda_{\tau \in K_2} \tau$ sont différents de λ ; mais $\lambda_1 \wedge \lambda_2 = \lambda$.

2. COPREMIERS.

DEFINITION 2.1. - *On dit qu'une théorie de torsion ρ est un copremier si la relation $\lambda_1 \vee \lambda_2 = \rho$ implique $\lambda_1 = \rho$ ou $\lambda_2 = \rho$ et si ρ n'est pas triviale.*

On a de façon aisée :

PROPOSITION 2.2. - *La correspondance $M \to \xi(M)$ établit une bijection entre les classes d'isomorphismes de modules simples et les copremiers minimaux, tandis que la correspondance $M \to \chi(M)$ établit une bijection entre ces classes et les premiers minimaux.*

Si R est un anneau commutatif, il est facile de voir qu'il y a bijection entre les copremiers et les idéaux premiers de R : à un idéal premier $\mathfrak{p}$ correspond la théorie $\chi(R/\mathfrak{p})$. Comme cette correspondance entre idéaux et théories de torsion renverse l'ordre, on peut définir :

PROPOSITION - DEFINITION 2.3. - *On dit que R est local si une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :*

(i) R *n'a qu'une classe d'isomorphisme de modules simples.*

(ii) R *n'a qu'un copremier minimal.*

(iii) R *n'a qu'un premier minimal et c'est la torsion triviale.*

On note Cospec-R l'ensemble des copremiers de R. Contrairement au cas commutatif il n'y a pas nécessairement bijection entre premiers et copremiers.

3. ASSASSIN ET SUPPORT.

On généralise ici des résultats obtenus sur un anneau commutatif [2].

DEFINITION 3.1. - *On appelle support large d'un module* M, *et on note* S(M), *l'ensemble des théories de torsion telles que* M *ne soit pas un module de torsion.*

λ est dans le support de M, donc, si et seulement si le localisé de M, correspondent à cette théorie, n'est pas nul. λ n'est pas dans le support si et seulement si elle est plus large que $\xi(M)$.

DEFINITION 3.2. - *On dit qu'une théorie* λ *est l'annulateur d'un élément* m *de* M *si* $\lambda = \chi(Rm) = \chi(R/\mathrm{Ann}(m))$. *On note* A(M) *l'ensemble des annulateurs de* M.

On a alors les propriétés suivantes :

3.a) Si $0 \to N \to M \to P$ est une suite exacte, alors $S(M) = S(N) \cup S(P)$.

3.b) Si $M = \oplus_{i\in I} M_i$, alors $S(M) = \bigcup_{i\in I} S(M_i)$.

3.c) $A(M) \subseteq S(M)$.

3.d) Si E est un module injectif indécomposable ; alors $A(E) = \{\chi(E)\}$.

DEFINITION 3.3. - *On appelle support de* M, *et on note* Supp(M), *l'ensemble des éléments premiers du support large ; on appelle assassin de* M, *et on note* Ass(M), *l'ensemble des annulateurs premiers.*

Le support vérifie les mêmes propriétés que le support large

(3;a et 3.b), l'assassin est contenu dans le support et la notion d'assassin est celle de Storrer (11 § 3) et de Gabriel (4) ; en bref :

3.e) Si $M = \oplus_{i\in I} M_i$, alors $\mathrm{Ass}(M) = \bigcup_{i\in I}\mathrm{Ass}(M_i)$.

Preuve. si $m = m_1 \oplus m_2 \oplus \ldots \oplus m_n$ alors $\mathrm{Ann}(m) = \bigcap_i \mathrm{Ann}(m_i)$ et $\chi(Rm) = \Lambda_i \chi(Rm_i)$; si $\chi(Rm_i)$ est premier alors $\chi(Rm) = \chi(Rm_i)$ pour au moins un i.

3.f) Si M est un module et si $E(M) = \oplus_i E_i$ est la décomposition de son enveloppe injective en modules indécomposables, alors

$$\mathrm{Ass}(M) = \{\chi(E_i)\} .$$

Si M n'est pas nul, l'assassin n'est donc pas vide et, si M est de type fini, il est fini.

