PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

J. F. COLOMBEAU

Sur la différentiabilité dans les espaces de Fréchet

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1973, tome 10, fascicule 2
« Compte rendu des journées infinitistes », , p. 41-52
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1973__10_2_41_0>

$II^{\text{ème}}$ - Coll. Anal. Fonct.
(1973, Bordeaux)
p. 41-52

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1973 t. 10-2

SUR LA DIFFERENTIABILITE DANS LES ESPACES DE FRECHET

par

J.F. COLOMBEAU (Bordeaux)

---o0o---

§ 1 - INTRODUCTION

Il existe, dans des cadres assez restrictifs, diverses notions de différentiabilité autres que celles vues dans l'introduction de [6] et permettant néanmoins d'obtenir des résultats sérieux. C'est le cas de la théorie de Kijowski et Szczyrba [12] dans les espaces de Fréchet-Schwartz dont des applications sont données dans [10] et [11]. Bien qu'à priori cette dernière notion paraisse tout à fait différente de celle de Silva, nous montrons ici qu'elle en est très proche : en particulier dans ce cadre des espaces de Fréchet-Schwartz les notions d'applications continuement différentiables, n fois continuement différentiables, indéfiniment différentiables selon cette théorie coïncident avec celles de Silva, ce qui peut, dans une certaine mesure espliquer le succès de la notion de Kijowski et Szczyrba dans ces espaces. Nous obtenons les mêmes résultats pour une notion voisine considérée par Szczyrba dans [16] dans les espaces métrisables quasi normables. Dans cet article nous utilisons la terminologie et les notations de [6], [8], [12] et [16].

Soient E_1 et E_2 deux elcs, U un ouvert de E_1, f une application de U dans E_2 ; nous dirons que f est différentiable au sens de K et S dans U (définition de [12] ; c'est la définition de G. Marinescu [14]) si pour tout $a \in U$ $f(a + h) = f(a) + f'(a)\, h + r_a(h)$ où $f'(a)$ est linéaire continue de E_1 dans E_2 et où r_a est tangente à zéro au sens suivant :

$$\underset{\substack{\text{(vois. de 0}\\ \text{de } E_2)}}{\forall\, V_2} \quad \underset{\substack{\text{(vois. de 0}\\ \text{de } E_1)}}{\exists\, V_1} \quad \big|\ \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, U_\varepsilon \ \big|\ h \in U_\varepsilon \Rightarrow \|r(h)\|_{V_2} \leq \varepsilon \|h\|_{V_1} \qquad \text{(I)} .$$

Pour la définition des applications plusieurs fois ou continuement différentiables, K et S. utilisent dans [12] la topologie de la convergence simple sur $L(E_1, E_2)$, notée $L_s(E_1, E_2)$.

Remarquons tout de suite :

Proposition - Soit E_1 un espace métrisable complexe, U un ouvert de E_1, F un elcs ; les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) f est différentiable au sens de K. et S. dans U.
2) f est Silva analytique au sens large dans U.

Démonstration : 1) $\Rightarrow$ f est G-analytique et continue d'où 2) ;
2) $\Rightarrow$ 1) : f est G-analytique et continue (car si E est un elcs métrisable $\tau B E = E$) donc :

$$\forall V_2 \ (\text{vois. de } 0 \text{ de } E_2) \quad \exists V_1 \ (\text{vois. de } 0 \text{ de } E_1) \quad \Big| \quad \frac{\|r(h)\|_{V_2}}{\|h\|_{V_1}} \to 0 \text{ si } \|h\|_{V_1} \to 0$$

(cf. Pisanelli [17]) d'où (I)

Dans la suite on peut donc supposer que E_1 est un espace vectoriel réel.

§ 2 - RAPPORTS ENTRE LA DEFINITION DE MARINESCU - K. et S. DANS LES ESPACES DE FRECHET ET CELLE DE SILVA

Proposition 1 - Soient E_1 un espace de Fréchet, U un ouvert de E_1, E_2 un elcs et f une application de U dans E_2 ; si f est n fois continuement (resp. indéfiniment) différentiable dans U au sens de K. et S. alors f est n fois continuement (resp. indéfiniment) Silva différentiable au sens large dans U en prenant sur E_1 la bornologie des compacts.

