PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

ANDRÉ GOLDMAN

L'espace des fonctions localement L^p sur un espace compactologique

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1973, tome 10, fascicule 3
, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1973__10_3_1_0>

II$^{\text{éme}}$ - Coll. Anal. Fonct.
(1973, Bordeaux)
p. 155-163

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1973 t.10-3

L'ESPACE DES FONCTIONS LOCALEMENT L^p SUR UN ESPACE COMPACTOLOGIQUE

André GOLDMAN

L'objet de ce travail est de donner de nouvelles propriétés concernant l'espace des fonctions localement L^p. On choisit pour cadre d'étude la classe des espaces compactologiques [2] ; ainsi on parlera de l'espace $\Omega_c^p(\mathfrak{X},\mu)$ des fonctions localement intégrables en moyenne d'ordre p ($p \in [1,+\infty[$) pour une prémesure μ sur un espace compactologique $\mathfrak{X}$ en munissant l'espace des classes de fonctions numériques mesurables f sur $\mathfrak{X}$ vérifiant $\mu_K|f|^p < +\infty$ pour tout compact K de $\mathfrak{X}$, de la topologie définie par les semi-normes $N_K^p(f) = (\mu_K|f|^p)^{1/p}$.

Sans épiloguer sur l'opportunité de ce choix, signalons toutefois que la classe des espaces compactologiques est très bien ad ptée à une généralisation de la théorie de l'intégration sur les espaces localement compacts. (Pour plus de détails, se reporter à l'article [6] traitant de ce sujet).

Que savons-nous de l'espace $\Omega_c^p(\mathfrak{X},\mu)$? Les propriétés de cet espace, bien connues lorsque $\mathfrak{X} = \gamma T$ (γT désigne la compactologie canonique de l'espace topologique T) où T est localement compact dénombrable à l'infini, deviennent déjà mystérieuses lorsque T est localement compact quelconque. Le seul résultat positif, à notre connaissance, est obtenu par Nielsen [8] : il montre que si toute partie de Weierstrass de T est compacte, alors $\Omega_c^p(\gamma T,\mu)$ est tonnelé ; il obtient ainsi une relation entre une propriété de l'elc Ω_c^p et une propriété interne de T. L'originalité de son travail réside dans la méthode, l'auteur utilisant des idées ayant fait leurs preuves dans les travaux de NACHBIN [7] et SHIROTA [9] relatifs aux fonctions continues. En poursuivant dans cette direction, il est possible de donner des caractérisations de l'elc $\Omega_c^p(\mathfrak{X},\mu)$ en termes de propriétés internes de $\mathfrak{X}$, caractérisations nouvelles même si $\mathfrak{X} = \gamma T$ où T est localement compact.

Précisons que l'espace $\mathfrak{X}$, la prémesure μ (supposée toujours positive) et l'indice $p \in [1,+\infty[$ sont fixés une fois pour toutes. Pour toute question concernant l'intégration sur les espaces compactologiques, on se reportera à [6] ; notons néanmoins, pour la clarté de l'exposé, que si ν désigne une prémesure définie sur une partie mesurable A de $\mathfrak{X}$, alors ν° est la mesure image pour l'application canonique $i : A \to \mathfrak{X}$. De même, si f est une fonction numérique définie sur A, on note f° la fonction sur $\mathfrak{X}$ qui coïncide avec f sur A et qui vaut 0 ailleurs.

1. - LES PARTIES μ-BORNEES EN MOYENNE D'ORDRE p.

Par analogie avec les travaux de (1) et (3), on introduit la notion de parties "bornées" de $\mathfrak{X}$ qui vont jouer vis à vis-à-vis de Ω_c^p, un rôle semblable à celui joué par les parties bornées d'un espace topologique par rapport aux espaces de fonctions continues.

(1.1) <u>DEFINITION</u>. - *Une partie mesurable* A *de* $\mathfrak{X}$ *est dite μ-bornée en moyenne d'ordre* p *s'il existe* $f \in \Omega_c^q(\mathfrak{X},\mu)$ *avec* $1/p + 1/q = 1$ *telle que :*

(a) $f(x) \neq 0$ *pour tout* $x \in A$;

(b) Pour toute $g \in \Omega_c^p(\mathfrak{X},\mu)$, *on a* $\mu_A|fg| < +\infty$.

