PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

ALFRED FRÖLICHER

Sur la transformation de Dirac d'un espace à génération compacte

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1973, tome 10, fascicule 2
« Compte rendu des journées infinitistes », , p. 79-100
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1973__10_2_79_0>

II$^{\text{ème}}$ Coll. Anal. Fonct.
(1973, Bordeaux)
p. 79-100

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1973 t.10-2

SUR LA TRANSFORMATION DE DIRAC D'UN ESPACE A GENERATION COMPACTE

par Alfred FRÖLICHER

Pour un espace à génération compacte X, notons $\mathcal{C}X$ l'espace des fonctions réelles continues de X, muni de la topologie à génération compacte universelle (provenant de la fermeture cartésienne de la catégorie <u>GC</u> des espaces à génération compacte). $\mathcal{C}X$ est une algèbre à génération compacte. Un caractère (continu) de $\mathcal{C}X$ est un homomorphisme unitaire continu d'algèbres $\mathcal{C}X \to \mathbb{R}$. Soit $\mathcal{H}\mathcal{C}X$ l'espace des caractères de $\mathcal{C}X$, muni de la topologie à génération compacte induite par l'inclusion dans $\mathcal{C}\mathcal{C}X$. Pour tout $x \in X$, l'évaluation en x des fonctions de $\mathcal{C}X$ est un élément de $\mathcal{H}\mathcal{C}X$. L'application canonique $e : X \to \mathcal{H}\mathcal{C}X$ ainsi obtenue s'appelle aussi la transformation de Dirac de l'espace X.

Grâce à la propriété universelle de la structure d'espaces fonctionnels qu'on utilise dans <u>GC</u> , la transformation de Dirac est toujours continue. Elle est injective si et seulement si X est fonctionnellement séparé. On se demande alors sous quelles conditions l'application $X \to \mathcal{H}\mathcal{C}X$ est un plongement de sous-espace (au sens de la catégorie <u>GC</u>). La condition nécessaire et suffisante qui est donnée dans cet article, montre d'une part que c'est un plongement pour une classe très grande d'espaces à génération compacte ; et d'autre part, ce qui est presque plus important, que cette classe constitue une sous-catégorie pleine <u>GC*</u> de <u>GC</u> qui a toutes les bonnes propriétés de <u>GC</u> : elle est complète, cocomplète et cartésiennement fermée (par la restriction du même foncteur) ; en plus, la propriété que chaque objet X de <u>GC*</u> est sous-espace de $\mathcal{H}\mathcal{C}X$ implique qu'une application $f : X \to Y$ entre deux espaces de <u>GC*</u> est continue si et seulement si pour toute fonction continue $g : Y \to \mathbb{R}$, la fonction $f \circ g : X \to \mathbb{R}$ est aussi continue. La structure d'un espace de $\underline{GC}^*$ est donc complètement caractérisé par l'ensemble des fonctions réelles continues. On montre également que pour tout X de $\underline{GC}^*$, l'espace vectoriel à génération compacte $\mathcal{C}X$ est réflexif.

On montre ensuite que pour $X \in \underline{GC}^*$, X est homéomorphe (par l'application canonique e) à $\mathcal{KC}X$ si et seulement si X est topologiquement complet. Cette condition signifie qu'une structure uniforme qui est fonctoriellement associée à la topologie de X est complète, et elle est équivalente à la condition que la structure uniforme universelle de l'espace complètement régulier rX associé à X est complète, condition qui est par exemple satisfaite si rX est paracompact.

La catégorie $\underline{GC}^*$ est isomorphe à une sous-catégorie $\underline{CR}^*$ de la catégorie $\underline{CR}$ des espaces complètement réguliers. Différentes conditions équivalentes, pour qu'un espace complètement régulier appartienne à $\underline{CR}^*$, sont données. En montrant que le théorème d'Ascoli est encore valable pour tout espace de $\underline{CR}^*$on a une généralisation du théorème connu, car $\underline{CR}^*$ contient strictement les espaces localement compacts.

Les résultats de cet article ont été partiellement annoncés dans [5].

Des questions analogues ont été examinées par E. Binz dans le cadre des espaces pseudo-topologiques et par H. Buchwalter dans le cadre des espaces compactologiques ; des discussions avec ces deux collègues m'ont été très utiles, et je leur exprime mes remerciements.

* * *

§ 0. Rappel de quelques notions catégoriques.

Il sera utile d'utiliser le langage et quelques résultats catégoriques ; voici donc un petit résumé. On suppose connues les notions de limite resp. colimite, dont des cas particuliers sont les produits et les limites inverses, resp. les coproduits et les limites directes. Une catéogie s'appelle complète resp. cocomplète, si toutes les limites resp. colimites existent. Une sous-catégorie s'appelle réflexive resp. coreflexive si le foncteur d'inclusion possède un adjoint resp. un coadjoint qui est une rétraction par rapport à l'inclusion. Toute sous-catégorie réflexive ou coréflexive d'une catégorie qui est complète et cocomplète est aussi complète et cocomplète. On utilisera aussi que tout foncteur adjoint resp. coadjoint commute avec les limites resp. colimites. Enfin, une catégorie $\underline{K}$ s'appelle cartésiennement fermée si elle possède des produits finis et si pour tout objet Y le foncteur "produit avec Y" possède un adjoint ; on obtient alors un foncteur $\mathcal{C}: \underline{K}^{op} \times \underline{K} \to \underline{K}$ tel que

$$\mathrm{Mor}\ (X, \mathcal{C}(Y,Z)) \cong \mathrm{Mor}\ (X \times Y, Z).$$

Pour des détails, voir par exemple [11].