Si λ est une théorie de torsion, on note $\mathbf{F}_\lambda$ l'ensemble des premiers plus larges que λ. Si $\tau = \chi(E)$, alors $\tau \in \mathbf{F}_\lambda$ si et seulement si E est un module λ-libre. Bien sûr $\mathbf{E}_\lambda \subsetneq \mathbf{F}_\lambda$.

On note $\mathbf{T}_\lambda$ le complémentaire de $\mathbf{F}_\lambda$ dans R-spec. Si $\tau \in \mathbf{F}_\lambda$ et si $\tau' \geq \tau$, alors $\tau' \in \mathbf{F}_\lambda$ aussi. On dit que $\mathbf{F}_\lambda$ est fermé par générisation et que $\mathbf{T}_\lambda$ est fermé par spécialisation.

THEOREME 3.4. - *Soient λ une théorie de torsion et* **M** *un module. Alors :*

a) M est un module de λ-torsion si et seulement si $\mathrm{Supp}(M) \subsetneq \mathbf{T}_\lambda$.

b) M est un module λ-libre si et seulement si $\mathrm{Ass}(M) \subset \mathbf{F}_\lambda$.

Preuve. Si M est un module de λ-torsion et si τ est dans Supp(M), alors M n'est pas de torsion pour τ et donc τ ne peut pas être plus large que λ. La réciproque est aussi facile. Si M est λ-libre et si $\tau \in \mathrm{Ass}(M)$, alors $\chi(M)$ est plus large que λ et a fortiori, $\tau = \chi(Rm)$, $(m \in M)$, est plus large que $\chi(M)$ donc que λ. La réciproque est aussi immédiate.

Si R est un anneau commutatif, M est un module de λ-torsion si et seulement si $\mathrm{Ass}(M) \subset \mathbf{T}_\lambda$; en effet le support est la spécialisation de l'assassin :

$$\mathrm{Supp}(M) = \{\tau \in R\text{-spec} \mid \exists\ \tau' \in \mathrm{Ass}(M) \text{ et } \tau \leqslant \tau'\} .$$

C'est une situation assez spéciale.

4 - PROPRIETE S.

PROPOSITION 4.1. - *Soit* λ *une théorie de torsion ; alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) Tout module injectif indécomposable est ou bien λ*-libre ou bien de* λ*-torsion.*

(ii) $\mathbf{T}_\lambda$ *est l'ensemble des premiers* $\chi(E)$*, où* E *est un module injectif indécomposable de* λ*-torsion.*

(iii) Si M *est un module de* λ*-torsion, il en va de même de son enveloppe injective* $E(M)$.

(iv) Un module M *est de* λ*-torsion si et seulement si* $\mathrm{Ass}(M) \subseteq T_\lambda$.

Preuve. On tient pour évident que (i) implique (ii) ; on suppose que (ii) est vrai et que $\mathrm{Ass}(M) \subseteq \mathbf{T}_\lambda$; alors, si $E(M) = \oplus E_i$, chaque module injectif E_i, qui n'est pas λ-libre, est donc de λ-torsion ; il en va de même de $E(M)$ et de M, d'où (iv); (iv) à son tour implique (iii), car $\mathrm{Ass}(M) = \mathrm{Ass}(E(M))$. Que (iii) implique (i) est aussi tenu pour évident et d'ailleurs assez connu.

DEFINITION 4.2.- *Si* λ *satisfait aux conditions équivalentes de la proposition, on dit que* λ *est stable et si toute théorie est stable, on dit que* R *satisfait à la condition* (S).

PROPOSITION 4.8. - *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) Toute théorie de torsion première est stable.

(ii) R *satisfait à la condition* (S).

(iii) Pour tout module M*, le support* $\mathrm{Supp}(M)$ *est la spécialisation de* $\mathrm{Ass}(M)$.