Il est clair que l'ensemble des parties μ-bornées en moyenne d'ordre p (en abrégé μ-*bornées*) est stable par réunion finie et passage aux sous-ensembles mesurables.

Donnons encore quelques propriétés topologiques de ces parties.

(1.2) <u>THEOREME</u> :

(a) Toute partie μ-bornée A *est réunion d'un ensemble* N *localement négligeable pour* μ *et d'un ensemble* W *warnérien* (4) *pour la topologie de* $c\mathfrak{X}$ *(qui est l'espace* $\mathfrak{X}$ *muni de la plus fine topologie compatible avec ses compacts).*

(b) Toute partie μ-bornée A *est incluse dans la réunion d'un ensemble de Weierstrass (pour* $c\mathfrak{X}$*) et d'un ensemble localement négligeable pour* μ *; si de plus,* A *est fermée dans* $c\mathfrak{X}$, *alors l'inclusion est en fait une égalité d'ensembles.*

<u>*Preuve*</u> :

a) Soit $\mathfrak{F}$ une famille de fonctions continues sur $c\mathfrak{X}$, uniformément bornées sur les compacts de $\mathfrak{X}$. Posons $f = \sup_{g \in \mathfrak{F}} |g|$ et $U_n = \{x \in \mathfrak{X} \; ; \; f(x) > n\}$. Il est facile de prouver l'existence d'un entier $n_{\mathfrak{F}}$ tel que $\mu(U_{n_{\mathfrak{F}}}) = 0$. Soit maintenant $\mathfrak{S}$ l'ensemble des familles $\mathfrak{F}$, alors $N = \bigcup_{\mathfrak{F} \in \mathfrak{S}} U_{n_{\mathfrak{F}}}$ est localement négligeable et $W = A \setminus N$ est un borné warnérien de $c\mathfrak{X}$.

b) On utilise une méthode identique pour montrer ce résultat.

Existe-t-il des parties μ-bornées autres que les compacts ? Sont-elles stables par passage à l'adhérence (dans $c\mathfrak{X}$) ? Une partie de Weierstrass est-elle bornée ? Une partie μ-bornée non fermée est-elle réunion d'un ensemble localement μ-négligeable et d'un ensemble de Weierstrass ?

La réponse à ces questions est donnée par les exemples suivants :

(1.3) <u>EXEMPLE.</u> - Soit $\mathcal{H} = (\mathcal{L})$ l'ensemble des familles de parties de $\mathbb{N}$ telles que, pour tout couple (A,B) d'éléments distincts de $\mathcal{L}$, $\operatorname{card}(A\cap B) < +\infty$. Ordonnons $\mathcal{H}$ par inclusion et soit $\mathcal{L}_o$ un élément maximal de $\mathcal{H}$. Désignons par Ψ l'ensemble (construit dans [5], p. 79) réunion de $\mathbb{N}$ et d'un ensemble de points $(\omega_E)_{E\in\mathcal{L}_o}$, muni de la topologie suivante : tout point de $\mathbb{N}$ est ouvert ; un voisinage de ω_E est un ensemble réunion de ω_E et d'une partie de E dont le complémentaire dans E est fini.

Alors si μ est la mesure qui vaut 2^{-n} aux points de la forme $x=n$ et 1 en tout autre point, l'espace Ψ n'est pas μ-borné bien qu'il soit localement compact et pseudocompact.

Remarque. - L'espace Ψ n'est pas réunion dénombrable d'ensembles intégrables (c'est-à-dire la prémesure μ n'est pas σ-bornée). Ceci résout le problème posé dans [8] concernant l'existence de telles mesures sur un espace pseudocompact et localement compact.

(1.4) <u>EXEMPLE.</u> - Soient $X = \beta\mathbb{R}\setminus(\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N})$ (où $\beta\mathbb{R}$ (resp. $\beta\mathbb{N}$) désigne le compactifié de Stone-Čech de $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{N}$)), ν une mesure diffuse bornée sur $\mathbb{R}$, dont le support est $\mathbb{R}$ tout entier et η une mesure atomique qui vaut 1 en tout point de $\mathbb{N}$ et 0 ailleurs. On désigne par φ la mesure sur $\mathbb{R}$, somme de ν et η, et par μ sa mesure image sur X par l'injection canonique $i : \mathbb{R} \to X$.