Démonstration : Lemme A : si E_1 est un elcs quelconque, alors : "f est différentiable au sens de K. et S. dans U" $\Rightarrow$ "f est Silva différentiable au sens large dans U"

Démonstration du lemme A : il suffit de vérifier que si r est tangente à zéro selon la définition de K. et S. elle est tangente à zéro selon la définition de Silva au sens large ce qui est immédiat : soient donnés le disque borné B_1 de E_1 et le voisinage convexe équilibré V_2 de 0 dans E_2, soit $\varepsilon > 0$ donné ; il existe $\tau_o > 0$ tel que $\tau_o B_1 \subset U_\varepsilon$ donc
$\|h\|_{B_1} \leq \tau_o \Rightarrow \|r(h)\|_{V_2} \leq \varepsilon \|h\|_{V_1} \leq \varepsilon C \|h\|_{B_1}$, C étant une constante provenant de ce que V_1 absorbe B_1.

Lemme B : si E_1 est un espace de Fréchet, si f est continuement différentiable dans U au sens de K. et S., alors f est Silva continuement différentiable au sens large dans U en prenant sur E_1 la bornologie des disques compacts.

Démonstration du lemme B : d'après le lemme A f est Silva différentiable au sens large dans U ; soient $x_o \in U$ et B un disque compact de E_1 tel que $x_o + B$ est compact dans U ; $f'(x_o + B)$ est borné dans $L_s(E_1, E_2)$ donc dans $L_b(E_1, E_2)$ donc $f'(x_o + B)$ est une famille équicontinue ; sur $f'(x_o + B)$ la topologie de la convergence simple et de la convergence compacte coïncident donc, si $\|x_n - x_o\|_B \to 0$, $f'(x_n) \to f'(x_o)$ simplement donc dans $L_c(E_1, E_2)$ où $L_c(E_1, E_2)$ désigne l'espace $L(E_1, E_2)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de E_1.

Lemme C : si E_1 est un espace de Fréchet, si f est 2 fois continuement différentiable dans U au sens de K. et S., alors f est 2 fois Silva continuement différentiable au sens large dans U en prenant sur E_1 la bornologie des disques compacts.

Démonstration du lemme C : f' est continuement différentiable au sens de K. et S. dans U donc $f'(x + h) = f'(x) + f''(x)\, h + r_x^2(h)$ (si $x \in U$) et $r_x^2(h) = \int_0^1 (1-s) \{f''(x + sh) - f''(x)\}\, h\, ds$ (F) (si E_2 est complet, sinon prendre son complété) ; soit $x \in U$ fixé et soit B un disque borné de E_1 tel que $x + B_1$ est relativement compact dans U.

Lemme C.1 : $\left\{ \frac{r_x^2(\tau h)}{\tau} \right\}_{h \in B_1}$ est un ensemble équicontinu dans $L(E_1, E_2)$; pour cela il suffit de montrer que cet ensemble est borné dans $L(E_1, E_2)$ muni de sa bornologie naturelle ; f'' est continue de U dans $L_s(E_1, L_s(E_1, E_2))$ donc borné sur $x + B_1$ donc les bornés de $L_s(E_1, L_s(E_1, E_2))$ étant les bornés naturels de $L(E_1, L(E_1, E_2))$, la formule (F) montre le lemme C.1.

