GÉRARD DUBOIS

La stabilité analytique en théorie spectrale

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1973, tome 10, fascicule 2
« Compte rendu des journées infinitistes », , p. 53-71
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1973__10_2_53_0>

II$^{\text{ème}}$ Coll. Anal. Fonct.
(1973, Bordeaux)
p. 53-71

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1973 t.10-2

LA STABILITE ANALYTIQUE EN THEORIE SPECTRALE

Gérard DUBOIS

Un des buts de la théorie spectrale des opérateurs continus sur un espace de Banach X est la recherche de décomposition en sous-espaces de l'espace X, en relation avec des parties du spectre de ces opérateurs. Une réponse à ce problème est donnée par C. FOIAS [F1] qui introduit la notion d'espace spectral maximal et en déduit la théorie des opérateurs décomposables.

L'étude d'exemples d'opérateurs (spectraux, préspectraux) conduisant à des décompositions de l'espace que la théorie de Foias ne permet pas a priori d'obtenir, ainsi qu'une analyse détaillée de la théorie des opérateurs décomposables, mettent en évidence le rôle essentiel joué par la notion d'opérateur à unique extension introduite par N. DUNFORD [D3, D4] et nous amènent à définir une notion nouvelle : celle d'espace analytiquement stable par un opérateur à unique extension T.

L'étude que nous faisons de ces espaces montre qu'il s'agit des "bons" espaces stables par un tel opérateur. L'application de cette notion à la théorie des opérateurs décomposables permet d'en obtenir une caractérisation plus souple dont nous nous servons pour obtenir ou retrouver certaines de leurs propriétés.

Une large part de cet article a été annoncée dans deux Notes aux Comptes Rendus [D6, D5].

Le premier chapitre est consacré à des rappels. Au chapitre 2, nous définissons la notion de *sous-espace analytiquement stable* par un opérateur T à unique extension. Nous montrons que cette famille de sous-espaces de X est strictement intermédiaire entre celle des sous-espaces stables par T et celle des espaces spectraux maximaux de T. Plusieurs exemples sont cités : opérateurs compacts, hermitiens,... pour lesquels les notions de sous-espaces stables et analytiquement stables coïncident. Nous nous attachons à caractériser complètement les espaces analytiquement stables et nous en étudions les propriétés de permanence.

Le chapitre 3 est consacré à une caractérisation des opérateurs analytiquement décomposables en termes d'espaces analytiquement stables et à l'application de ce résultat à l'étude des propriétés de permanence des opérateurs décomposables, ce qui nous permet, en les démontrant dans un autre esprit, de retrouver et de compléter les résultats obtenus par COLOJOARA et FOIAS [CF1]. Nous donnons une caractérisation des espaces analytiquement stables par un opérateur décomposable T qui est dans l'esprit de celle obtenue par C. FOIAS [F2] pour les espaces spectraux maximaux de T et nous introduisons la notion d'opérateur sous-décomposable.

Tout ce travail est effectué dans le cadre des espaces de Banach, mais la plupart des résultats (à l'exception du théorème (3.3.1)) peuvent se prolonger au cas des espaces localement convexes séparés quasi-complets [D6, D7, D5], en utilisant les travaux de WAELBROECK [W] , ALLAN [A1], BERRUYER [B2, B3, B1], VASILESCU [V].

1. - RAPPELS ET NOTATIONS.

Dans tout ce qui suit, X désigne un espace de Banach et $L(X)$ est l'algèbre de Banach des opérateurs continus sur X. Pour tout opérateur T de $L(X)$, on note $\sigma(T)$ son spectre et $\rho(T)$ son résolvant. Nous rappelons quelques notions classiques ; pour les détails nous renvoyons aux articles originaux [D3, D4, F1, F2] ou aux ouvrages spécialisés [DS III, CF 1].

1.1. <u>OPERATEURS BORNES</u>. - Un sous-espace fermé Y de X est dit *stable* par T si $TY \subset Y$. On note T/Y l'opérateur de $L(Y)$ restriction de T à Y.

Un sous-espace Y de X est dit *ultrastable* par T s'il est stable par tout opérateur qui commute avec T.

Un sous-espace Y de X est dit *espace spectral maximal* de T s'il est stable par T et si pour tout espace Z stable par T, la condition $\sigma(T/Z) \subset \sigma(T/Y)$ implique $Z \subset Y$.

On désigne par $\mathcal{H}(\sigma(T))$ l'espace des fonctions analytiques près du spectre $\sigma(T)$ et, pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$, on définit l'opérateur $f(T) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)(\lambda - T)^{-1}d\lambda$ où Γ est un contour $\sigma(T)$-admissible.

1.2. <u>OPERATEURS A UNIQUE EXTENSION</u>. - Un opérateur T de $L(X)$ est dit à *unique extension* si toute fonction analytique f définie sur un ouvert D du plan complexe, à valeurs dans X, vérifiant $(\lambda - T)f(\lambda) \equiv 0$ sur D est identiquement nulle.

Pour tout x X, on note $\rho_T(x)$ le plus grand ouvert du plan complexe sur lequel est définie une fonction analytique $\tilde{x}_T$ à valeurs dans X telle que $(\lambda - T)\tilde{x}_T(\lambda) \equiv x$. On note $\sigma_T(x)$ le complémentaire de $\rho_T(x)$ dans $\mathbb{C}$ et $X_T(F)$ le sous-espace vectoriel de X défini par $X_T(F) = \{x \in X \ ; \ \sigma_T(x) \subset F\}$ où F est un fermé de $\mathbb{C}$.

1.3. <u>OPERATEURS SEMBLABLES</u>. - Soient X_1 et X_2 deux espaces de Banach, T_1 et T_2 deux opérateurs de $L(X_1)$ et $L(X_2)$. Les opérateurs T_1 et T_2 sont *semblables* s'il existe un isomorphisme R de X_1 sur X_2 tel que $RT_1 = T_2R$. Dans ce cas, pour tout sous-espace Y de X stable par T_1, l'image RY est stable par T_2 et de plus $\sigma(T_1/Y) = \sigma(T_2/RY)$. Si l'un des deux opérateurs est à unique extension, alors l'autre l'est aussi et pour tout $x \in X_1$, on a $\sigma_{T_1}(x) = \sigma_{T_2}(Rx)$.