Alors X est un espace pseudocompact, localement compact et non μ-borné ; l'ensemble $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$ est une partie μ-bornée qui n'est pas réunion d'un ensemble localement négligeable et d'un ensemble pseudocompact ; et de plus toute partie μ-bornée et fermée est compacte (à un ensemble localement négligeable près).

Preuve. - Les propriétés topologiques de X sont bien connues (voir par exemple [5]). Tout compact de X ne rencontrant $\mathbb{N}$ qu'en un nombre fini de points, alors X n'est pas μ-borné. Montrons que pour toute $f\in\Omega^p_c(\gamma X,\mu)$ on a $\mu_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}}|f| < +\infty$, ce qui prouvera que $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$ est une partie μ-bornée. Or, dans le cas contraire, il existerait une fonction $f\in\Omega^p_c(\gamma X,\mu)$, une suite d'intervalles $]a_n,b_n[$ deux à deux disjoints et une suite d'intervalles ouverts (U_n) de centre n vérifiant $\mu_{(a_n,b_n)}|f| \geq 2n$ et $\mu_{U_n}|f| \leq 2^{-n}$. Posons $B_n =]a_n,b_n[\cap\complement_{\mathbb{R}}(\bigcup_1^\infty U_i)$, on a $\mu_{B_n}|f| \geq n$. Maintenant si l'on pose $B = \overline{\bigcup B_n}^{\mathbb{R}}$, il est facile de voir que B est un fermé de $\mathbb{R}$ disjoint de $\mathbb{N}$, donc un ensemble relativement compact de X, ce qui est absurde puisque $\mu_B|f| = +\infty$. En conclusion, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$ est bien μ-bornée et ne peut pas être réunion d'un ensemble localement négligeable et d'un ensemble pseudocompact.

Montrons enfin le dernier point : Soit A une partie μ-bornée fermée de X. Elle ne rencontre $\mathbb{N}$ qu'en un nombre fini de points, l'ensemble $B = \bigcup_{i \in A \cap \mathbb{N}}]i-1/2, i+1/2[$ est relativement compact dans X, et comme il en est de même de $C = A \cap \mathbb{R} \cap \complement_{\mathbb{R}} B$, on a le résultat.

2. - L'ESPACE $\Omega_c^p(\mathfrak{X},\mu)$ ET LES CONDITIONS DE QUASI-TONNELAGE.

Un elc E est dit σ-quasi-tonnelé (resp. d-quasi-tonnelé) si toute suite fortement bornée de E' est équicontinue (resp. si toute réunion d'une suite de parties équicontinues, qui est fortement bornée, est équicontinue). La notion de parties μ-bornées permet de caractériser exactement ces deux propriétés relatives à l'espace Ω_c^p.

(2.1) THEOREME. - *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) L'espace $\Omega_c^p(\mathfrak{X},\mu)$ est σ-quasi-tonnelé.

(b) L'espace $\Omega_c^p(\mathfrak{X},\mu)$ est d-quasi-tonnelé.

(c) Toute partie μ-bornée est compacte à un ensemble localement négligeable près.

Preuve :

(a) $\Rightarrow$(c) : Soit A une partie μ-bornée ; il existe $\dot{f} \in \Omega_c^q(\mathfrak{X},\mu)$ dont un représentant f est une fonction strictement positive sur A et telle que $\mu_A|f| < +\infty$, d'où l'existence d'une suite de compacts (K_n) tels que $A = \bigcup K_n$ localement presque partout (l.p.p.). Considérons la suite $u_n = (f.\mu_{K_n})^{\circ}$ d'éléments de $(\Omega_c^p)'$. Pour conclure, il suffit de montrer qu'elle est équicontinue ou encore fortement bornée. Etablissons ce dernier point : dans le cas contraire, il existerait une suite (f_n) bornée dans Ω_c^p et telle que $\mu_A|f.f_n| \geq n^3$; la fonction $h = \sum_1^{\infty} |f_n|/n^2$ appartenant à Ω_c^p et vérifiant $\mu_A|fh| = +\infty$, on obtient la contradiction.