Preuve. - Bien sûr (ii) implique (i) ; mais inversement, toute théorie de torsion λ est l'infimum de ses premiers essentiels ; si donc un module indécomposable injectif E n'est pas λ-libre, il n'est pas τ-libre pour tout premier essentiel τ, et il est donc un module de τ-torsion ; par définition de l'infimum, E est encore un module de λ-torsion. (i) implique (iii) : en effet, si $\tau \in \mathrm{Supp}(M)$, M n'est pas de τ-torsion ; décomposant $E(M) = \oplus_i E_i$, un E_i n'est pas de τ torsion, donc est τ-libre ; ainsi $\chi(E_i) \geqslant \tau$; mais $\chi(E_i) \in \mathrm{Ass}(M)$. Enfin (iii) implique (ii), car pour toute théorie λ; (iii) implique que, si $\mathrm{Ass}(M) \subseteq \mathbf{T}_\lambda$ alors M est un module de λ-torsion.

Bien sûr un anneau commutatif satisfait à la condition (S).

5 - PROPRIETE (Min).

La condition (S) implique la condition (R) de J. Raynaud [10] :
" Si $I \subsetneq J$ sont des idéaux critiques alors $\chi(R/I) \geqslant \chi(R/J)$ ".
En effet, si $I \subsetneq J$ alors R/I ne peut pas être un module de torsion pour $\chi(R/J)$, ainsi E(R/I) n'est pas un module de torsion pour cette théorie et c'est donc un module libre, R/I est donc libre et on a $\chi(R/I) \geqslant \chi(R/J)$.

J. Raynaud donne un contre exemple à cette condition même dans le cas où R est un anneau artinien ([10] lemme 3.2).

On note $\mathrm{Min}(\lambda)$, l'ensemble des premiers minimaux pour la propriété d'être plus larges que λ (les chaines descendantes de premiers correspondent aux chaines ascendantes d'idéaux critiques et sont donc stationnaires, $\mathrm{Min}(\lambda)$ est bien défini, et non vide si λ est propre ; d'ailleurs on a vu à la proposition 1.4 que $\mathrm{Min}(\lambda)$ contenait $\mathbf{E}_\lambda$).

La condition (R) entraîne à son tour la condition (Min) :
"(Min) : $\mathbf{E}_\lambda = \mathrm{Min}(\lambda)$ ".

En effet, si $\tau \in \mathrm{Min}(\lambda)$ et si I est τ-critique, alors $\tau \geqslant \lambda$ et R/I est λ-libre ; donc I est contenu dans un idéal λ-critique J ; mais à cause de la condition (R), $\lambda \leqslant \chi(R/J) \leqslant \chi(R/I)$ et, comme τ est minimal, $\chi(R/J) = \chi(R/I) = \tau$ est essentiel.

Bien sûr, si R-Spec est fini, donc si R est Artinien, il satisfait à la condition (Min) ; c'est un cas particulier du théorème :

THEOREME 5.2. - *Les assertions suivantes sont equivalentes :*

(i) R *satisfait à la condition* (Min).

(ii) tout premier est fortement premier : si pour une famille quelconque (même infinie) de théories $(\lambda_k)_{k\in K}$*, on a* $\bigwedge_{k\in K}\lambda_k \leq \tau$ *, alors,* $\lambda_{k_\Omega} \leq \tau$ *pour au moins un élément de la famille.*

(iii) L'application $\lambda \to \mathbb{F}_\lambda$ *est une bijection entre les théories de torsion et les sous-ensembles de* R-spec *fermés par générisation.*

(iv) Pour tout module indécomposable injectif E*, il y a une théorie* $\alpha(E)$ *, la plus petite qui fait de* E *un module qui ne soit pas libre.*

Preuve. (i)$\Longrightarrow$(ii). Si λ est l'infimum d'une famille, il est aussi l'infimum des premiers minimaux de tous les éléments de la famille, donc $\mathbb{E}_\lambda = \mathrm{Min}(\lambda)$ est inclus dans cet ensemble de premiers (théorème 1.5) ; si donc $\tau \geqslant \lambda$, alors τ est plus large qu'un premier minimal de λ, lequel est un premier minimal d'au moins un élément de la famille de théories (dont λ est l'infimum) et τ est a fortiori plus large que cet élément de la famille.

