

HICHAM FAKHOURY

**Projections de meilleure approximation continues dans
certains espaces de Banach**

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1973, tome 10, fascicule 2
« Compte rendu des journées infinitistes », , p. 73-78

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1973__10_2_73_0

© Université de Lyon, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Projections de meilleure approximation continues dans
certains espaces de Banach .

par Hicham FAKHOURY.

Soit V un espace de Banach réel ou complexe , on note $B(V)$ sa boule unité fermée . Si M est un sous-espace fermé de V , on note M^0 le polaire de M dans V' , et R la surjection canonique de V sur V/M . L'espace V est un L-espace s'il est isométrique à l'espace $L^1(\mu)$, relatif à une mesure μ ; on dira que V est un espace de Lindenstrauss si l'espace V' est un L-espace . Soit λ un convexe compact (resp. symétrique) , on note $A(\lambda)$ (resp. $A_0(X)$) l'espace des fonctions affines continues sur λ (resp. nulles en 0) . Un convexe compact X est dit standard si l'ensemble $\mathcal{E}(X)$ des points extrémaux de X est universellement mesurable et porte toute mesure maximale . Si E est un espace topologique, $C(E)$ désigne l'espace des fonctions définies et continues sur E et à valeurs complexes . Rappelons qu'une application θ de E dans l'ensemble des parties non vides d'un espace topologique F est dite semi-continue-inférieurement (s.c.i.) si pour tout ouvert U de F , l'ensemble $\{x \in E ; \theta(x) \cap U \neq \emptyset\}$ est un ouvert de E .

Le but du présent travail est de montrer l'existence d'une projection continue homogène de V sur M (non nécessairement linéaire) qui réalise la meilleure approximation dans les deux situations suivantes :

- 1°) S'il existe une projection linéaire P du dual V' de V sur l'annulateur M^0 de M qui vérifie

$$\|x\| = \|P(x)\| + \|x - P(x)\| \text{ pour tout point } x \text{ de } V',$$

il existe une projection continue homogène de V sur M (non nécessairement linéaire) qui réalise la meilleure approximation ; ceci est le cas , entre autre , si V est une algèbre uniforme de fonctions et M un idéal formé de fonctions nulles sur une intersection d'ensembles pics , ou bien , si V est une \mathbb{C}^* -algèbre et M un idéal bilatère .

2°) Si M est un espace de Lindenstrauss , nous donnons une condition simple pour qu'il existe une projection continue homogène de V sur M (non nécessairement linéaire) qui réalise la meilleure approximation . Dans le cas où V est un espace de Banach ordonné 1-normal , et M un sous-espace simplicial , la projection précédente peut être choisie positive .

Les résultats annoncés ici font l'objet d'un article qui paraîtra dans le Journal de Mathématiques Pures et Appliquées .

I. Projections sur un M-idéal.

Définition 1.- Soit M un sous-espace d'un espace de Banach réel ou complexe V . Le sous-espace M est dit M-idéal s'il existe une projection linéaire P de V sur M^0 qui vérifie $\|x\| = \|P(x)\| + \|x - P(x)\|$, pour tout x dans V .

En utilisant le théorème 5.4 de (1) et le théorème de Michael il est possible de démontrer le résultat suivant , améliorant le théorème 5.4 de (1) et le théorème 1 de (2) .

Théorème 2.- Soient M un M-idéal d'un espace de Banach réel (resp. complexe) V , et R la surjection canonique de V sur

V/M . Il existe un relèvement continu T de l'application R qui vérifie $\|T(f)\| = \|f\|$ et $T(\lambda f) = \lambda T(f)$, pour tout f dans V/M et λ réel (resp. complexe).

Pour établir le théorème 2 on utilise les résultats de (5). Ceci permet de montrer le résultat suivant :

Corollaire 3.— Soit M un M -idéal d'un espace de Banach V ; il existe une projection continue homogène de V sur M qui réalise la meilleure approximation.

La projection définie plus haut n'est pas linéaire en général ; en effet, $c_0(\mathbb{N})$ est un M -idéal dans $l^\infty(\mathbb{N})$, mais non un facteur direct. On ignore si cette projection peut être choisie lipschitzienne.

Exemples de M -idéaux :

(a) Soit V une \mathbb{C}^* -algèbre, les M -idéaux de V coïncident avec les idéaux bilatères de V .

(b) Soit V une algèbre uniforme de fonctions continues sur un compact X , les M -idéaux de V coïncident avec les idéaux des fonctions qui sont nulles sur les fermés "pics généralisés" (i.e. les intersections d'ensemble pics) (7).

(c) Soit V l'algèbre du disque, les M -idéaux coïncident avec les sous-espaces formés de fonctions nulles sur les ensembles fermés du cercle unité dont la mesure est nulle.