1.4. <u>OPERATEURS DECOMPOSABLES</u>. - Un opérateur T de $L(X)$ est *décomposable* lorsque pour tout recouvrement ouvert fini $\{G_i\}_{1 \leq i \leq n}$ du spectre $\sigma(T)$, il existe un système $\{Y_i\}_{1 \leq i \leq n}$ d'espaces spectraux maximaux de T, tel que :

(a) $\sigma(T/Y_i) \subset G_i$ pour tout i ;

(b) $X = \sum Y_i$.

2. - SOUS-ESPACES DE X ANALYTIQUEMENT STABLES PAR UN OPERATEUR A UNIQUE EXTENSION T.

Dans tout ce chapitre, T désigne un opérateur à unique extension sur X.

2.1. DEFINITION ET EXEMPLES.

(2.1.1) DEFINITION. - *Un sous-espace vectoriel* Y *de* X *est dit analytiquement stable par* T *si :*

(i) Y *est fermé.*

(ii) Pour tout $x \in Y$ *et pour tout* $\lambda \in \rho_T(x)$ *on a* $\tilde{x}_T(\lambda) \in Y$.

(2.1.2) REMARQUE. - L'hypothèse (i) est essentielle pour les applications et n'est pas une conséquence de (ii). En effet, on voit que le sous-espace $X_T(F)$ vérifie (ii) pour tout fermé F de $\mathbb{C}$, mais il peut ne pas être fermé comme le montre la proposition (1.3.9) de [CF1].

(2.1.3) THEOREME. - *Tout espace spectral maximal de* T *est analytiquement stable par* T.

Ce résultat traduit en termes de stabilité analytique le théorème (2.2) de [F1] qui est la clef de voûte de la théorie des opérateurs décomposables.

(2.1.4) THEOREME. - *Si* p *est un projecteur continu qui commute avec* T*, les espaces* Im p *et* Ker p *sont analytiquement stables par* T.

Preuve. - Car $(\lambda-T)p\tilde{x}_T(\lambda) \equiv px$ pour tout $\lambda \in \rho_T(x)$ et tout $x \in \text{Im } p$.

(2.1.5) COROLLAIRE. - *Si* T *est un opérateur préspectral* (BD) *sur* X*, alors, pour toute résolution préspectrale* $\mu(.)$ *de* T *et pour tout borélien* δ *de* $\mathbb{C}$*, l'espace* $\mu(\delta)X$ *est analytiquement stable par* T.

(2.1.6) REMARQUE. - Ce résultat est en particulier vrai pour les opérateurs spectraux de N. DUNFORD [D3].

(2.1.7) THEOREME. - *Tout sous-espace* Y *analytiquement stable par* T *est stable par* f(T) *lorsque* f *est une fonction de* $\mathcal{H}(\sigma(T))$. *En particulier* Y *est stable par* T *et* $\sigma(T/Y) \subset \sigma(T)$.

Preuve. - Pour tout $x \in Y$, on a $f(T)x = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)(\lambda-T)^{-1}x\,d\lambda$ où Γ est un cycle $\sigma(T)$-admissible. Par ailleurs $(\lambda-T)^{-1}x = \tilde{x}_T(\lambda)$ sur $\rho(T)$, donc Y est stable par

$(\lambda-T)^{-1}$ lorsque λ parcourt $\rho(T)$. Alors d'après la condition (i) de (2.1.1), Y est stable par $f(T)$.

(2.1.8) EXEMPLES DE SOUS-ESPACES STABLES ET NON ANALYTIQUEMENT STABLES :

Ex. 1 : Soient H un espace de Hilbert séparable et $\{e_n\}_{n\in Z}$ une base hilbertienne de H indexée sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers rationnels. On considère l'opérateur unitaire U défini par $Ue_n = e_{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$. Le sous-espace vectoriel fermé Y de H engendré par les vecteurs e_n pour $n\geqslant 1$ est stable par U mais n'est pas analytiquement stable car il ne vérifie pas $\sigma(U / Y)\subset\sigma(U)$.

Ex. 2 : Pour tout x X on note $[x]$ le sous-espace fermé engendré par $\{(\lambda-T)^{-1}x \; ; \; \lambda\in\rho(T)\}$ et on sait [D4, F5] que $[x]$ est stable par T. Mais en reprenant l'exemple (2.6) de FIXMAN [F5] on voit que $[x]$ peut ne pas être analytiquement stable, bien que l'on ait toujours $\sigma(T/[x])\subset\sigma(T)$.

(2.1.9) EXEMPLES DE SOUS-ESPACES ANALYTIQUEMENT STABLES ET NON ULTRASTABLES :

Ex. 3 : Dans l'article [BD], BERKSON et DOWSON construisent sur l'espace de Banach ℓ^∞ un opérateur préspectral S associé à une résolution préspectrale $E(.)$, de classe $\Gamma = \ell^1$ et dont le spectre $\sigma(S)$ est formé des points 1 et $\frac{n-2}{n-1}$ pour $n\geqslant 3$. Ils construisent ensuite un opérateur A sur ℓ^∞ qui commute avec S, mais qui ne commute pas avec le projecteur $E(\{1\})$. On vérifie alors que le sous-espace $Y = \operatorname{Ker} E(\{1\})$ est analytiquement stable par S, mais n'est pas stable par A. Il en résulte a fortiori que Y n'est pas un espace spectral maximal de S.

Ex. 4 : Reprenons l'exemple donné par DOWSON dans [D1] page 455. Dans cet exemple, on voit qu'il existe un espace de Hilbert H, un opérateur spectral T sur H de spectre $\sigma(T) = [0,1]$ et un sous-espace Y de H stable par T tel que T/Y n'est pas spectral. En utilisant le théorème (1.12) suivant, on voit que Y est analytiquement stable par T. Mais, T/Y n'étant pas spectral, Y n'est pas ultrastable par T ; par ailleurs, aucun projecteur associé à Y ne commute avec T.

(2.1.10) REMARQUE. - La famille des sous-espaces de X analytiquement stables par T apparaît comme intermédiaire entre la famille des espaces stables par T et celle des espaces spectraux maximaux de T selon le schéma :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \text{Espaces spectraux maximaux} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\ \text{Espaces ultrastables} \arrow[dr, Rightarrow] & & \text{Espaces analytiquement stables} \arrow[dl, Rightarrow] \\ & \text{Espaces stables} & \end{tikzcd}$$

Nous terminons ce paragraphe en donnant des conditions suffisantes pour que les espaces stables d'un opérateur à unique extension T soient analytiquement stables.

(2.1.11) <u>THEOREME</u>. - *Si* Y *est un sous-espace stable par* T *tel que* $\sigma(T/Y)$ *soit rare dans* $\mathbb{C}$, *alors* Y *est analytiquement stable par* T.