(ii)$\Longrightarrow$(iii). Soit $\mathbb{F}$ un ensemble fermé par générisation ; on pose $\lambda(\mathbb{F}) = \bigwedge_{\tau\in\mathbb{F}}\tau$; alors on a toujours $\lambda(\mathbb{F}_\lambda) = \lambda$; mais si de plus (ii) est vrai, il est facile de voir que $\mathbb{F}_{\lambda(\mathbb{F})} = \mathbb{F}$.

(iii)$\Longrightarrow$(iv). Si E est un module injectif indécomposable, alors

$$\mathbb{F} = \{\tau \mid \tau \text{ n'est pas plus petit que } \chi(E)\}$$

est le plus grand ensemble, fermé par générisation, qui ne contient pas $\chi(E)$; il y correspond la plus petite théorie faisant de E un module libre.

(iv)$\Longrightarrow$(i). Si R ne satisfait pas à la condition (Min), il y a une théorie de torsion λ et un premier $\tau_o \in \mathrm{Min}(\lambda)$ tel que $\tau_o \notin \mathbb{E}_\lambda$. Alors $\forall \tau \in \mathbb{E}_\lambda$, τ n'est pas plus petit que τ_o (car $\tau_o \in \mathrm{Min}(\lambda)$) et donc, si $\tau_o = \chi(E_o)$, l'injectif indécomposable E_o n'est pas τ-libre. Si $\alpha(E_o)$ existait, on aurait $\alpha(E_o) \leqslant \tau, \forall \tau \in \mathbb{E}_\lambda$, donc $\alpha(E_o) \leqslant \wedge_{\tau \in \mathbb{E}_\lambda} \tau = \lambda \leqslant \tau_o$; mais alors E_o , qui est libre pour τ_o , le serait pour $\alpha(E_o)$ contrairement à sa définition.

PROPOSITION 5.3. - *Si* R *satisfait à la condition* (Min) *et si* E *est un injectif indécomposable, alors* $\alpha(E)$ *est copremier.*

Preuve. - Si λ et $\mu < \alpha(E)$, alors E est libre pour λ et pour μ, donc encore pour $\lambda \vee \mu$; et $\lambda \vee \mu \neq \alpha(E)$.

6 - DECOMPOSITION EN COPREMIERS.

On ne sait pas si toute chaine ascendante de premiers est stationnaire (c'est le cas si R est commutatif : toute chaine d'idéaux premiers *descendante* est stationnaire).

Si toute chaine ascendante de premiers est stationnaire, on dit que R satisfait à la condition (Max).

THEOREME 6.1. - *Si* R *satisfait aux conditions* (Min) *et* (Max), *alors :*

a) Il y a une bijection entre les classes d'isomorphisme de modules injectifs indécomposables et Cospec(R) *(donc aussi entre* Spec(R) *et* Cospec(R)*), donnée par* $E \to \alpha(E)$.

b) Pour toute théorie de torsion λ *non triviale, si* $\mathrm{Max}(\lambda)$ *désigne l'ensemble des copremiers maximaux pour la propriété d'être moins grands que* λ *, alors* $\lambda = \bigvee_{\rho \in \mathrm{Max}(\lambda)} \rho$ *et si,* $\lambda = \bigvee_{\rho \in K} \rho$ *, alors* $\mathrm{Max}(\lambda) \subseteq K$.

Preuve. a) Bien sûr $\mathbb{F}_{\lambda \wedge \mu} = \mathbb{F}_\lambda \cup \mathbb{F}_\mu$ et $\mathbb{F}_{\lambda \vee \mu} = \mathbb{F}_\lambda \cap \mathbb{F}_\mu$

et donc $\mathbb{T}_{\lambda \wedge \mu} = \mathbb{T}_\lambda \cap \mathbb{T}_\mu$ et $\mathbb{T}_{\lambda \vee \mu} = \mathbb{T}_\lambda \cup \mathbb{T}_\mu$;

les premiers correspondent à des ensembles $\mathbb{F}$ (théorème 5.2. (iii)) qui sont premiers pour l'opération d'union dans le treillis formé par les sous-ensembles de R-Spec fermés par générisation ; les théories qui sont des copremiers correspondent à ces ensembles $\mathbb{F}$ qui sont complémentaires d'un ensemble $\mathbb{T}$, premier dans le treillis des sous-ensembles de R-Spec, fermés par spécialisation, pour l'opération d'union. Avec la condition (Max), de tels éléments premiers sont les ensembles $\mathbb{T}$ qui possèdent un élément maximal unique $\chi(E)$; $\mathbb{F}$ est alors l'ensemble des premiers qui ne sont pas plus petit que $\chi(E)$ et il y correspond le copremier $\alpha(E)$.

b) correspond au théorème 1.5.