§ 1. Espaces topologiques, espaces uniformes et espaces complètement réguliers.

On va introduire et étudier quelques foncteurs qui seront utilisés dans la suite. On notera :

$\underline{\mathrm{TOP}}$ resp. $\underline{\mathrm{TOPs}}$	la catégorie des espaces topologiques (resp. séparés) ;
$\underline{\mathrm{CR}}$ resp. $\underline{\mathrm{CRs}}$	la catégorie des espaces complètement réguliers pas nécessairement séparés (resp. séparés) ;
$\underline{\mathrm{UNIF}}$	la catégorie des espaces uniformes.

Pour la dernière, les morphismes sont les applications uniformément continues ; pour les autres les applications continues.

(1.1) Proposition

Le foncteur classique $t : \underline{UNIF} \to \underline{TOP}$ possède un coadjoint $u : \underline{TOP} \to \underline{UNIF}$, et ces foncteurs vérifient $t \circ u \circ t = t$ et $u \circ t \circ u = u$.

Démonstration

On sait que la topologie associée à un espace uniforme U, c'est-à-dire la topologie de tU, est la plus grossière de toutes les topologies sur l'ensemble sous-jacent pour lesquelles tout entourage de la diagonale Δ soit un voisinage de Δ (au sens de la topologie produit). Analoguement, si $T \in \underline{TOP}$, uT est défini de la manière suivante : uT possède le même ensemble sous-jacent que T, et porte la structure uniforme la plus fine de toutes les structures uniformes pour lesquelles tout entourage de Δ soit un voisinage de Δ. On montre facilement que cela existe, en vérifiant que l'infimum (dans le treillis des filtres sur l'ensemble produit) d'une famille de structures uniformes est encore une structure uniforme. Si les voisinages de Δ dans $T \times T$ satisfont aux axiomes de structure uniforme (ce qui est le cas par exemple si T est paracompact, cf. [3]), les entourages de Δ au sens de uT sont donc tout simplement les voisinages de Δ dans $T \times T$.

On vérifie ensuite que $f : T_1 \to T_2$ continue implique $f : uT_1 \to uT_2$ uniformément continue ; u est donc un foncteur.

Il résulte immédiatement des caractérisations données de tU et de uT que :

$1 : T \to tuT$ est continue ;

$1 : utU \to U$ est uniformément continue.

De cela on déduit d'une part que $f : T \to tU$ est continue si et seulement si $f : uT \to U$ est uniformément continue, de sorte que t est adjoint de u ; et d'autre part que $1 : tU \to tutU$ et $1 : tutU \to tU$ sont continues, d'où $tutU = tU$ et $utuT = uT$.

(1.2) Proposition

Pour un espace topologique T les assertions sont équivalentes

a) T est complètement régulier ;

b) Il existe $U \in \underline{\mathrm{UNIF}}$ avec $T = tU$ (c'est-à-dire T est uniformisable) ;

c) $tuT = T$.

Démonstration

L'équivalence de a) et b) est classique.

b) $\Rightarrow$ c) : En effet, $T = tU$ implique $tuT = tutU = tU = T$.

c) $\Rightarrow$ b) : trivial.

(1.3) Proposition

Le foncteur d'inclusion $i : \underline{\mathrm{CR}} \to \underline{\mathrm{TOP}}$ possède un coadjoint $r : \underline{\mathrm{TOP}} \to \underline{\mathrm{CR}}$, et ces foncteurs vérifient $r \circ i = 1$.

Démonstration

On définit : $rT = tuT$. De la proposition précédente on déduit que $rT \in \underline{\mathrm{CR}}$ et que l'on a $T \in \underline{\mathrm{CR}} \Leftrightarrow rT = T$. On a donc $r \circ i = 1$. La fonctorialité de r résulte de celle de u et t. L'application $1 : T \to rT$ étant toujours continue, on déduit que r est coadjoint à i.

(1.4) Remarques

a) Comme u et t, le foncteur r ne change pas les ensembles sous-jacents et est l'identité sur les morphismes.

b) On vérifie facilement que la topologie de rT peut aussi être caractérisée de la façon suivante : c'est la topologie induite par toutes les fonctions continues $T \to \mathbb{R}$.

c) Si T est séparé, rT n'est pas toujours séparé. En effet, rT est séparé si et seulement si les fonctions réelles continues de T séparent les points de T, ce qui est souvent exprimé en disant : T est fonctionnellement séparé.