Preuve. - Soit x un élément de Y, il suffit de considérer deux cas : si $\lambda \in \rho(T/Y)$ alors nécessairement $\tilde{x}_T(\lambda) = (\lambda - T/Y)^{-1}x$ est élément de Y et si $\lambda \in \rho_T(x) \cap \sigma(T/Y)$, λ est limite d'une suite (λ_n) de points de $\rho(T/Y)$ et $\tilde{x}_T(\lambda)$ est limite de la suite $\tilde{x}_T(\lambda_n)$ de points de Y.

(2.1.12) <u>COROLLAIRE 1</u>. - *Si* T *est un opérateur de* L(X) *dont le spectre* $\sigma(T)$ *est rare et le résolvant* $\rho(T)$ *connexe, alors tout sous-espace* Y *de* X *stable par* T *est analytiquement stable par* T.

Preuve. - $\sigma(T)$ est rare, donc T est à unique extension. De plus $\sigma(T/Y) \subset \sigma(T)$ puisque $\rho(T)$ est connexe [D1].

(2.1.13) <u>EXEMPLES</u>. - Les opérateurs hermitiens sur un espace de Hilbert H, les opérateurs compacts sur un espace de Banach, etc...

(2.1.14) <u>COROLLAIRE 2</u>. - *Tout sous-espace de dimension finie de* X, *stable par un opérateur à unique extension* T, *est analytiquement stable par* T.

(2.1.15) <u>COROLLAIRE 3</u>. - *On suppose que l'opérateur* T *est solution d'une équation algébrique* $q(T) = 0$, q *étant un polynôme de degré* n. *Alors tout sous-espace fermé de* X *stable par* T *est analytiquement stable par* T *ce qui se produit en particulier si* T *est un projecteur continu sur* X.

Preuve. - On sait que $\sigma(T)$ est contenu dans l'ensemble des racines de q.

(2.1.16) <u>REMARQUE</u>. - Si $\sigma(T)$ est rare et $\rho(T)$ non connexe, T peut posséder des espaces stables non analytiquement stables, comme le montre l'exemple 1.

2.2. CARACTERISATION DES ESPACES ANALYTIQUEMENT STABLES.

(2.2.1) PROPOSITION. - *Si* Y *est un sous-espace de* X *analytiquement stable par* T, *alors, pour tout* $x \in Y$, *on a* $\rho_T(x) = \rho_{T/Y}(x)$.

Preuve. - On voit rapidement que $\rho_{T/Y}(x) \subset \rho_T(x)$. D'autre part, sur $\rho_T(x)$ nous avons $(\lambda - T)\tilde{x}_T(\lambda) \equiv x$ et $\tilde{x}_T(\lambda) \in Y$ puisque Y est analytiquement stable, donc $\rho_T(x) \subset \rho_{T/Y}(x)$.

Nous déduisons de cette proposition une caractérisation très simple des espaces analytiquement stables.

(2.2.2) THEOREME. - *Les sous-espaces de* X *analytiquement stables par* T *sont exactement les sous-espaces fermés* Y *stables par* T *tels que pour tout* $x \in Y$ *on ait* $\rho_T(x) = \rho_{T/Y}(x)$.

Preuve. - Supposons Y stable par T et tel que $\rho_T(x) = \rho_{T/Y}(x)$ pour tout $x \in Y$. Alors $(\lambda - T/Y)\tilde{x}_{T/Y}(\lambda) \equiv x \equiv (\lambda - T)\tilde{x}_T(\lambda)$ sur $\rho_T(x) = \rho_{T/Y}(x)$.

(2.2.3) NOTATION. - Pour tout $x \in X$, on note $ev_T(x)$ le sous-espace vectoriel fermé de X engendré par $\tilde{x}_T(\lambda)$ quand λ parcourt $\rho_T(x)$; $x \in ev_T(x)$ car $x = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \tilde{x}_T(\lambda)d\lambda$ où Γ est un contour $\sigma(T/ev_T(x))$-admissible. Un sous-espace Y de X est donc analytiquement stable par T si et seulement si $ev_T(x) \subset Y$ pour tout $x \in Y$, d'où le résultat suivant.

(2.2.4) PROPOSITION. - *Un sous-espace fermé* Y *de* X *est analytiquement stable par* T *si et seulement si* Y *est engendré par la réunion des espaces* $ev_T(x)$ *quand* x *parcourt* Y.

Preuve. - Appelons Z le sous-espace fermé de X engendré par la réunion des $ev_T(x)$ quand x parcourt Y. Si Y=Z, alors Y est analytiquement stable. Réciproquement, si Y est analytiquement stable, alors $Z \subset Y$, et si $x \in Y$, on sait que $x \in ev_T(x)$, donc Z=Y.

2.3. PROPRIETES DE PERMANENCE.

(2.3.1) PROPOSITION. - *Une intersection quelconque d'espaces analytiquement stables par* T *est analytiquement stable.*

(2.3.2) PROPOSITION. - *Soient* Y *un sous-espace de* X *analytiquement stable par* T *et* Z *un sous-espace stable par* T *tel que* $Z \subset Y$. *Pour que* Z *soit analytiquement stable par* T, *il faut et il suffit qu'il le soit par* T/Y.

Preuve. - Si Z est analytiquement stable par T, pour tout $x \in Z$ on a $\sigma_T(x) = \sigma_{T/Z}(x)$; or $\sigma_T(x) = \sigma_{T/Y}(x)$ donc $\sigma_{T/Z}(x) = \sigma_{T/Y}(x)$. Réciproquement si pour tout $x \in Z$ on a $\sigma_{T/Y}(x) = \sigma_{T/Z}(x)$, alors $\sigma_T(x) = \sigma_{T/Z}(x)$.

(2.3.3) PROPOSITION. - *Soient* X_1 *et* X_2 *deux espaces de Banach,* T_1 *et* T_2 *deux opérateurs à unique extension respectivement sur* X_1 *et* X_2 , Y_1 *et* Y_2 *deux espaces analytiquement stables respectivement par* T_1 *et* T_2, *alors* $Y_1 \oplus Y_2$ *est analytiquement stable par* $T_1 \oplus T_2$.

Preuve. - Un calcul simple montre que si $x_1 \oplus x_2 \in Y_1 \oplus Y_2$ on a $\sigma_{T_1 \oplus T_2}(x_1 \oplus x_2) = \sigma_{T_1 \oplus T_2 / Y_1 \oplus Y_2}(x_1 \oplus x_2)$.