Bien sûr les anneaux finis possèdent les propriétés (Min) et (Max). En fait on sait montrer que les extensions finies d'anneau commutatif noéthérien ont encore ces propriétés.

QUESTIONS (modestes) : la condition (S) est-elle effectivement plus forte que la condition (R) ? Quels sont les exemples d'anneaux ne vérifiant pas les conditions (Min) ou (Max) ?

B. FIBRES.

7 - PREMIERS AU-DESSUS D'UN IDEAL PREMIER.

R désigne maintenant un anneau non nécessairement noéthérien. Un premier de Goldman est encore une théorie de la forme $\chi(R/I)$ telle que I soit maximal parmi les idéaux pour lesquels le quotient R/I est un module libre. D'un tel idéal, critique, on connait la définition intrinsèque :

PROPOSITION 7.1. - *Un idéal* I *de* R *est critique si et seulement si*

$\forall a \notin I$, $\forall b \notin I$, $\forall r \in R$, $\exists s \in R$ *tel que* $sr \in I + Ra$ *mais* $sb \notin I$.

Deux idéaux critiques I et J sont dits équivalents si $\chi(R/I) = \chi(R/J)$.

PROPOSITION 7.2 - *Deux idéaux critiques* I *et* J *sont équivalents si et seulement si* $\exists\, s \notin I$, $\exists\, t \notin J$ *et* $Is^{-1} = Jt^{-1}$ *(cf. [8], §2).*

Les premiers sont cette fois en bijection avec les classes d'isomorphismes de modules injectifs indécomposables dont le coeur n'est pas nul. Le coeur $\mathcal{C}(E)$ d'un tel injectif E est :

- L'intersection des noyaux des endomorphismes non injectifs de E,
- $\{x \in E \mid \mathrm{Ann}(x)$ est un idéal critique$\}$ ($-\{x \ldots\} \cup \{0\}$).

(cf. [11]).

A un premier τ correspond donc un injectif E_τ (à isomorphisme près) et son coeur $\mathcal{C}_\tau$; ce coeur est d'ailleurs le localisé $(R/I)_\tau$ pour tout idéal τ-critique I. On considère maintenant un anneau commutatif A et on se donne un morphisme $f : A \to R$ de A dans le centre de R, qui fait de R une A-algèbre.

THEOREME 7.3. - *Soit* τ *un premier sur* R*, alors l'annulateur, sur* A*, du coeur* $\mathcal{C}_\tau$ *est un idéal premier de* A : $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_A(\mathcal{C}_\tau)$ *et, pour tout idéal* τ*-critique* I, $\mathfrak{p} = f^{-1}(I)$.

Preuve. De la définition intrinsèque d'un idéal critique, il résulte évidemment que $f^{-1}(I)$ est premier. Ce premier $\mathfrak{p}$ annule R/I et contient donc l'annulateur de $\mathcal{C}_\tau$ (qui contient R/I) ; mais comme, pour tout p dans $\mathfrak{p}$, la multiplication par p est un endomorphisme non injectif de E, le noyau de cet endomorphisme contient $\mathcal{C}_\tau$ et l'annulateur de ce noyau est contenu dans $\mathrm{Ann}_A(\mathcal{C}_\tau)$.

Dans ces conditions, on dit que τ est au-dessus de l'idéal $\mathfrak{p}$.

8 - SURJECTION.

On considère une surjection $g : R \to \bar{R}$. On note K son noyau, et pour tout module M, on note $\bar{M}$ le $\bar{R}$-module $M/KM = M \otimes_R \bar{R}$.