Pour un espace complètement régulier T, uT porte l'uniformisation la plus fine de T, qui est aussi appelé la structure uniforme universelle ; en effet, dans ce cas tuT = T, et si T = tU, l'application : $1 : uT = utU \to U$ est uniformément continue. Si T possède une uniformisation complète, uT est aussi complet. Dans ce cas, T est dit topologiquement (ou universellement) complet. Plus généralement nous appelons topologiquement complet tout espace topologique T pour lequel uT est complet. On sait [10] que tout espace paracompact, en particulier tout espace métrique, est topologiquement complet.

Pour $R \in$ CRs, uT est un espace uniforme séparé. Soit $\widetilde{uT}$ sa complétion, et posons $\theta T = t\widetilde{uT}$. T est sous-espace dense de θT et θT est appellé la complétion topologique (ou aussi la replétion compactologique, cf.[1])de T. θ est un foncteur de CRs dans la sous-catégorie pleine de CRs qui est formée des espaces topologiquement complets ; il est coadjoint au foncteur d'inclusion.

§ 2. Espaces à génération compacte et espaces complètement réguliers.

Les espaces à génération compacte ont été introduits par Kelley [10] et ont été étudiés et utilisés par exemple dans [8],[13] et [14]. Nous résumons d'abord quelques propriétés sans démonstration.

Un espace à génération compacte est un espace topologique séparé dont la topologie coïncide avec celle coinduite par les inclusions des sous-espaces compacts. Nous notons

$\underline{GC}$: la sous-catégorie pleine de $\underline{TOPs}$ formée par les espaces à génération compacte.

Les espaces séparés que l'on rencontre sont en général dans $\underline{GC}$; en effet, tout espace séparé localement dénombrable et donc tout espace métrisable est à génération compacte ; de même tout espace localement compact. Un exemple naturel d'un espace séparé qui n'est pas dans $\underline{GC}$ est donné dans [7].

Le foncteur d'inclusion $i : \underline{GC} \to \underline{TOPs}$ possède un adjoint $k : \underline{TOPs} \to \underline{GC}$ vérifiant $k \circ i = 1$. $\underline{GC}$ est donc complet et cocomplet. Le foncteur k ne change pas l'ensemble sous-jacent d'un objet et est l'identité sur les morphismes. L'application $1 : kT \to T$ est continue ; de plus T et kT ont les mêmes sous-espaces compacts.

Comme foncteur adjoint, k commute avec les limites. En particulier on a donc, en notant $X \pi Y$ le produit catégorique (dans $\underline{GC}$) de deux espaces X et Y de $\underline{GC}$:

$$X \pi Y = k(X \times Y).$$

Si l'un des espaces X,Y est localement compact, $X \times Y$ est à génération compacte, et dans ce cas on a $X \pi Y = X \times Y$; en général, ceci n'est pas vrai.

Si $f : S \to X$ est une application injective d'un ensemble S

dans un espace à génération compacte X, il existe une et une seule topologie à génération compacte sur S ayant la propriété qu'une application $g : Z \to S$ d'un espace à génération compacte Z est continue si et seulement si $f \circ g : Z \to X$ est continue. On l'obtient en appliquant à la topologie induite (qui n'est pas toujours à génération compacte, mais toujours séparée) le foncteur k ; on appelle cette topologie la $\underline{GC}$-topologie induite par f. Nous dirons qu'une application $f : Y \to X$ entre deux espaces de $\underline{GC}$ est un plongement de $\underline{GC}$-sous-espace si f est injective et Y porte la $\underline{GC}$-topologique induite par f.

Pour des espaces topologiques T et T', notons $C(T,T')$ l'ensemble des applications continues, et $C_{co}(T,T')$ cet ensemble muni de la topologie compacte-ouverte. En posant, pour $X,Y \in \underline{GC}$, $\mathcal{C}(X,Y) = kC_{co}(X,Y)$ on obtient un foncteur

$$\mathcal{C}: \underline{GC}^{op} \times \underline{GC} \to \underline{GC}$$

qui a la propriété universelle suivante :

$$f : X \to \mathcal{C}(Y,Z) \text{ continue} \iff \hat{f} : X \pi Y \to Z \text{ continue.}$$

Ici, $\hat{f}(x,y) = f(x)(y)$. Il résulte que ce foncteur $\mathcal{C}$ ferme cartésiennement la catégorie $\underline{GC}$.

Un espace à génération compacte X n'est pas toujours complètement régulier. La topologie de X est alors strictement plus fine que celle de l'espace complètement régulier rX, et il arrive que rX n'est pas séparé. Nous notons

$\underline{GCs}$: la sous-catégorie pleine de $\underline{GC}$ dont les objets X vérifient la condition "rX séparé", c'est-à-dire sont fonctionnellement séparés.