(2.3.4) PROPOSITION. - *Soient* X_1 *et* X_2 *deux espaces de Banach,* T_1 *et* T_2 *deux opérateurs à unique extension respectivement sur* X_1 *et* X_2 *et* R *un isomorphisme de* X_1 *sur* X_2 *tel que* $RT_1 = T_2R$. *Si* Y *est un espace analytiquement stable par* T_1, *alors* RY *est un espace analytiquement stable par* T_2.

Preuve. - Pour tout $x \in RY$ on a $\sigma_{T_2}(x) = \sigma_{T_1}(R^{-1}x)$ (rappels, chapitre 1) et $\sigma_{T_1}(R^{-1}x) = \sigma_{T_1/Y}(R^{-1}x)$; les opérateurs T_1/Y et T_2/RY sont semblables et $\sigma_{T_1/Y}(R^{-1}x) = \sigma_{T_2/RY}(x)$ ce qui montre que $\sigma_{T_2}(x) = \sigma_{T_2/RY}(x)$.

(2.3.5) PROPOSITION. - *Si* $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$, *tout sous-espace de* X *analytiquement stable par* T *est aussi analytiquement stable par l'opérateur* f(T).

Preuve. - On remarque que $f \in \mathcal{H}(\sigma(T/Y))$, ce qui permet d'introduire l'opérateur f(T/Y) qui est égal à f(T)/Y d'après le théorème (2.1.7), puis on utilise l'égalité $f(\sigma_T(x)) = \sigma_{f(T)}(x)$ pour tout $x \in Y$.

(2.3.6) PROPOSITION. - *Soient* T *un opérateur à unique extension sur* X, p *un projecteur continu commutant avec* T *et* Y *un espace analytiquement stable par* T *et stable par* p, *alors* pY *est un espace analytiquement stable par* T/Y *et par* T.

Preuve. - Notons tout d'abord que pY est fermé. Ensuite, pour tout $x \in pY \subset Y$ et pour tout $\lambda \in \rho_T(x)$, nous avons $(\lambda - T)p\tilde{x}_T(\lambda) \equiv x$, donc $\tilde{x}_T(\lambda) = p\tilde{x}_T(\lambda)$ sur $\rho_T(x)$ et $\tilde{x}_T(\lambda) \in pY$.

2.4. APPLICATIONS A L'ETUDE DES ESPACES SPECTRAUX MAXIMAUX.

(2.4.1) PROPOSITION. - *Si* Z *et* Y *sont analytiquement stables par* T *et si* $Z \subset Y$, *alors* $\sigma(T/Z) \subset \sigma(T/Y)$.

Preuve. - Il suffit d'appliquer le théorème (2.1.7) et la proposition (2.3.2).

(2.4.2) REMARQUE. - Cette propriété de croissance sur les spectres lorsqu'on a croissance sur les espaces, et qui peut être fausse si Z est seulement supposé stable (ex. 1 de (2.1.8)), nous conduit à définir la notion d'espace analytiquement stable maximal.

(2.4.3) DEFINITION. - *Un espace* Y, *analytiquement stable par* T, *est dit espace analytiquement stable maximal de* T *si pour tout espace* Z *analytiquement stable par* T *on a :*

$$\sigma(T/Z) \subset \sigma(T/Y) \Rightarrow Z \subset Y$$

(2.4.4) REMARQUE. - Tout espace spectral maximal de T est un espace analytiquement stable maximal de T et nous avons la réciproque suivante :

(2.4.5) THEOREME. - *Si pour tout fermé* F *de* $\sigma(T)$ *l'espace* $X_T(F)$ *est fermé, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) Y *est un espace analytiquement stable maximal de* T.

(b) Y *est un espace spectral maximal de* T.

Preuve. - Il suffit de montrer (a) $\Longrightarrow$ (b). Si $x \in Y$, $\sigma_T(x) = \sigma_{T/Y}(x) \subset \sigma(T/Y)$ et $Y \subset X_T(\sigma(T/Y))$; par ailleurs $\sigma(T/X_T(\sigma(T/Y))) \subset \sigma(T/Y)$ donc $Y = X_T(\sigma(T/Y))$.

Nous prolongeons maintenant aux opérateurs à unique extension, un résultat connu pour les opérateurs décomposables.

(2.4.6) PROPOSITION. - *Une intersection quelconque d'espaces spectraux maximaux d'un opérateur* T *à unique extension est un espace spectral maximal de* T.

Preuve. - Soit $\{Y_i\}_{i\in I}$ une famille quelconque d'espaces spectraux maximaux de T, on pose $Z = \bigcap_{i\in I} Y_i$. Déjà Z est analytiquement stable par T, et pour tout espace Y stable par T vérifiant $\sigma(T/Y) \subset \sigma(T/Z)$ on a $\sigma(T/Y) \subset \sigma(T/Y_i)$ pour tout $i \in I$, ce qui suffit.

Nous terminons en donnant une nouvelle propriété d'hérédité des espaces spectraux maximaux.

(2.4.7) THEOREME. - *Si* Y *est un espace analytiquement stable par* T *et* Z *un* *espace spectral maximal de* T, *alors* $Y \cap Z$ *est un espace spectral maximal de* T/Y.

Preuve. - L'espace $Y \cap Z$ est analytiquement stable par T donc par T/Y. De plus $\sigma(T/Y \cap Z) \subset \sigma(T/Z)$. Si Z_1 est un sous-espace de Y stable par T/Y tel que $\sigma(T/Z_1) \subset \sigma(T/Y \cap Z)$, alors $Z_1 \subset Y \cap Z$.

(2.4.8) PROPOSITION. - *Pour tout fermé* F *du plan complexe, on a*

$$Y \cap X_T(F) = Y_{T/Y}(F).$$

Preuve. - $x \in Y \cap X_T(F)$ si et seulement si $x \in Y$ et $\sigma_T(x) = \sigma_{T/Y}(x) \subset F$, et ceci équivaut à dire que $x \in Y_{T/Y}(F)$.

3. - UNE CARACTERISATION NOUVELLE DES OPERATEURS DECOMPOSABLES - APPLICATIONS.

3.1. OPERATEURS ANALYTIQUEMENT DECOMPOSABLES.

(3.1.1) DEFINITION. - *On dit qu'un opérateur à unique extension* T *est analytiquement décomposable lorsque pour tout recouvrement ouvert fini* $\{G_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ *du spectre* $\sigma(T)$, *il existe un système* $\{Y_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ *de sous-espaces de* X *analytiquement stables par* T, *tel que :*

(a) $\sigma(T/Y_i)\subset G_i$ *pour tout* i *;*

(b) $X = \sum_{i=1}^{i=n} Y_i$.