(c) $\Rightarrow$(a) : Considérons une suite (u_n) fortement bornée dans $(\Omega_c^p)'$. Elle est encore de la forme $u_n = (f_n.\mu_{K_n})^{\circ}$ où $f_n \in \Omega_c^q(K_n,\mu_{K_n})$ et où K_n est un compact de $\mathfrak{X}$. De plus, il est facile de voir que la suite $|u_n| = (|f_n|.\mu_{K_n})^{\circ}$ est également fortement bornée dans $(\Omega_c^p)'$. Posons $A_n = \{x ; f_n(x) \neq 0\}$, $A = \bigcup_0^{\infty} A_n$ et $f = \sum_0^{\infty} |f_n^{\circ}|/n^2$. Comme pour toute partie bornée B de Ω_c^p on a $\sup_{g \in B} \mu_A|fg| < +\infty$, il suffit pour conclure de montrer que $f \in \Omega_c^q(\mathfrak{X},\mu)$; en effet, si cela est acquis, l'ensemble A est une partie μ-bornée donc ne diffère d'un ensemble compact H que par un ensemble localement négligeable, mais dans ce cas la suite (u_n) s'identifie à une suite fortement bornée de $(L^p(H,\mu_H))'$, donc équicontinue, ce qui suffit.

Montrons donc ce point : si K est un compact de $\mathfrak{X}$, posons $h_n = \sum_{k=o}^{n} |f_k|/_{k^2}$ et $v_n = h_{n|K}.\mu_K$. Il est clair que la suite (v_n) est de Cauchy dans $(L^p(K,\mu_K))'$, donc converge vers $h.\mu_K$ avec $h \in L^q(K,\mu_K)$ et l'on vérifie sans peine que $f_K = h$, ce qui suffit.

(a) $\Rightarrow$(b) : Cette partie du théorème se démontre par récurrence transfinie. Soit donc $\mathcal{H}$ un ensemble fortement borné de $(\Omega_c^p)'$, réunion d'une suite $(\mathcal{H}_n)$ de parties équicontinues de $(\Omega_c^p)'$. Pour toute $\mathcal{H}_n$, il existe un compact K_n et une constante M_n vérifiant $\operatorname{Sup}_{u \in \mathcal{H}_n} |u(f)| \leqslant M_n N_{K_n}^p(f)$ pour toute $f \in \Omega_c^p$. Considérons maintenant l'ensemble $K = \bigcup_n K_n$ et la mesure ν sur K définie par $\nu = \sum_1^\infty 2^{-n}(\mu_{K_n}/\mu(K_n))$. Cette dernière est évidemment bornée et l'ensemble des parties localement ν-négligeables coïncide avec celui des parties localement μ-négligeables. Le tout est alors conséquence du lemme suivant :

(2.2) <u>LEMME</u>. - *Soient* μ *une mesure bornée sur un espace compactologique* $\mathfrak{X}$ *et* $(A_j) = \mathcal{A}$ *une famille d'ensembles intégrables. Il existe alors une suite extraite* (A_n) *telle que pour tout* $A \in \mathcal{A}$ *on ait* $A \subset \bigcup_1^\infty A_n$ *l.p.p.*

Preuve. - Considérons les ensembles $\mathcal{F}$ dont les éléments sont les sous-ensembles mesurables $B_j \subset A_j$ deux à deux disjoints et de mesure non nulle. Ordonnons les ensembles $\mathcal{F}$ par inclusion. Avec le lemme de Zorn, il existe un élément maximal $(B_i)_{i \in I}$. De l'inégalité $\mu(\bigcup B_i) \geqslant \Sigma\, \mu(B_i)$, il résulte que l'ensemble I est dénombrable. Soit maintenant $C = \bigcup_{n \in I} B_n$. S'il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A \cap (\complement C)) \neq 0$, cela contredit le caractère maximal de (B_n), d'où le résultat.

Terminons la preuve du théorème ; il résulte du lemme l'existence d'une suite $u_n = (f_n.\mu_{K_n})^\circ \in H$ telle que pour tout $u = (f.\mu_K)^\circ \in H$ on ait $K \subset \bigcup K_n$ l.p.p. La suite (u_n) étant équicontinue, l'ensemble A ne diffère d'un compact que par un ensemble localement négligeable.

J'ignore, dans le cas général, si les conditions du théorème 2.1 sont encore équivalentes au fait que Ω_c^p est quasi-tonnelé. Par contre, dans certains cas particuliers (non triviaux), la réponse est affirmative.

(2.3) <u>THEOREME</u>. - *Si la prémesure* μ *est* σ*-bornée (c'est-à-dire si* $\mathfrak{X}$ *est réunion dénombrable d'ensembles* μ*-intégrables) alors* Ω_c^p *est quasi-tonnelé si et seulement s'il est* σ*-quasi-tonnelé.*

Preuve. - Elle résulte du lemme (2.2).