Pour $X \in \underline{GCs}$, on a donc $rX \in \underline{CRs}$. Inversement, soit $R \in \underline{CRs}$. Alors la continuité de $1 : kR \to R$ implique celle de $1 : rkR \to rR = R$, de sorte que rkR est aussi séparé, et donc $kR \in \underline{GCs}$. La continuité de $1 : X \to rX$ entraînant celle de $1 : kX = X \to krX$, on déduit que les foncteurs

$k : \underline{CRs} \to \underline{GCs}$ et $r : \underline{GCs} \to \underline{CRs}$ ainsi obtenus, satisfont à la :

(2.1) Proposition

Le foncteur $k : \underline{CRs} \to \underline{GCs}$ est adjoint à $r : \underline{CRs} \to \underline{GCs}$, et ces foncteurs vérifient $r \circ k \circ r = r$ et $k \circ r \circ k = k$.

Comme conséquence de cette proposition on a des endofoncteurs idempotants $kr : \underline{GCs} \to \underline{GCs}$ et $rk : \underline{CRs} \to \underline{CRs}$. Nous notons

$\underline{GC}^*$: la sous-catégorie pleine de $\underline{GCs}$ dont les objets X vérifient $X = krX$;

$\underline{CR}^*$: la sous-catégorie pleine de $\underline{CRs}$ dont les objets R vérifient $R = rkR$.

La proposition précédente implique immédiatement la :

(2.2) Proposition

a) Le foncteur d'inclusion $i : \underline{GC}^* \to \underline{GCs}$ possède un co-adjoint $kr : \underline{GCs} \to \underline{GC}^*$; et on a $kr \circ i = 1$;

b) Le foncteur d'inclusion $i : \underline{CR}^* \to \underline{CRs}$ possède un adjoint $rk : \underline{CRs} \to \underline{CR}^*$, et on a $rk \circ i = 1$;

c) Les catégories $\underline{GC}^*$ et $\underline{CR}^*$ sont isomorphes à l'aide des foncteurs $\underline{GC}^* \underset{k}{\overset{r}{\rightleftarrows}} \underline{CR}^*$.

(2.3) Corollaire

Les catégories $\underline{GC}^*$ et $\underline{CR}^*$ sont complètes et cocomplètes.

Démonstration

Du fait de leur isomorphie, il suffit de considérer l'une des deux catégories, disons $\underline{CR}^*$. Selon la proposition précédente, $\underline{CR}^*$ est une sous-catégorie réflexive de $\underline{CRs}$; or on sait que $\underline{CRs}$ est complète et cocomplète.

(2.4) Lemme

Si $f : X \to Y$ est le plongement d'un GC-sous-espace et si $Y \in \underline{GC}^*$, alors $X \in \underline{GC}^*$.

Démonstration

La continuité de $f : X \to Y$ entraîne celle de $f : krX \to Y$. Cette application se factorise comme suit : $krX \xrightarrow{1} X \xrightarrow{f} Y$; on en déduit que $1 : krX \to X$ est continue. D'autre part, on a vu que pour tout $X \in \underline{GC}$, $1 : X \to krX$ est continue.

(2.5) Lemme

Si $X \in \underline{GC}$ et $Y \in \underline{GC}^*$, alors $\mathcal{C}(X,Y) \in \underline{GC}^*$

Démonstration

En utilisant la proposition 17 du chapitre I de [13] on a :

$$\mathcal{C}(X,Y) = k\, C_{co}\,(X,\, krY) = k\, C_{co}(X,\, rY).$$

Or on sait que $rY \in \underline{CRs}$ implique $C_{co}\,(X,rY) \in \underline{CRs}$. Donc : $kr\ \mathcal{C}(X,Y) = k\, r\, k\, C_{co}(X,rY) = k\, C_{co}\,(X,rY) = \mathcal{C}(X,Y)$.

(2.6) Théorème

$\underline{GC}^*$ est cartésiennement fermé par le foncteur $(X,Y) \mapsto \mathcal{C}\,(X,Y) = kC_{co}(X,Y)$.

Démonstration

Selon le lemme, $\mathcal{C}(X,Y) \in \underline{GC}^*$. Puisque $i : \underline{GC}^* \to \underline{GCs}$ est un foncteur adjoint selon (2.2.a), il commute avec les produits ; pour $X,Y \in \underline{GC}^*$ le $\underline{GC}$-produit de X et Y est donc aussi le $\underline{GC}^*$- produit. On a donc, comme dans $\underline{GC}$, la propriété universelle suivante pour $X,Y,Z \in \underline{GC}^*$:

$$f : X \to \mathcal{C}\,(Y,Z) \text{ continu} \Leftrightarrow \hat{f} : X\, \pi\, Y \to Z \text{ continu.}$$

§ 3. Plongement de X dans l'espace des caractères des fonctions continues de X.