(3.1.2) REMARQUE. - Tout opérateur décomposable au sens de FOIAS (F1) est à unique extension et les espaces spectraux maximaux de T sont analytiquement stables par T ce qui montre que T est analytiquement décomposable.

(3.1.3) REMARQUE. - Le spectre $\sigma(T)$ étant normal, on voit facilement que la condition (a) de la définition précédente peut être remplacée par la condition moins restrictive suivante :

(a') $\sigma(T/Y_i)\subset \overline{G}_i$ pour tout i.

3.2. RELATION AVEC LES OPERATEURS DECOMPOSABLES.

(3.2.1) THEOREME. - *Soient* T *un opérateur analytiquement décomposable et* F *un fermé contenu dans* $\sigma(T)$. *On note* ϕ_F *l'ensemble des couples* $\varphi = (G,G')$ *d'ouverts tels que :*

(1) $\sigma(T)\subset G\cup G'$;

(2) $F\subset G$ et $\overline{G'}\cap F = \emptyset$.

A chaque φ *appartenant à* ϕ_F *on associe une décomposition* $X = Y_\varphi + Y'_\varphi$ *de* X *en sous-espaces analytiquement stables par* T *vérifiant* $\sigma(T/Y_\varphi)\subset G$ *et* $\sigma(T/Y'_\varphi)\subset G'$. *Alors :*

(a) $X_T(F) = \bigcap_{\varphi\in\phi_F} Y_\varphi$.

(b) $X_T(F)$ *est fermé et analytiquement stable par* T.

Preuve. - Soient x un point de $X_T(F)$ et φ un élément de ϕ_F, on peut écrire $x = y_\varphi + y'_\varphi$ avec $y_\varphi \in Y_\varphi$ et $y'_\varphi \in Y'_\varphi$; F est un compact du spectre $\sigma(T)$ et $F\subset \complement\overline{G'}$. Soit Γ un cycle $(F, \complement\overline{G'})$-admissible, nous avons $\Gamma\subset \rho_T(x)\cap\rho(T/Y'_\varphi)$ car d'une part Γ est dans $\rho_T(x)$, d'autre part $\Gamma\subset\complement\overline{G'}\subset\rho(T/Y'_\varphi)$; de plus $\rho(T/Y'_\varphi)\subset\rho_{T/Y'_\varphi}(y'_\varphi) = \rho_T(y'_\varphi)$ (Y'_φ est analytiquement stable par T) et

$\rho_T(x) \cap \rho(T/Y'_\varphi) \subset \rho_T(x) \cap \rho_T(y'_\varphi) \subset \rho_T(x-y'_\varphi) = \rho_T(y_\varphi)$. Sur Γ on peut écrire :

$$\tilde{y}_{\varphi\,T}(\lambda) = \tilde{x}_T(\lambda) - \tilde{y}'_{\varphi\,T}(\lambda) - \tilde{x}_T(\lambda) - (\lambda - T/Y'_\varphi)^{-1} y'_\varphi$$

et lorsqu'on intègre sur Γ, il vient :

$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \tilde{y}_{\varphi\,T}(\lambda)d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \tilde{x}_T(\lambda)d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda - T/Y'_\varphi)^{-1} y'_\varphi\, d\lambda = x$, car la dernière intégrale est nulle ($\sigma(T/Y'_\varphi)$ est à l'extérieur de Γ) et $x = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \tilde{x}_T(\lambda)d\lambda$.

Pour tout λ appartenant à $\Gamma \subset \rho_T(y_\varphi)$, l'élément $\tilde{y}_{\varphi\,T}(\lambda)$ appartient à Y_φ puisque cet espace est analytiquement stable par T ; comme $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \tilde{y}_{\varphi\,T}(\lambda)d\lambda$ est la limite de sommes finies du type

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{k=n} (\lambda_{k+1} - \lambda_k)\tilde{y}_{\varphi\,T}(\lambda_k)$$

on voit que x appartient à Y_φ et $X_T(F)$ est inclus dans l'intersection de tous les espaces Y_φ. Réciproquement, si $x \in \bigcap_{\varphi\in\Phi_F} Y_\varphi$, alors $x \in Y_\varphi$ et

$\sigma_T(x) \subset \sigma(T/Y_\varphi) \subset G$ pour tout ouvert G contenant F, donc $\sigma_T(x) \subset F$ et x appartient à $X_T(F)$ ce qui montre que $X_T(F) = \bigcap_{\varphi\in\Phi_F} Y_\varphi$.

(3.2.2) COROLLAIRE. - *Lorsque* T *est un opérateur analytiquement décomposable et* F *un fermé du spectre* $\sigma(T)$, *alors* $X_T(F)$ *est un espace spectral maximal de* T *et* $\sigma(T/X_T(F)) \subset F$. *De plus tout espace spectral maximal* Y *de* T *s'écrit* $Y = X_T(\sigma(T/Y))$.

Preuve. - $X_T(F)$ étant fermé, on applique la proposition (1.3.8) de [CF1]. Enfin, si Y est un espace spectral maximal de T, on a $\sigma(T/Y) = \sigma(T/X_T(\sigma(T/Y)))$, d'où le résultat.

(3.2.3) THEOREME. - *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) T *est un opérateur analytiquement décomposable.*

(b) T *est un opérateur décomposable.*

Preuve. - Il suffit de montrer (a) $\Rightarrow$ (b). Soit $\{G_i\}_{1\leq i\leq n}$ un recouvrement ouvert fini de $\sigma(T)$, il existe un système $\{Y_i\}_{1\leq i\leq n}$ de sous-espaces analytiquement stables par T tel que $X = \sum_{i=1}^{i=n} Y_i$ et tel que, pour tout i, $\sigma(T/Y_i) \subset G_i$.

Comme pour tout i, l'espace Y_i est contenu dans l'espace spectral maximal $Z_i = X_T(\sigma(T/Y_i))$, on voit que l'opérateur T est décomposable.