Nous allons montrer que la base de filtre $F_{\tau_o} = \bigcup_{0<\tau\leq\tau_o} \frac{r_x^2(\tau B_1)}{\tau}$

converge vers zéro dans $L_c(E_1, E_2)$; f' étant différentiable au sens de K. et S. : pour tout voisinage $\mathscr{V}$ de 0 dans $L_s(E_1, E_2)$,

$$\exists\, V_1 \mid \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, U_\varepsilon \mid h \in U_\varepsilon \Rightarrow \| r_x^2(h) \|_{\mathscr{V}} \leq \varepsilon \|h\|_{V_1} \quad ;$$

comme on l'a vu au lemme A cela montre que :

$$\forall\, \mathscr{V} \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \tau_o > 0 \mid h \in \tau_o B_1 \Rightarrow \| r_x^2(h) \|_{\mathscr{V}} \leq \varepsilon \|h\|_{B_1} \quad ;$$

ceci signifie que la base de filtre F_{τ_o} tend vers 0 dans $L_s(E_1, E_2)$ donc, d'après le lemme C.1., et un résultat déjà utilisé au lemme B, la base de filtre F_{τ_o} tend vers 0 dans $L_c(E_1, E_2)$ d'où f est deux fois Silva différentiable au sens large dans U en prenant sur E_1 la bornologie des disques compacts. On termine le lemme C comme on a montré le lemme B.

La démonstration est valable pour n quelconque.

Nous allons maintenant obtenir un résultat inverse :

Proposition 2 - Soient E_1 un elcs métrisable, U un ouvert de E_1, E_2 un elcs et f une application de U dans E_2 ; si f est (n + 1) fois Silva continuement (resp. Silva indéfiniment) différentiable au sens large dans U, alors f est n fois continuement (resp. indéfiniment) différentiable au sens de K. et S. dans U.

Démonstration : Lemme A : si f est 2 fois Silva continuement différentiable au sens large dans U, alors f est continuement différentiable au sens de K. et S. dans U.

Démonstration du lemme A : si $a \in U$ et si $r(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a).h$, il nous faut d'abord montrer : si W est un voisinage de 0 convexe et équilibré de E_2

$$\exists\, V_1 \mid \forall\, \varepsilon>0 \;\exists\, U_\varepsilon \mid h \in U_\varepsilon \Rightarrow \|r(h)\|_W \leq \varepsilon \|h\|_{V_1} \qquad \text{(II)}.$$

Soient $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une base fondamentale de voisinages de 0 de E_1, formée de convexes équilibrés et telle que, pour tout $k>1$, $k\,U_k \subset U_{k-1}$.

Si (II) n'est pas vrai :

$$\forall\, U_p \;\exists\, \varepsilon_p>0 \mid \forall \underset{k>p}{U_k} \;\exists\, h_k^p \in U_k \mid \|r(h_k^p)\|_W > \varepsilon_p \|h_k^p\|_{U_p} \qquad \text{(III)}.$$

Lemme A_1 : Dans (III) on peut supposer $\|h_k^p\|_{U_p} \neq 0$.

si $\|h_k^p\|_{U_p} = 0$, soit (z_n) une suite convergeant dans E_1 vers h_k^p ;

r est continue donc $\|r(z_n)\|_W \to \|r(h_k^p)\|_W$ (>0 d'après (III)) ;

$\|z_n\|_{U_p} \to \|h_k^p\|_{U_p} = 0$; on peut choisir la suite z_n telle que $\|z_n\|_{U_p} \neq 0$ pour tout n car sinon il existerait un voisinage U de h_k^p tel que

$x \in U \Rightarrow \|x\|_{U_p} = 0$ donc $-h^p_k + U$ serait un voisinage de 0 tel que $x \in -h^p_k + U \Rightarrow \|x\|_{U_p} = 0$ donc $U_p = E_1$ ce que l'on peut exclure au départ. Donc $\|z_n\|_{U_p} \neq 0$, $\|r(z_n)\|_W \to \|r(h^p_k)\|_W > 0$ et $\|z_n\|_{U_p} \to 0$ donc, en choisissant n assez grand, $\|r(z_n)\|_W > \varepsilon_p \|z_n\|_{U_p}$ et $z_n \in U_k$ (car $h^p_k \in U_k$ car $z_n \to h^p_k$ et qu'on peut choisir au départ les U_p ouverts) d'où le lemme A_1.