Posons $CT = C(T, \mathbb{R})$; $C_{co}T = C_{co}(T,\mathbb{R})$; $\mathcal{C}X = \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$.
Pour $x \in T$, l'évaluation des fonctions de CT au point x est un homomorphisme continu de $C_{co}T$ dans $\mathbb{R}$. On a donc une application canonique $e : T \to C_{co}\, C_{co}T$. On sait qu'en général cette application n'est pas continue. Par contre, la propriété universelle de la structure de $\mathcal{C}X$ implique que pour $X \in \underline{GC}$, l'application canonique $e : X \to \mathcal{C}\mathcal{C}X$ est toujours continue. On voit immédiatement que cette application est injective si et seulement si X est fonctionnellement séparé. On a donc

(3.1) Proposition

Pour $X \in \underline{GC}$, l'application canonique $e : X \to \mathcal{C}\mathcal{C}X$ est injective si et seulement si $X \in \underline{GCs}$.

(3.2) Théorème

Pour $X \in \underline{GCs}$ sont équivalents :

a) $X \in \underline{GC}^*$, c'est-à-dire $krX = X$;

b) $e : X \to \mathcal{C}\mathcal{C}X$ est $\underline{GC}$ sous-espace ;

c) Pour $f : Z \to X$ où $Z \in \underline{GC}$ on a

$$f^*(CX) \subset CZ \Rightarrow f \text{ continu.}$$

Démonstration

c) $\Rightarrow$ b).

Soit $Z \in \underline{GC}$ et $f : Z \to X$ une application telle que $e \circ f : Z \to \mathcal{C}\mathcal{C}X$ est continue. On sait que pour tout $g \in CX$, l'application $e_g : \mathcal{C}\mathcal{C}X \to \mathbb{R}$ définie par $e_g(\Omega) = \Omega(g)$ est continue. Donc $e_g \circ e \circ f : Z \to \mathbb{R}$ est continue. Mais $e_g \circ e = g$; ainsi pour tout $g \in CX$, $f^*(g) = g \circ f : Z \to \mathbb{R}$ est continue. Selon l'hypothèse c),

$f : Z \to X$ est donc continue. $e : X \to \mathcal{C}\mathcal{C}X$ est donc une injection continue qui vérifie la propriété universelle caractéristique d'un $\underline{GC}$-sous-espace.

b) $\Rightarrow$ a).

Selon (2.5) et puisque $R \in \underline{GC}^*$ on sait que $\mathcal{C}\mathcal{C}X \in \underline{GC}^*$. Mais alors $X \in \underline{GC}^*$ selon (2.4).

a) $\Rightarrow$ c).

Soit $Z \in \underline{GC}$ et $f : Z \to X$ tel que $f^*(CX) \subset CZ$. Donc $g \circ f : Z \to X \to R$ est continue pour tout $g \in CX$.

Cela implique que $f : Z \to rX$ est continue. En appliquant le foncteur k et en utilisant $kZ = Z$ et $krX = X$ on obtient la continuité de $f : Z \to X$.

§ 4. Le théorème d'Ascoli

(4.1) Lemme

Soit $T \in \underline{TOP}$. Alors la topologie induite sur T par l'application canonique $e : T \to C_{co}\, C_{co}\, T$ est plus fine ($\leqslant$) que la topologie de rT.

Démonstration

Il suffit de montrer qu'une application $f : S \to rT$ d'un espace topologique S dans rT est continue si l'application composée $e \circ f : S \to C_{co}\, C_{co}\, T$ est continue. Or, pour tout $g \in C_{co}T$, l'application $e_g : C_{co}\, C_{co}T \to R$ définie par $e_g(\Omega) = \Omega(g)$ est continue. La continuité de $e \circ f$ implique donc celle de $e_g \circ e \circ f = g \circ f$. Cela étant vrai pour tout $g \in CT$, $f : S \to rT$ est continue, car la topologie de rT est celle induite par les fonctions continues $g : T \to R$.

(4.2) Théorème

Pour $R \in \underline{CRs}$ sont équivalents :

a) $R \in \underline{CR}^*$, c'est-à-dire $rkR = R$;

b) $uR = ukR$;

c) $CR = C(kR)$;

d) $C_{co}R = C_{co}(kR)$;

e) $C_{cu}R$ est complet (par $C_{cu}R$ nous notons l'uniformisation classique de $C_{co}R$, c'est-à-dire CR muni de la structure uniforme de la convergence uniforme sur les compacts de R).

Démonstration

a) $\Rightarrow$ b).

De a) on obtient $uR = urkR = utukR = ukR$.

b) $\Rightarrow$ c).

Puisque $1 : kR \to R$ est continue, on a $CR \subset C(kR)$. Soit inversement $f : kR \to R$ continue. Alors $f : ukR \to uR$ est uniformément continue, d'où la continuité de $f : tukR = R \to tuR = R$.

c) $\Rightarrow$ d).

Il suffit de remarquer que les compacts de R et de kR sont les mêmes.

d) $\Rightarrow$ e).

On sait (cf.[10]) que pour tout espace à génération compacte X, $C_{cu}X$ est complet.

e) $\Rightarrow$ a).

$C_{co}R$ est une sous-algèbre de $C_{co}kR$ qui contient les constantes et sépare les points. Selon le théorème de Stone-Weierstrass (cf.[4]), $C_{co}R$ est donc dense dans $C_{co}kR$. Puisque $C_{cu}R$ est un sous-espace uniforme complet de $C_{cu}kR$, $C_{co}R$ est un sous-espace fermé de $t\, C_{cu}kR = C_{co}kR$. On a donc $C_{co}R = C_{co}kR$. Mais $CR = CkR$ implique (selon la deuxième caractérisation du foncteur r) : $rR = rkR$. Puisque $rR = R$ on a bien a).