(3.2.4) EXEMPLE : Opérateurs préspectraux [BD]. - Soit T un opérateur préspectral de classe (Γ), avec une résolution préspectrale de classe (Γ) notée $\mu(.)$. Pour tout recouvrement ouvert fini $\{G_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ de $\sigma(T)$, il existe une partition borélienne $\{\delta_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ de $\sigma(T)$ telle que $\overline{\delta_i}\subset G_i$ pour tout i. On a $X = \bigoplus_1^n \mu(\delta_i)X$ et $\sigma(T/\mu(\delta_i)X)\subset\overline{\delta_i}\subset G_i$ pour tout i ; l'opérateur T étant à unique extension et les espaces $\mu(\delta_i)X$ étant analytiquement stables par T, on retrouve le fait que T est décomposable, les $\mu(\delta_i)X$ n'étant pas obligatoirement des espaces spectraux maximaux.

3.3. UNE CARACTERISATION DES ESPACES ANALYTIQUEMENT STABLES D'UN OPERATEUR DECOMPOSABLE.

(3.3.1) THEOREME. - *Soient* T *un opérateur décomposable sur* X *et* Y *un sous-espace fermé de* X. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) Y *est analytiquement stable par* T.

(b) Pour tout $x\in Y$ *et pour tout réel* $\varepsilon>0$, *il existe une fonction* f_ε *analytique sur* $\rho_T(x)$, *à valeurs dans* Y, *telle que* $\|(\lambda-T)f_\varepsilon(\lambda) - x\| < \varepsilon$ *sur* $\rho_T(x)$.

(c) Pour tout $x\in Y$, *pour tout réel* $\varepsilon>0$ *et pour tout compact* K *de* $\rho_T(x)$, *il existe une fonction* $f_{\varepsilon,K}$ *analytique sur un voisinage ouvert de* K, *à valeurs dans* Y *et telle que* $\|(\lambda-T)f_{\varepsilon,K}(\lambda) - x\| < \varepsilon$ *sur* K.

Preuve. - On voit que (a) $\Rightarrow$(b) $\Rightarrow$(c). Pour montrer (c) $\Rightarrow$(a), on va utiliser des techniques mises au point successivement par BISHOP[B4], FRUNZA [F4], FOIAS [F2] et nous utilisons en particulier un résultat dû à FOIAS [F2] qui est énoncé sans démonstration.

(3.3.2) LEMME (FOIAS). - *Soit* T *un opérateur décomposable sur* X. *Si* $\{f_n\}$ *est une suite de fonctions analytiques à valeurs dans* X, *définies sur un ouvert* G *de* $\mathbb{C}$, *telles que* $(\lambda-T)f_n(\lambda) \to 0$ *dans* X, *uniformément sur tout compact de* G, *alors* $f_n \to 0$ *uniformément sur tout compact de* G.

Montrons (c) $\Rightarrow$(a). Soient $x\in Y$ et G un ouvert relativement compact tel que $\overline{G}\subset\rho_T(x)$; pour $\varepsilon = \frac{1}{n}$ il existe une fonction f_n analytique sur un voisinage de $\overline{G}$ à valeurs dans Y, telle que $\|(\lambda-T)f_n(\lambda) - x\| < \frac{1}{n}$ sur $\overline{G}$. Supposons qu'il existe un compact K de G sur lequel la suite $\{f_n\}$ ne soit pas uniformément convergente ; il existe alors un réel ε positif, une suite $\{\lambda_i\}$ de points de K et des suites d'indices $\{n_i\}$, $\{m_i\}$ définies par $n_1 < m_1 < n_2 < m_2 \ldots . n_i < m_i \ldots$ telles que $\| f_{m_i}(\lambda_i) - f_{n_i}(\lambda_i) \| > \varepsilon$. Posons $g_i = f_{m_i} - f_{n_i}$, $\{g_i\}$ est une suite de fonctions analytiques sur G, à valeurs dans X telle que $(\lambda-T)g_i(\lambda) \to 0$ dans X, uniformément sur tout compact de G, puisque $\{(\lambda-T)f_n(\lambda)\}$ est une suite de Cauchy uniforme sur $\overline{G}$. D'après le lemme de Foias, la suite $\{g_i\}$ converge vers 0 uniformément sur K, d'où une contradiction, ce qui montre que la suite $\{f_n\}$ converge uniformément sur tout compact K de G. Pour tout λ appartenant à G on pose $f(\lambda) = \lim_{n\to\infty} f_n(\lambda)$; f est une fonction analytique sur G qui vérifie $(\lambda-T)f(\lambda) \equiv x$ et $f(\lambda)$ est la limite d'une suite $\{f_n(\lambda)\}$ de points de l'espace fermé Y, donc $f(\lambda)$ appartient à Y lorsque λ parcourt G. Comme T est un opérateur à unique extension, il existe sur $\rho_T(x)$ une unique fonction analytique $\tilde{x}_T$ à valeurs dans X telle que $(\lambda-T)\tilde{x}_T(\lambda) \equiv x$ et d'après ce qui précède $\tilde{x}_T$ est à valeurs dans Y lorsque λ parcourt $\rho_T(x)$.

3.4. OPERATEURS SOUS-DECOMPOSABLES.

(3.4.1) DEFINITION. - *Un opérateur* T *sur* X *est dit sous-décomposable s'il est à unique extension et si, pour tout recouvrement ouvert fini* $\{G_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ *du spectre* $\sigma(T)$ *il existe un système de sous-espaces analytiquement stables par* T, *noté* $\{Y_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ *tel que :*

(a) $\sigma(T/Y_i) \subset G_i$ *pour tout* i.

(b) Pour tout sous-espace Y *de* X *analytiquement stable par* T, *on a*

$$Y = \Sigma Y \cap Y_i .$$

(3.4.2) REMARQUE 1. - Si T est un opérateur sous-décomposable, il est décomposable.

(3.4.3) REMARQUE 2. - Cette notion constitue une extension de la notion d'opérateur "strongly decomposable" introduite par APOSTOL dans [A3].