<u>Lemme A_2</u> : Il existe une suite k_p d'entiers et un disque borné B de E_1 tels que, pour tous p :

$$\|h^p_{k_p}\|_{U_p} \geq \|h^p_{k_p}\|_B \quad \text{et} \quad \|h^p_{k_p}\|_B \leq \frac{1}{p}\varepsilon_p .$$

Pour cela on va prendre $B = \bigcap_p \lambda_p U_p$ avec un choix de la suite (λ_p) $(\lambda_p \in R^+)$ telle qu'elle croisse vers $+\infty$ assez vite ; choisissons $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \ldots$ supérieurs à $+1$ et assez grands pour que, si $B = \bigcap_p \lambda_p U_p$, $B \cap \mathbb{R} h^1_1 \supset U_1 \cap R h^1_1$ et que $\|h^1_1\|_B \leq \varepsilon_1$; choisissons k_2 tel que $\|h^2_{k_2}\|_{U_1} \leq \frac{1}{2}\varepsilon_2$ (c'est possible car $h^2_k \in U_k$ et $k U_k \subset U_{k-1}$) ; en gardant λ_1 fixé $(\lambda_1 \geq 1)$, augmentons $\lambda_2, \ldots, \lambda_p, \ldots$ de telle sorte que $\|h^2_{k_2}\|_B < \frac{1}{2}\varepsilon_2$ (comme $\|h^2_{k_2}\|_{U_1} \leq \frac{1}{2}\varepsilon_2$, il n'y a pas à augmenter λ_1 qui est déjà supérieur à 1) et que $B \cap \mathbb{R} h^2_{k_2} \supset U_2 \cap \mathbb{R} h^2_{k_2}$ (comme $U_2 \subset \frac{1}{2} U_1$ et que $\lambda_1 \geq 1$, il n'y a encore pas à augmenter λ_1) ; le nouveau B obtenu contient le précédent donc, encore, $\|h^1_1\|_{U_1} \geq \|h^1_1\|_B$ et $\|h^1_1\|_B < \varepsilon_1$; de plus $\|h^2_{k_2}\|_B < \frac{1}{2}\varepsilon_2$ et $\|h^2_{k_2}\|_{U_2} \geq \|h^2_{k_2}\|_B$; ensuite on choisit k_3 tel que $\|h^3_{k_3}\|_{U_1} < \frac{1}{3}\varepsilon_3$ et

$\|h^3_{k_3}\|_{U_2} < \frac{1}{3}\varepsilon_3$, puis en gardant λ_1 et λ_2 fixés (≥ 1) on augmente $\lambda_3, \ldots, \lambda_p, \ldots$. La construction par récurrence de la suite (λ_p) est immédiate d'où le lemme A_2.

La suite $(h^p_{k_p})$ converge vers 0 dans E_1 qui est métrisable, donc elle converge vers 0 au sens de Mackey, donc il existe un disque borné B' de E_1 tel que $\|h^p_{k_p}\|_{B'} \to 0$; si $B' \supset B$, $\|h^p_{k_p}\|_{U_p} \geq \|h^p_{k_p}\|_{B'} \leq \frac{1}{p}\varepsilon_p$.

f' étant 2 fois Silva continuement différentiable au sens large il existe $c > 0$ tel que $\|r(h^p_{k_p})\|_W \leq c\,\|h^p_{k_p}\|^2_{B'}$; (III) $\Rightarrow \|r(h^p_{k_p})\|_W > \varepsilon_p \|h^p_{k_p}\|_{B'}$ donc $\varepsilon_p < c\,\|h^p_{k_p}\|_{B'} \leq \frac{c}{p}\varepsilon_p$ donc $c \geq p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ d'où une contradiction. f est donc différentiable dans U au sens de K. et S.

Il nous faut maintenant vérifier, pour terminer la démonstration du lemme A, que f' est continue de U dans $L_s(E_1, E_2)$; c'est immédiat car f' est continue de U dans $L_b(E_1, E_2)$.