Remarque

Les espaces de CR* ont été étudiés par H. Buchwalter ; ils s' appellent k_R-espaces dans [1].

(4.3) Lemme

Pour un espace séparé T sont équivalents :

a) $e : T \to C_{co}\ C_{co}T$ est continue ;

b) Tout sous-ensemble compact de $C_{co}T$ est équicontinu.

La démonstration résulte directement des définitions des notions de partie équicontinue et de topologie compacte-ouverte.

(4.4) Théorème

Pour $R \in$ CRs sont équivalents :

α) R a la propriété d'Ascoli, c'est-à-dire :

Un sous-ensemble K de $C_{co}R$ est compact si et seulement si il satisfait les conditions suivantes :

(1) K est fermé dans $C_{co}R$;

(2) K est équicontinu ;

(3) pour tout $x \in R$, $K(x)$ est borné dans $\mathbb{R}$.

β) $e : R \to C_{co}C_{co}R$ est un plongement de sous-espace.

γ) $e : R \to C_{co}C_{co}R$ est continue.

Démonstration

α) ⇒ β) est une conséquence de (4.1) et (4.3)

β) ⇒ γ) est trivial.

γ) ⇒ α). A l'aide du théorème de Tychonof on montre facilement que tout sous-ensemble K de R qui satisfait les conditions (1), (2) et (3) est compact par rapport à la topologie faible. D'autre part, on sait que sur une partie équicontinue la topologie faible coïncide avec la topologie compacte-ouverte.

Inversement, supposons que K est compact dans $C_{co}R$. Cela implique trivialement (1) et (3) ; (2) s'obtient selon (4.3), car $e : R \to C_{co}\, C_{co}R$ est continu par hypothèse.

(4.5) Théorème

Les conditions du théorème (4.2) impliquent les conditions du théorème (4.4) ; en particulier on obtient : tout $R \in \underline{CR}^*$ a la propriété d'Ascoli et $e : R \to C_{co}C_{co}R$ est un plongement de sous-espace.

Démonstration

Les applications

$$kR \xrightarrow{e} k\, C_{co}k\, C_{co}kR \xrightarrow{1} C_{co}k\, C_{co}kR$$

sont continues. Selon d), $e : kR \to C_{co}\, kC_{co}R$ est donc continue. Puisque cette application se factorise par le sous-espace $C_{co}\, C_{co}R$ de $C_{co}kC_{co}R$, $e : kR \to C_{co}C_{co}R$ est continue. En appliquant le foncteur r et en utilisant que $rkR = R$ et que $C_{co}C_{co}R$ est complètement régulier on déduit γ).

§ 5. Homéomorphie entre X et l'espace des caractères de l'algèbre des fonctions continues de X.

Pour un espace topologique A muni d'une structure d'algèbre, notons HA resp. $H_{co}A$ le sous-ensemble de CA resp. le sous-espace de $C_{co}A$ dont les éléments sont des homomorphismes (toujours unitaires) d'algèbres, c'est-à-dire les caractères (continus) de A.

Dans le cas d'un espace à génération compacte X, $\mathcal{C}X$ est une algèbre à génération compacte, c'est-à-dire la topologie de $\mathcal{C}X$ a la propriété que l'addition ainsi que la multiplication sont des applications continues de $\mathcal{C}X \,\pi\, \mathcal{C}X$ dans $\mathcal{C}X$.

L'application canonique $X \to \mathcal{C}\mathcal{C}X$ se factorise par $\mathcal{H}\mathcal{C}X$, ce qui donne la transformation de Dirac $e : X \to \mathcal{K}\mathcal{C}X$. Le but principal, dans ce paragraphe, est de trouver sous quelles conditions, l'application $e : X \to \mathcal{K}\mathcal{C}X$ est un homéomorphisme surjectif. Les méthodes que nous utilisons sont dues à H. Buchwalter qui a examiné la même question dans le cadre des espaces compactologiques (cf [1]).

(5.1) Lemme

Soit $T \in$ TOP et $h : CT \to \mathbb{R}$ un homomorphisme d'algèbres. Alors

a) pour tout $g \in CT$ il existe $a \in T$ tel que $h(g) = g(a)$;

b) $h(|g|) = |h(g)|$;

c) $h(g_1) = \dots = h(g_n) = o \;\Rightarrow\; h(\sup\{g_1,\dots,g_n\}) = o$.

Démonstration

a) Identifions $\mathbb{R}$ avec les fonctions constantes et posons $h(g) = c$, de sorte que $h(g-c) = o$. Si lon avait $g(x) \neq c$ pour tout $x \in T$, alors $1|(g-c) \in CT$ et on obtiendrait une contradiction

$$1 = h(1) = h(g-c).\ h(1/(g-c)) = o.$$

b) $(h(|g|))^2 = h(|g|^2) = h(g^2) = (h(g))^2 = |h(g)|^2$.

c) Il suffit de considérer le cas n=2. On écrit $\sup\{g_1,g_2\} = \frac{1}{2}(g_1+g_2+|g_1-g_2|)$.