(3.4.4) PROPOSITION. - *La restriction* T/Y *d'un opérateur* T *sous-décomposable à un sous-espace* Y *de* X *analytiquement stable par* T, *est encore sous-décomposable.*

Preuve. - On sait déjà que l'opérateur T/Y est à unique extension. Soient

$\{G_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ un recouvrement ouvert fini de $\sigma(T/Y)$, G_o un ouvert ne coupant pas $\sigma(T/Y)$ et tel que $\{G_i\}_{o\leqslant i\leqslant n}$ forme un recouvrement ouvert de $\sigma(T)$. L'opérateur T étant sous-décomposable, on peut trouver un système de sous-espaces analytiquement stables par T, noté $\{X_i\}_{o\leqslant i\leqslant n}$ tel que, pour $o\leqslant i\leqslant n$, on ait $\sigma(T/X_i)\subset G_i$ et $Y = \sum_{i=o}^{i=n} Y\cap X_i$. Comme l'espace $Y_i = Y\cap X_i$ est analytiquement stable par T, il l'est par T/Y ; de plus, $\sigma(T/Y_o)\subset G_o\cap\sigma(T/Y) = \emptyset$, donc $Y_o = \{0\}$; pour tout sous-espace Z de Y, analytiquement stable par T/Y, (Z est aussi un sous-espace de X analytiquement stable par T) on peut alors écrire :

$$\sum_{i=1}^{i=n} Z\cap Y_i = \sum_{i=1}^{i=n} Y\cap X_i\cap Z = \sum_{i=1}^{i=n} Z\cap X_i = Z$$

avec $\sigma(T/Y_i)\subset\sigma(T/X_i)\subset G_i$ pour tout i $(1\leqslant i\leqslant n)$.

(3.4.5) <u>THEOREME</u>. - *Pour qu'un opérateur* T *soit sous-décomposable, il faut et il suffit que pour tout espace* Y *analytiquement stable par* T, *l'opérateur* T/Y *soit décomposable.*

Preuve. - La condition nécessaire vient de la proposition précédente. Réciproquement, si pour tout espace Y analytiquement stable par T, l'opérateur T/Y est décomposable, on voit, en prenant Y=X que l'opérateur T est décomposable ; en outre pour tout recouvrement ouvert fini $\{G_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ de $\sigma(T)$, donc de $\sigma(T/Y)$, il existe un système $\{Y_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ d'espaces analytiquement stables par T/Y donc par T tel que $Y = \sum_{i=1}^{i=n} Y\cap Y_i$ et $\sigma(T/Y_i) = \sigma(T/Y/Y_i)\subset G_i$ ce qui montre que l'opérateur T est sous-décomposable.

Nous terminons ce paragraphe en donnant l'analogue du théorème (3.1.6) de APOSTOL [A3].

(3.4.6) <u>THEOREME</u>. - *Soient* $T\in L(X)$ *et* f *une fonction de* $\mathcal{H}(\sigma(T))$ *tels que* f(T) *soit un opérateur sous-décomposable. Si* f *est localement non constante dans* $\sigma(T)$ *(voir définition (3.1.5) de* [A3]*) alors* T *est un opérateur sous-décomposable.*

Preuve. - D'après le théorème (3.4.5), il suffit de montrer que l'opérateur T/Y est décomposable pour tout espace Y analytiquement stable par T. En fait, Y est stable par f(T), donc f(T/Y) = f(T)/Y est décomposable par hypothèse, donc T/Y l'est aussi d'après le théorème (3.1.5) de [A3].

3.5. OPERATEURS DECOMPOSABLES ET SIMILITUDE. - Soient X_1 et X_2 deux espaces de Banach.

(3.5.1) THEOREME. - *Si T_1 est un opérateur décomposable sur X_1 et T_2 un opérateur de $L(X_2)$ semblable à T_1 alors T_2 est décomposable.*

Preuve. - Nous nous proposons de démontrer ce résultat, énoncé sans démonstration dans [CF1], en utilisant la notion d'espace analytiquement stable.

Par hypothèse, il existe un isomorphisme R de X_1 sur X_2 tel que $T_2R = RT_1$ et si Y est analytiquement stable par T_1, RY est alors analytiquement stable par T_2. L'opérateur T_1 étant décomposable, pour tout recouvrement fini du spectre $\sigma(T_1) = \sigma(T_2)$ par des ouverts $\{G_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$, il existe un système $\{Y_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ d'espaces analytiquement stables par T_1 tels que $X_1 = \sum_{i=1}^{i=n} Y_i$ et $\sigma(T_1/Y_i)\subset G_i$ pour tout i ; mais $\sigma(T_1/Y_i) = \sigma(T_2/RY_i)$ et $X_2 = \sum_{i=1}^{i=n} RY_i$, d'où la conclusion.

3.6. ETUDE DES OPERATEURS T_p et T^p, T ETANT UN OPERATEUR DECOMPOSABLE ET p UN PROJECTEUR CONTINU SUR X TEL QUE $pT = Tp$. - Le résultat concernant l'opérateur T_p se trouve démontré différemment dans [A3].

(3.6.1) THEOREME (APOSTOL). - *L'opérateur T_p est décomposable.*

Preuve. - Soit $\{G_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ un recouvrement ouvert fini de $\sigma(T_p)$; comme $\sigma(T_p)\subset\sigma(T)$ il existe un ouvert G_o tel que $G_o\cap\sigma(T_p) = \emptyset$ et $\sigma(T)\subset\bigcup_{i=1}^{i=n} G_i$. On peut donc trouver (puisque T est décomposable) un système $\{Y_i\}_{o\leqslant i\leqslant n}$ d'espaces spectraux maximaux de T tel que $X = \sum_{i=1}^{i=n} Y_i$ et $\sigma(T/Y_i)\subset G_i$ pour $o\leqslant i\leqslant n$; nous en déduisons la décomposition $pX = \sum_{i=o}^{i=n} pY_i$, les espaces pY_i étant analytiquement stables par T donc par T_p puisque $pY_i\subset pX$, et on a $\sigma(T_p/pY_i) = \sigma(T/pY_i)\subset\sigma(T/Y_i)\cap\sigma(T_p)\subset G_i\cap\sigma(T_p)$ pour tout $i\in[o,n]$. Comme $\sigma(T/pY_o) = \emptyset$ on a $pY_o = \{0\}$ et $pX = \sum_{i=1}^{i=n} pY_i$.

(3.6.2) COROLLAIRE. - *L'opérateur T^p est décomposable.*

Preuve. - T^p est semblable à T_{1-p}.

3.7. SOMME DIRECTE D'OPERATEURS DECOMPOSABLES.

(3.7.1) THEOREME (COLOJOARA - FOIAS -(CF1)). - *Soient* X_1, X_2 *deux espaces de Banach,* T_1 *et* T_2 *deux opérateurs décomposables sur* X_1 *et* X_2, *alors* $T_1 \oplus T_2$ *est un opérateur décomposable sur* $X_1 \oplus X_2$.