Un espace (DF) étant un elc d-quasi-tonnelé qui possède une base **dénombrable** de parties bornées, il est naturel de se demander dans quel cas Ω_c^p possède cette propriété.

(2.4) PROPOSITION. - *S'il existe dans Ω_c^p une base dénombrable de parties **bornées**, alors $\mathfrak{X}$ est réunion d'un ensemble de Weierstrass et d'un ensemble **localement** négligeable.*

En laissant la démonstration à la sagacité du lecteur, on en déduit le résultat suivant :

(2.5) THEOREME. - *Si toute partie de Weierstrass de $c\mathfrak{X}$ est μ-bornée (par **exemple** lorsque $\mathfrak{X}$ est lui-même μ-borné), alors Ω_c^p est un espace (DF) si et **seulement** si $\mathfrak{X}$ est compact localement presque partout.*

Preuve. - Avec la proposition (2.4), elle résulte du théorème (2.1).

3. - LES CONDITIONS DE TONNELAGE.

Un elc E est dit σ-tonnelé (resp. d-tonnelé) si toute suite faiblement **bornée** de E' est équicontinue (resp. si toute partie faiblement bornée de E', réunion dénombrable de parties équicontinues, est équicontinue).

Le théorème suivant relie ces deux notions, pour le cas d'un espace Ω_c^p :

(3.1) THEOREME. - *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) $\Omega_c^p(\mathfrak{X},\mu)$ *est σ-tonnelé.*

(b) $\Omega_c^p(\mathfrak{X},\mu)$ *est d-tonnelé.*

(c) $(\Omega_c^p(\mathfrak{X},\mu))'_\sigma$ *est semi-complet.*

Preuve :

(a) $\Rightarrow$(b) : On utilise le lemme (2.2) et la méthode décrite dans la **démonstration** du théorème (2.1).

(c) $\Rightarrow$(a) : Soit A une partie μ-bornée de $\mathfrak{X}$. Il existe une fonction $g \in \Omega_c^q(\mathfrak{X},\mu)$ telle que l'on ait $\mu_A|fg| < +\infty$ pour toute $f\in \Omega_c^p$. Soit (K_n) une suite croissante de parties compactes de A telles que $A = \bigcup K_n$ l.p.p. ; $\mu_A|fg| = \operatorname{Sup} \mu_{K_n}|fg|$ pour toute $f\in\Omega_c^p$. Il en résulte sans difficulté que la suite $(u_n = \mu_{K_n}.|g|)$ est de Cauchy dans $(\Omega_c^p)'_\sigma$, donc converge vers une mesure $u\in(\Omega_c^p)'$, et l'on montre **facilement** que A est inclus l.p.p. dans le support de u. Toute partie A μ-bornée **est** donc incluse l.p.p. dans un compact de $\mathfrak{X}$, et par conséquent $\Omega_c^p(\mathfrak{X},\mu)$ est **σ-quasi-**

tonnelé (avec le théorème (2.1)). Pour conclure, il suffit de remarquer que tout tonneau T de $(\Omega_c^p)'_\sigma$ étant bornivore, il en est de même pour tout tonneau de Ω_c^p, ou encore que toute partie faiblement bornée de $(\Omega_c^p)'$ est fortement bornée.

(a) $\Rightarrow$(c) : évident.

Dans le cas où la prémesure μ est quelconque, on ne connaît pas de condition nécessaire et suffisante (portant sur $(\mathfrak{X},\mu)$) pour que $\Omega_c^p(\mathfrak{X},\mu)$ soit σ-tonnelé, et le seul résultat positif reste le théorème de Nielsen qui se démontre, dans le cas compactologique, de la même manière que dans [8]. Citons-le pour mémoire.

(3.2) <u>THEOREME</u> (<u>NIELSEN</u>). - *Si toute partie de Weierstrass de* $c\mathfrak{X}$ *est compacte (à un ensemble localement négligeable près), alors* $\Omega_c^p(\mathfrak{X},\mu)$ *est tonnelé.*

Remarque. - Si la prémesure μ est compactologique [6], par exemple lorsque $\mathfrak{X} = \gamma T$, avec T localement compact, l'espace $\Omega_c^p(\mathfrak{X},\mu)$ est alors complet et les trois conditions du théorème (3.1) sont encore équivalentes à celles du théorème (2.1).