PROPOSITION 8.1. - *Soit* I *un idéal contenant* K. *Alors* I *est critique si et seulement si* $\bar{I}$ *est critique dans* $\bar{R}$. *Deux idéaux critiques* I *et* J *contenant* K *sont équivalents si et seulement si* $\bar{I}$ *et* $\bar{J}$ *sont équivalents dans* $\bar{R}$.

La proposition résulte encore des définitions intrinsèques 7.1 et 7.2.

Si $g : R \to S$ est un morphisme quelconque d'anneaux, on rappelle qu'on peut définir l'image directe $f_*(\lambda)$ d'une théorie de torsion : c'est la théorie sur S qui a pour modules de torsion (resp. libres) les modules qui, en tant que R-modules, sont des modules de torsion pour λ (resp. libres).

PROPOSITION 8.2. - *Si* I *est un idéal critique de* R *contenant* K *et* $\tau = \chi(R/I)$ *, alors* $f_*(\tau)$ *est une théorie premiere et* $f_*(\tau) = \chi(\bar{R}/\bar{I})$.

C'est facile.

Si I est un idéal critique contenant K, l'enveloppe injective $E(\bar{R}/\bar{I})$ de $\bar{R}/\bar{I}$ est encore une extension essentielle de R/I en tant que R-module et elle est plongée dans l'enveloppe injective de R/I :

$$0 \hookrightarrow R/I = \bar{R}/\bar{I} \hookrightarrow E(\bar{R}/\bar{I}) \hookrightarrow E(R/I).$$

En fait il est facile de voir que :

$$E(\bar{R}/\bar{I}) = \{x \in E(R/I) \mid Kx = 0\}.$$

On considère maintenant le cas particulier où R est une A-algèbre et où $K = \mathfrak{p}R$, pour un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A.

THEOREME 8.3. - *Soit* g *la surjection* $R \to R/\mathfrak{p}R$. *Alors :*

a) g_* *est une bijection entre les premiers de* R *au-dessus d'un idéal contenant* $\mathfrak{p}$ *et les premiers de* $\bar{R} = R/\mathfrak{p}R$.

b) Si τ *est un tel premier ; le coeur* $\mathcal{C}_\tau$ *est déjà un* $\bar{R}$*-module et c'est le coeur de* $g_*(\tau)$.

c) Si τ *est un premier au-dessus d'un idéal qui ne contient pas* $\mathfrak{p}$*, alors* $\mathcal{C}_\tau \otimes \bar{R} = 0$.

Preuve. a) est clair. Si $p \in \mathfrak{p}$, la multiplication par p est un endomorphisme non injectif de E_τ ; elle annule donc $\mathcal{C}_\tau$; ainsi $\mathcal{C}_\tau\ Eg_{*(\tau)} = \{x \in E_\tau | \mathfrak{p}\, E = 0\}$; comme $\mathcal{C}_\tau$ est la fermeture de R/I dans E_τ , on en déduit que c'est aussi la fermeture de $\bar{R}/\bar{I}$ dans $Eg_*(\tau)$; enfin, si τ n'est pas un premier au-dessus d'un idéal contenant $\mathfrak{p}$, alors $\forall x \in \mathcal{C}_\tau$, Ann(x) qui est τ-critique, ne contient pas $\mathfrak{p}$; on trouve p dans $\mathfrak{p}$ tel que $px \neq o$ et la multiplication par p dans E_τ est injective (son noyau ne contient pas $\mathcal{C}_\tau$) ; comme l'anneau des endomorphismes de $\mathcal{C}_\tau$ est un corps gauche, cette multiplication est surjective ; ainsi $\mathcal{C}_\tau \otimes_A A/\mathfrak{p} = 0$.

9 - EPIMORPHISME PLAT.

On considère un épimorphisme plat $g : R \to Q$. Comme g est plat, on peut considérer l'image inverse $g^*(\lambda)$ d'une théorie de torsion λ sur Q : un module M est de $g^*(\lambda)$-torsion si et seulement si $M \otimes_R Q$ est de λ-torsion.