Preuve. - Soit $\{G_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ un recouvrement ouvert fini du spectre $\sigma(T_1 \oplus T_2) = \sigma(T_1) \cup \sigma(T_2)$. Les opérateurs T_1 et T_2 sont décomposables ce qui fait qu'il existe un système $\{Y_i^1\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ de sous-espaces de X_1 analytiquement stables par T_1 et un système $\{Y_i^2\}$ de sous-espaces de X_2 analytiquement stables par T_2 tels que, pour $1\leqslant i\leqslant n$, on ait $\sigma(T_1/Y_i^1) \subset G_i$, $\sigma(T_2/Y_i^2) \subset G_i$ avec $X_1 = \sum_{i=1}^{i=n} Y_i^1$ et $X_2 = \sum_{i=1}^{i=n} Y_i^2$. Posons $Y_i = Y_i^1 \oplus Y_i^2$; cet espace est analytiquement stable par $T_1 \oplus T_2$ et on a, d'une part, $\sigma(T_1 \oplus T_2/Y_i) = \sigma(T_1/Y_i^1) \cup \sigma(T_2/Y_i^2) \subset G_i$ pour tout i, et d'autre part :

$$X_1 \oplus X_2 = (\sum_{i=1}^{i=n} Y_i^1) \oplus (\sum_{i=1}^{i=n} Y_i^2) = \sum_{i=1}^{i=n} Y_i$$

(3.7.2) COROLLAIRE. - *Si* $T \in L(X)$ *et si* p *est un projecteur continu sur* X *qui commute avec* T, *tel que* T_p *et* T^p *soient décomposables, alors* T *est décomposable.*

3.8. OPERATEURS DECOMPOSABLES ET CALCUL FONCTIONNEL HOLOMORPHE.

(3.8.1) THEOREME (COLOJOARA-FOIAS(CF1)). - *Si* T *est un opérateur décomposable et si* $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$, *l'opérateur* f(T) *est décomposable.*

Preuve. - Pour tout recouvrement ouvert fini $\{G_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ de $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$ on a $\bigcup_1^n f^{-1}(G_i) = f^{-1}(\bigcup_1^n G_i) \supset f^{-1}(f(\sigma(T)) \supset \sigma(T)$. Il existe alors un système $\{Y_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ d'espaces analytiquement stables par T tel que $\sigma(T/Y_i) \subset f^{-1}(G_i)$ pour $1\leqslant i\leqslant n$ et $X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. L'opérateur f(T) est à unique extension, les espaces Y_i sont aussi analytiquement stables par f(T) et $\sigma(f(T)/Y_i) = \sigma(f(T/Y_i))$ $= f(\sigma(T/Y_i)) \subset G_i$ pour tout i, ce qui montre que f(T) est décomposable.

BIBLIOGRAPHIE

(A1) G.R. ALLAN, *A spectral theory for locally convex algebras*, Proc. Lond. Math. Soc., 3, 15, 1965, p. 399-421.

(A2) C. APOSTOL, *Remarks on the perturbation and a topology for operators*, J. Funct. Anal., 2, 1968, p.395-408.

(A3) C. APOSTOL, *Spectral decompositions and functional calculus*, Rev. Roum. Math. pures et appl., 13, 1968, p. 1481-1528.

(A4) C. APOSTOL, *Theorie spectrala si calcul functional*, St. Cerc. Mat., 20, 5, 1968, p. 635-638.

(B1) J. BERRUYER, *Opérateurs réguliers spectraux et opérateurs réguliers décomposables*, Publ. Dép. Math. Lyon, 5-2, 1968, p. 1-56.

(B2) J. BERRUYER, *Comptes rendus*, 267, série A, 1968, p. 686.

(B3) J. BERRUYER, *Comptes rendus*, 268, série A, 1969, p. 1596.

(B4) E. BISHOP, *A quality theorem for an arbitrary operator*, Pacific J. Math., 9, 1969, p. 379-397.

(B5) H. BUCHWALTER, *Espaces vectoriels bornologiques*, Publ. Dép. Math. Lyon, 2-1, 1965, p. 2-53.

(BD) E. BERKSON - H.R. DOWSON, *Prespectral operators*, Illinois J. Math., 13, 1969, p. 291-315.

(CF1) I. COLOJOARA - C. FOIAS, *The theory of generalized spectral operators*, Gordon Breach, New-York, 1968.

(CF2) I. COLOJOARA - C. FOIAS, *The Riesz-Dunford functional calculus with decomposable operators*, Rev. Roum. Math. pures et appl., 12, 1967, p. 627-641.

(D1) H.R. DOWSON, *Restriction of spectral operators*, Proc. Lond. Math. Soc., 15, 1965, p. 437-457.

(D2) H.R. DOWSON, *Restriction of prespectral operators*, J. Lond. Math. Soc., 2, 1, 1969, p. 633-642.

(D3) N. DUNFORD, *Spectral operators*, Pacific J. Math., 4, 1954, p. 321-354.

(D4) N. DUNFORD, *Spectral theory II - Resolutions of the identity*, Pacific J. Math., 2, 1952, p. 559-614.

(D5) G. DUBOIS, *Comptes rendus*, 274, série A, 1972, p. 745.

(D6) G. DUBOIS, *Comptes rendus*, 274, série A, 1972, p. 963.

(D7) G. DUBOIS, *Thèse 3ème cycle*, Lyon, 1972.

(DS) N. DUNFORD - J.T. SCHWARTZ, *Linear operators, I, II, III*, New-York, 1958-1972.

(F1) C. FOIAS, *Spectral maximal spaces and decomposable operators in Banach spaces*, Arch. Math., 14, 1963, p. 341-349.

(F2) C. FOIAS, *On the maximal spectral spaces of a decomposable operator*, Rev. Roum. Math. pures et appl., 15, 1970, p. 1599-1606.

(F3) C. FOIAS, *Une application des distributions vectorielles à la théorie spectrale*, Bull. Soc. Math. France, 84, 1960, p. 147-158.

(F4) S. FRUNZA, *Une caractérisation des espaces spectraux maximaux des opérateurs $\mathfrak{U}$-scalaires*, Rev. Roum. Math. pures et appl., 15, 1970, p. 1607-1609.

(F5) U. FIXMAN, *Problems in spectral operators*, Pacific J. Math., 9, 1959, p. 1029-1051.

(V) P.H. VASILESCU, *Analytic functions and some residual spectral properties*, Rev. Roum. Math. pures et appl., 15, 1970, p. 435-451.

(W) L. WAELBROECK, *Théorie des algèbres de Banach et des algèbres localement convexes*, Séminaire de Math. Sup., Eté 1962, Montréal.

Gérard DUBOIS

Institut National des Sciences Appliquées
20, avenue Albert Einstein
69 621 - VILLEURBANNE