(5.2) Lemme

Soit $G \subset CT$ équicontinu et simplement borné. Alors $\hat{G} = G \cup \{\sup G' \;;\; G' \subset G\}$ est aussi équicontinu et simplement borné ; en particulier, $\sup G \in CT$.

La démonstration est une conséquence immédiate de la définition d'équicontinuité.

(5.3) Lemme

Soit $h : C_{co}T \to \mathbb{R}$ un homomorphisme d'algèbres dont la restriction à toute partie équicontinue et simplement fermée est continue. Alors

a) Si G_o est équicontinu et simplement borné et si $h|G_o = o$, alors $h(\sup G_o) = o$;

b) si G est équicontinu, il existe $a \in T$ tel que $h(g) = g(a)$ pour tout $g \in G$.

Démonstration

a) $\sup G_o$ est la limite simple des fonctions $\sup G'$ où G' varie dans l'ensemble des parties finies de G_o. Toutes ces fonctions sont dans $\hat{G}_o$, et selon (5.2) $\hat{G}_o$ est équicontinu et simplement fermé. Sur $\hat{G}_o$ la topologie faible coïncide avec la topologie compacte-ouverte. Donc en vertu de (5.1.c) la continuité de h implique $h(\sup G_o) = o$.

b) En associant à $g \in G$ la fonction $g^* = \inf(1, |g-h(g)|)$ on obtient l'ensemble $G^* = \{ g^* ; g \in G\}$. On voit que G^* est aussi équicontinu, et simplement borné. Puisque $o \leqslant h(g^*) \leqslant h(|g-h(g)|) = |h(g-h(g))| = o$ pour tout $g^* \in G^*$, la partie a) de (5.3) implique $h(\sup G^*) = o$. Selon (5.1.a) il existe $a \in T$ tel que $(\sup G^*)(a) = o$. Donc $g^*(a) = o$ pour tout $g^* \in G^*$, c'est-à-dire $(g-h(g))(a) = o$ pour tout $g \in G$, d'où $g(a) = h(g)$ pour tout $g \in G$.

(5.4) Proposition

Pour $R \in \underline{CR^*}$, $e(R)$ est dense dans $H_{co}k\, C_{co}R$.

Démonstration

Soit $h_o \in H_{co}k\, C_{co}R$, et W un voisinage de h_o. Donc il existe des ensembles $G_1,\dots,G_n$, compacts dans $C_{co}R$, et es $\theta_1,\dots,\theta_n$, ouverts dans R, de sorte que

$$h_o \in (G_1,\theta_1) \cap \dots \cap (G_n,\theta_n) \subset W,$$

où $$(G_i, \theta_i) = \{h \in H_{co}k\, C_oR \; ; \; h(G_i) \subset \theta_i\}$$

Alors $G_1 \cup \dots \cup G_n$ est aussi compact dans $C_{co}R$, donc équicontinu selon (4.5). Puisque la fermeture simple de toute partie équicontinue simplement bornée G est équicontinue, simplement bornée et fermée dans la topologie compacte-ouverte, une telle partie G est, selon (4.5), contenue dans un compact de $C_{co}R$; la restriction de h_o à un tel ensemble G est donc continue. On peut donc appliquer le lemme précédent : il existe $a \in R$ tel que $h_o(g) = g(a)$ pour tout $g \in G_1 \cup \dots \cup G_n$. Donc on a : si $g \in G_i$, alors $e_a(g) = g(a) = h_o(g) \in h_o(G_i) \subset \theta_i$.

Cela montre que $e_a(G_i) \subset \theta_i$, resp. $e_a \in (G_i, \theta_i)$. Ceci étant pour $i = 1,\dots,n$ on obtient $e_a \in W$.

(5.5) Théorème

Pour $R \in \underline{CR}^*$, $H_{co}k\, C_{co}R$ est la complétion topologique de R.

Démonstration

Comme vu dans la démonstration précédente, on a pour $R \in \underline{CR}^*$, en vertu de la propriété d'Ascoli, le résultat suivant : toute partie équicontinue et simplement bornée de CR est contenue dans un compact de $C_{co}R$, et inversement, tout compact de $C_{co}R$ est équicontinu et simplement borné. Il résulte donc d'un théorème de Pupier (cf.[1] ou [2]) que uR est sous-espace uniforme de $H_{cu}k\, C_{co}R$.

Puisque par rapport aux topologies associées on sait, d'après (5.4) que $tuR = R$ est dense dans $tH_{cu}k\ C_{co}R = H_{co}k\ C_{co}R$, le théorème est démontré.

(5.6) Corollaire

Si $R \in \underline{CR^*}$ est topologiquement complet, alors $e : R \to H_{co}k\ C_{co}R$ est un homéomorphisme surjectif.