Pour démontrer la proposition 2 avec $n = 2$: si f est 3 fois Silva continuement différentiable au sens large dans U, f' est 2 fois Silva continuement différentiable au sens large de U dans $L_b(E_1, E_2)$, donc dans $L_s(E_1, E_2)$; donc d'après le lemme A, f' est continuement différentiable au sens de K. de S. de U dans $L_s(E_1, E_2)$, donc f est 2 fois continuement différentiable au sens de K. et S. dans U.

La démonstration avec n quelconque est la même.

<u>Remarque 1</u> : <u>Soient E_1 un Fréchet-Montel, E_2 un elcs, U un ouvert de E_1 et f une application de U dans E_2 ; les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

1) f est Silva indéfiniment différentiable dans U.

2) f est indéfiniment différentiable dans U au sens de K. et S.

Démonstration immédiate d'après les propositions 2) et 3) et la proposition(5, 4) p. 78 de [6], un Fréchet-Montel étant un ebc de Schwartz. (cf. [9]).

Nous allons maintenant obtenir des résultats meilleurs dans le cadre des espaces de Fréchet-Schwartz, cadre de la théorie de Kijowski et Szczyrba [12].

Proposition 3 - Soient E_1 un espace de Fréchet-Schwartz, E_2 un elcs, U un ouvert de E_1 et f une application de U dans E_2 ; les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) f est n fois continuement différentiable dans U au sens de K. et S.

(2) f est n fois Silva continuement différentiable au sens large dans U.

Démonstration : (1) $\Rightarrow$ (2) d'après la proposition 1 ;

(2) $\Rightarrow$ (1) : démontrons le d'abord pour n = 1 :

f est Gateau différentiable et f' est continue de U dans $L_b(E_1, E_2)$ donc dans $L_s(E_1, E_2)$; il suffit donc d'appliquer le th. 4. de K. et S. [12] p. 252. Pour n = 2 : $f' : U \to L_b(E_1, E_2)$ est Silva continuement différentiable au sens large dans U donc continuement différentiable dans U au sens de K. et S. (résultat précédent avec n = 1) donc $f' : U \to L_s(E_1, E_2)$ est continuement différentiable dans U au sens de K. et S. Même démonstration pour n quelconque.

Remarque 2 : Si E_1 et E_2 sont des espaces de Fréchet-Schwartz, on a donc : les propriétés d'être continuement, n fois continuement et indéfiniment différentiables sont les mêmes au sens de K. et S. ou au sens de Silva.

§3 - APPLICATIONS

Les structures de variétés différentiables construites dans [10] et [11] sont donc exactement des variétés différentiables utilisant le calcul différentiel général dont la théorie est donnée dans [6]; (dans [3] nous avions déjà indiqué qu'il était très simple de reprendre les constructions de [10] et [11] en utilisant le calcul différentiel selon la définition de Silva).

§4 - SUR UNE NOTION VOISINE DE CELLE DU §2

Dans [16] Szczyrba prend sur $L(E_1, E_2)$ la topologie $L_b(E_1, E_2)$ à la place de $L_s(E_1, E_2)$. Il est alors immédiat (lemme A de la prop. 1 du §2) que : si E_1 et E_2 sont deux elcs, si U est un ouvert de E_1, si f est une application de U dans E_2 n fois, (resp. n fois continuement, resp. indéfiniment) différentiable en ce dernier sens dans U, alors f est n fois (resp. n fois continuement, resp. indéfiniment) Silva différentiable au sens large dans U.

Comme la proposition 2 du §2 : si E_1 est un elcs métrisable, E_2 un elcs, U un ouvert de E_1 ; si f est une application de U dans E_2 $(k+1)$ fois continuement (resp. indéfiniment) Silva différentiable au sens large dans U, alors f est k fois continuement (resp. indéfiniment) différentiable dans U au sens considéré par Szczyrba dans [16].