On note ξ_Q la théorie triviale sur Q. $g^*(\xi_Q)$ est la théorie la plus large sur R telle que tout Q-module soit libre ; ainsi Q est la localisation de R pour cette théorie et elle satisfait à la condition (T) de Goldman (cf. [8] prop. 2.7. et [5] théorème 4.3.).

Ainsi :

PROPOSITION 9.0.- g^* *et* g_* *sont des bijections inverses entre les théories de torsion sur* Q *et les théories de torsion sur* R *plus larges que* $g^*(\xi_Q)$.

Classique.

THEOREME 9.1. - g^* *et* g_* *sont des bijections inverses entre les premiers de* Q *et les premiers de* R *plus larges que* $g^*(\xi_Q)$; *Si* τ *est un tel premier, alors* $E_\tau \otimes Q \cong E_\tau$ *et c'est un Q-module injectif indécomposable ; il correspond à* $g_*(\tau)$ *et* $\mathcal{C}_\tau \cong \mathcal{C}g_*(\tau)$.

Preuve. Si $\tau \geq g^*(\xi_Q)$, alors E_τ est $g^*(\xi_Q)$-libre et divisible et $E_\tau \otimes Q \cong E_\tau$.

Le théorème en résulte.

10- FIBRES.

THEOREME 10.1.- *Soit* R *une* A-*algèbre. La fibre au-dessus d'un premier* $\mathfrak{p}$ *de* A *(soit l'ensemble des premiers de* R *au-dessus de* $\mathfrak{p}$,*) est en bijection avec l'ensemble des premiers de* $R\otimes_A k(\mathfrak{p})$, *où* $k_\tau(\mathfrak{p})$ *est le corps résiduel de* $\mathfrak{p}$. *Si* g *désigne le morphisme canonique* $g : R \to R \otimes k(\mathfrak{p})$ *à un premier au-dessus de* $\mathfrak{p}$ *correspond le premier* $g_*(\tau)$ *de* $R\otimes k(\mathfrak{p})$ *et le coeur de* $g_*(\tau)$ *est encore* $\mathcal{C}_\tau \cong \mathcal{C}_\tau \otimes k(\mathfrak{p}) = \mathcal{C}g_*(\tau)$. *Si* τ *n'est pas au-dessus de* $\mathfrak{p}$, *alors* $\mathcal{C}_\tau \otimes k(\mathfrak{p}) = 0$.

Comme application, on en déduit que si A est noethérien et si R est une algèbre finie sur A, l'ensemble des premiers de R est "localement fini" ainsi R satisfait aux conditions (Min) et (Max.).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] N. BOURBAKI, *Algèbre,* chap. VIII, Hermann, Paris.

[2] P.J. CAHEN, *Torsion theory and associated primes,* to appear.

[3] S.G. DICKSON, *A torsion theory for Abelian categories,* Trans Amer. Math. Soc. 21 (1966), p. 223-235.

[4] P. GABRIEL, *Des catégories abéliennes,* Bull. Soc. Math. France 90, 1962, p p. 323-448.

[5] O. GOLDMAN, *Rings and modules of quotients,* J. of Algebra 13, p. 10-47, 1969.

[6] A.G. HAINICKE, *Rings of quotients,* Canadian J. Math. 24, 1972. p. 703-712.

[7] J. LAMBEK, *Torsion theories, additive semantics and rings of quotients,* Lecture Notes in Mathematics 177, Berlin, Heidelberg, New-York.

[8] J. LAMBEK and G. MICHLER, *The torsion theory at a prime ideal of a right noetherian ring,* to appear.

[9] N. POPESCU, *Le spectre à gauche d'un anneau,* J. Algebra 18 , 1971, p. 213-228.

[10] J. RAYNAUD, *Localisation stable à droite et anneaux semi-noethériens*, C.R. Acad. Sc. Paris, 275 , 1972, p. 13-16.

[11] H. H. STORRER, *On Goldman's primary decomposition, lectures on Rings and Modules*, Lecture Notes 246, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York.

P.J. CAHEN
The University of British Columbia
VANCOUVER - CANADA