(5.7) Théorème

Soit $X \in \underline{GC^*}$. Alors $e : X \to \mathcal{H}\mathcal{C}X$ est un homéomorphisme surjectif si et seulement si X est topologiquement complet.

Démonstration

Supposons d'abord que $e : X \to \mathcal{H}\mathcal{C}X$ soit un homéomorphisme. On sait que $R = rX$ appartient à $\underline{CR^*}$. Selon (4.5), $e : R \to C_{co}C_{co}R$ est un plongement de sous-espace. Il se factorise par le sous-espace $H_{co}C_{co}R$ de $C_{co}C_{co}R$, et $H_{co}C_{co}R$ est sous-espace de

$$H_{co}\ k\ C_{co}R = H_{co}k\ C_{co}k\ R = H_{co}\ \mathcal{C}X.$$

Ainsi $e : R \to H_{co}\ \mathcal{C}X$ est un plongement de sous-espace. Selon l'hypothèse, cette application est bijective, de sorte que R est donc homéomorphe à $H_{co}\ \mathcal{C}X$. Or $H_{co}\mathcal{C}X$ est topologiquement complet ; en effet, $H_{cu}\ \mathcal{C}X$ est sous-espace uniforme fermé de l'espace complet $C_{cu}\ \mathcal{C}X$. Donc R est topologiquement complet, et puisque $uR = utuX = uX$, cela est équivalent à l'affirmation que X est topologiquement complet.

Inversement, supposons que X soit topologiquement complet. Alors $R = rX$ appartient à $\underline{CR^*}$ et est complet, car $uR = uX$. Selon (5.6) $e : R \to H_{co}k\ C_{co}R = H_{co}k\ C_{co}k\ R$ est donc un homéomorphisme surjectif. De même donc $e : kR \to k\ H_{co}k\ C_{co}k\ R$; mais $kR = X$ et $kH_{co}k\ C_{co}kR = \mathcal{H}\mathcal{C}X$.

(5.3) Théorème

Si $X \in \underline{\mathcal{G}}C^*$ est topologiquement complet alors $\mathcal{C}X$ considéré comme espace vectoriel à génération compacte est **réflexif.**

Démonstration

Posons $R = rX$. Comme Haydon [9] l'a démontré, le fait que R est topologiquement complet implique que $C_{co}R$ est un "elc de Kelley" au sens de [1] ; il en résulte ($C_{co}R$ étant complet il est en fait équivalent) que $C_{co}R = ck\ C_{co}R$, où c est le foncteur qui associe à un espace vectoriel à génération compacte l'espace localement convexe associé. Le théorème résulte donc du critère de réflexivité donné dans (4.4) de [6] : on a $\mathcal{C}X = k\ C_{co}X = k\ C_{co}kR = k\ C_{co}R$, et $C_{co}R$ est un espace localement convexe complet, invariant par rapport au foncteur ck.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Buchwalter H - "Topologies et compactologies" - Publ. Dept. Math. Lyon - t.6-2 - 1-74 (1969).

[2] Buchwalter H - Pupier R - : "Caractérisation topologique de la complétion universelle d'un espace topologique complètement régulier" . C.R. Acad. Sc. - t. 268 - 1534-1536 (1969).

[3] Dieudonné J - : "Une généralisation des espaces compacts" - Journal Math. pures et appl. t. 23 - 65-76 (1944).

[4] Dugundji J - à "Topology" Allyn and Bacon (1966).

[5] Frölicher A - : "Sur l'anneau des fonctions continues d'un espace à génération compacte" - C.R. Acad. Sc. - t. 275 - 25-27 (1972).

[6] Frölicher A - Jarchow H - : "Zur Dualitätstheorie kompakt ezeugter und lokalkonvexer Vektorräume" - Comm. Math. Helv. - Vol. 47 - 289-310 (1972).

[7] Frölicher A - Roulin M - : "Topologies faibles et topologies à génération compacte" - Enseignement mathématique - T. XVIII - 205-207 (1972).

[8] Gabriel P - Zisman M - : "Calculus of fractions and homotopy theory" Ergeb. der Math. 35 - Springer (1967).

[9] Haydon R - : "Sur les espaces M(T) et $M^{\infty}(T)$" - C.R. Acad. Sc. - t. 275 - 989-991 (1972).

[10] Kelley J.-L. - : "General Topology" Van Nortrand (1955).

[11] MacLane S - : "Categories" - Springer (1971).

[12] Pupier R - : "Méthodes fonctorielles en topologie générale" - Publ. Départ. Math. Lyon - 1-121 (1971).

[13] Seip U - : "Kompakt erzeugte Vektorraüme und Analysis" - Lecture Notes in Math. 273 - Springer (1972).

[14] Steenrod N - : "A convenient category of topologica. spaces" - Mich. Math. J. 14 - 133-152 (1967).

Genève, le 31 Mai 1973

Alfred FROLICHER
Université de Genève
Institut de Mathématiques
2-4, rue du Lièvre

1211 GENEVE 24
SUISSE