On a aussi :

<u>Proposition</u> - <u>Soit E_1 un elcs métrisable quasi normable (définition dans [16]), E_2 un elcs, U un ouvert de E_1 ; f une application de U dans E_2 ; les propriétés suivantes sont équivalentes :</u>

(1) <u>f est n fois continuement (resp. indéfiniment) différentiable dans U au sens de Szczyrba</u> [16].

(2) <u>f est n fois Silva continuement (resp. Silva indéfiniment) différentiable dans U au sens large.</u>

<u>Démonstration</u> : (1) ⇒ (2) est déjà signalé ci-dessus ; (2) ⇒ (1) : pour $n = 1$ f est Gateau différentiable dans U et f' est continue de U dans $L_b(E_1, E_2)$ donc d'après le th. 4 de [16] p. 293 f est continuement différentiable dans U au sens de Szczyrba [16]. Pour $n = 2$ même raisonnement avec f'.

On obtient donc les mêmes résultats qu'au § 2.

---o0o---

BIBLIOGRAPHIE

---o0o---

[1] V.I. AVERBUCK et O.G. SMOLYANOV - The various definitions of the derivative in linear topological spaces - Russian Math Surveys vol. 23 n°4 (1968) p. 67-113.

[2] W. BUCHER - Différentiabilité de la composition et complétitude de certains espaces fonctionnels. Comment. Math. Helv. 43 (1968) p. 256-268.

[3] J.F. COLOMBEAU - Un survol des applications actuelles du Calcul différentiel dans les espaces bornologiques. Seminaire d'initiation à l'Analyse -G. Choquet - Janvier 1971.

[4] J.F. COLOMBEAU - Sur les applications G-analytiques et analytiques en dimension infinie. Séminaire P. Lelong - année 1971-72 ; à paraître aux lecture Notes in Math. Springer.

[5] J.F. COLOMBEAU - Sur quelques particularités du calcul différentiel dans les espaces vectoriels topologiques et bornologiques. Revue Roumaine de Math. pures et appliquées tome XVIII N.R.1 p 3-17 (1973).

[6] J.F. COLOMBEAU - Différentiation et Bornologie - thèse - Bordeaux 1973.

[7] A. FROLICHER et W. BUCHER : Calculus in vector spaces without norm. Lecture Notes in Math n° 30 - 1966 - Springer.

[8] H. HOGBE-NLEND - Théorie des Bornologies et Applications. Lecture Notes in Math n° 213 - 1971 - Springer.

[9] H. HOGBE-NLEND - Les espaces de Fréchet - Schwartz et la propriété d'approximation. Comptes Rendus Acad. des Sciences de Paris t. 275, 1972, p. 1073-1075.

[10] J. KIJOWSKI - Existence of differentiable struture in the set of submanifolds. Studia Math t. 33 (1969) p. 93-108.

[11] J. KIJOWSKI et J. KOMOROVSKI - A differentiable structure in the set of the bundle sections over compact subsets. Studia Math. t. 32 (1969) p. 191-207.

[12] J. KIJOWSKI et W. SZCZYRBA - On differentiability in an important class of locally convex spaces. Studia Math t. 30 (1968) p. 247-257.

[13] D. LAZET - Applications analytiques dans les espaces bornologiques. Séminaire P. Lelong 1971-72 à paraître aux Lecture Notes in Math. Springer.

[14] G. MARINESCU - Différentielles de Gateau et de Fréchet dans les espaces localement convexes. Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R P R 1 (1957) p. 77-86.

[15] J. S. e SILVA - Conceitos de funçao differenciavel em espaços localmente convexos. Publ. Math. Lisbonne 1957.

[16] W. SZCZYRBA - Differentiation in locally convex spaces. Studia Math. tome XXXIX (1971) p. 289-306.

[17] D. PISANELLI - Applications analytiques en dimension infinie. Bull. Sci. Math. 96, 1972, p. 181-191.

---o0o---

Université de Bordeaux I
U.E.R. de Mathématiques et d'Informatique
351, Cours de la Libération
33405 TALENCE (France)