II. Projections sur un espace de Lindenstrauss .

Pour commencer , notons que toute partie bornée du plan complexe est incluse dans un cercle unique de rayon minimum , appelé cercle circonscrit .

Soient X et Y deux compacts et ϕ une surjection de X sur Y ; on note M le sous-espace de $C(X)$ formé des fonctions $g \circ \phi$ où g parcourt $C(Y)$. Le lemme suivant est montré dans (6, P. 50) .

Lemme 4.- Pour toute fonction f de $C(X)$, la distance de f à M est donnée par la formule suivante :

$$d(f, M) = \text{Sup} \left\{ r(y) ; y \in M \right\} ,$$

où $r(y)$ désigne le rayon du cercle circonscrit à $f(\phi^{-1}(y))$.

Ce lemme permet d'établir le résultat suivant :-

théorème 5.- Soient V un espace de Banach et M un sous-espace fermé qui est un espace de Lindenstrauss ; si la surjection canonique ϕ de $B(V')$ sur $B(M')$ vérifie :

$$(I) \quad \phi^{-1}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = \lambda \phi^{-1}(x_1) + (1-\lambda) \phi^{-1}(x_2) ,$$

pour tout λ dans $[0, 1]$ et x_i dans $B(M')$.

Alors , il existe une projection de meilleure approximation continue homogène de V sur M .

La démonstration de ce théorème repose sur une adaptation naturelle du théorème d'existence de sélections linéaires associées aux fonctions multivoques s.c.i. définies sur la boule unité d'un L -espace dual démontré dans (4).

Lemme 7.- Soient K et X deux convexes compacts et ϕ une surjection affine continue de K sur X . Considérons les assertions suivantes :

- (a) L'application ϕ est directe (i.e. $\phi(E(K)) = E(X)$).
 (b) (resp.(b')). Pour tout point k de K et toute mesure μ (resp. mesure maximale μ) de $M^1(X)$ de barycentre $\phi(k)$, il existe une mesure ν de $M^1(K)$ de barycentre k et telle $\tilde{\phi}(\nu) = \mu$, où $\tilde{\phi}$ désigne l'extension de ϕ à $M^1(K)$.
 (c) L'application ϕ vérifie la condition (I).

Alors les assertions (b), (b') et (c) sont équivalentes et impliquent (a). Si X est un simplexe les quatre assertions sont équivalentes.

Théorème 8.- Soient V un espace de Banach et M un sous-espace fermé qui est un espace de Lindenstrauss. Supposons $B(V')$ standard (en particulier si V est séparable) et que l'application ϕ est directe. Il existe une projection continue homogène de V sur M qui réalise la meilleure approximation.

Un espace de Banach réel ordonné par un cône convexe fermé V^+ est dit 1-normal si les inégalités $y \leq x \leq z$ impliquent $\|y\| \leq \|y\| \vee \|z\|$.

Théorème 9.- Soient V un espace de Banach ordonné 1-normal et M un sous-espace fermé vérifiant la propriété de décomposition de Riesz. On suppose que la boule unité ouverte de M est filtrante croissante, et que pour tous k dans $B(V') \cap V^+$, $\varepsilon > 0$ et f dans M avec $f(k) = 0$, il existe un élément g

dans M^+ qui vérifie $g \geq f$ et $g(k) < \varepsilon$. Il existe une projection continue homogène P de V sur M qui réalise la meilleure approximation et vérifie $P(V^+) = M^+$.

Les résultats précédents généralisent le résultat de Holmes et Kripke. Cependant, on ignore toujours si les projections définies plus haut sont lipschitziennes. Signalons enfin qu'il est probable que le théorème 8 reste vrai pour un espace de Banach quelconque V ; cependant, nous ne pouvons l'établir que si $B(V')$ est standard.

Bibliographie

- (1) E. Alfsen et E. Effros : Ann. of Math. 96 , 1972 , 93-136 .
- (2) T. Ando : Closed range theorem for convex sets and linear liftings (à paraître)
- (3) D. A. Edwards et G. Vincent-Smith : Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 18 , 1968 , 261-282 .
- (4) A. Lazar et J. Lindenstrauss : Acta Math. , 126, 1971, 165-193 .
- (5) E. Michael : Ann. of Math. 63 , 1956 , 361-382 .
- (6) A. Pelczynski : Rozprawy Mat. Warszawa , 58 , 1969 .
- (7) E. Mirsberg : M-ideals in complex function spaces and algebras (à paraître) .

Equipe de Recherche associée au C.N.R.S. n° 294 ,
Université de Paris VI ,
Département de Mathématiques , (Tour 46)
11, quai Saint-Bernard ,
75005 - Paris .