Remarque. - Si la prémesure μ est σ-bornée, alors les conditions du théorème (2.1) sont équivalentes au fait que $\Omega_c^p(\mathfrak{X},\mu)$ est tonnelé.

4. - UNE CONDITION SUR $(\mathfrak{X},\mu)$ POUR QUE $\Omega_c^p(\mathfrak{X},\mu)$ SOIT ULTRABORNOLOGIQUE.

Dans ce chapitre, $\mathfrak{X}$ est un espace compactologique régulier et μ une mesure bornée sur $\mathfrak{X}$. On sait alors que μ s'identifie à une mesure sur $\beta\mathfrak{X}$ (compactifié de Stone-Čech de $c_R\mathfrak{X}$, qui est l'espace $\mathfrak{X}$ muni de la plus fine topologie complètement régulière compatible avec ses compacts) concentrée sur $\mathfrak{X}$. Cette propriété va permettre de définir (par analogie avec les travaux de [4]) la notion d'appui d'un disque de Ω_c^p par l'intermédiaire duquel on donnera des conditions portant sur $\mathfrak{X}$ pour que Ω_c^p soit ultrabornologique. Par abus de notation, on désignera encore par μ la prémesure image $i(\mu)$ par l'injection canonique $i : \mathfrak{X} \to \beta\mathfrak{X}$.

<u>La notion d'appui</u>.

(4.1) <u>THEOREME</u>. - *Soit* D *un disque de* $\Omega_c^p(\mathfrak{X},\mu)$ *contenant* $\Delta = (f \in L^p(\mathfrak{X},\mu)\ ;\ N^p(f) \leq 1)$. *Il existe un plus petit compact* $K(D) \subset \beta\mathfrak{X}$ *(appelé appui de* D*) tel que la condition* $\mu_{K(D)}|f^\circ|^p < 1$ *implique* $f \in D$.

Preuve. - Soit $\mathfrak{F}$ la famille des compacts de $\beta\mathfrak{X}$ vérifiant cette propriété. La condition $D \supset \Delta$ impliquant $\beta\mathfrak{X} \in \mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}$ n'est pas vide. Montrons que $\mathfrak{F}$ est stable par intersection finie. En effet, soient K et K' deux éléments de $\mathfrak{F}$ et K" leur intersection. Considérons maintenant une fonction $f \in \Omega_c^p(\mathfrak{X},\mu)$ telle que $\mu_{K''}|f^\circ|^p < 1$. On construit deux fonctions g et h de la manière suivante :

$$\begin{array}{ll} g^\circ = f^\circ \text{ sur } K'' & h^\circ = f^\circ \text{ sur } K'' \\ g^\circ = 0 \text{ sur } K' \setminus K & h^\circ = 2f^\circ \text{ sur } K' \setminus K \\ g^\circ = 2f^\circ \text{ ailleurs} & h^\circ = 0 \text{ ailleurs.} \end{array}$$

D'une part, g et h appartiennent à $\Omega_c^p(\mathfrak{X},\mu)$, d'autre part, $\mu_{K'}|g^\circ|^p < 1$ et $\mu_K|h^\circ|^p < 1$. Il en résulte que g et h appartiennent à D, donc $\frac{g+h}{2} = f$ également. Montrons pour terminer que $A = \bigcap_{K \in \mathcal{F}} K$ est l'ensemble cherché : soit $f \in \Omega_c^p$ telle que l'on ait $\mu_A|f^\circ|^p = \alpha < 1$, d'où $f.\varphi_A \in cD$ avec $\alpha < c < 1$. De plus la famille $\mathcal{F}$ étant filtrante décroissante, il existe un compact $K \in \mathcal{F}$ tel que $\mu(|f^\circ|^p.\varphi_{K \setminus A}) < (1-c)$ et par conséquent $(1-\varphi_A).f \in (1-c)D$. Comme $f = (1-\varphi_A)f + f.\varphi_A$ appartient à $cD + (1-c)D = D$, le résultat est acquis.

Nous allons montrer maintenant que l'appui d'un disque bornivore de Ω_c^p contenant 2Δ est un compact du bidual $(c_{\mathbb{R}}\mathfrak{X})''$ [3]. Pour cela il suffit d'établir que K(D) est un compact de $\upsilon\mathfrak{X}$ (le replété de $c_{\mathbb{R}}\mathfrak{X}$). En effet, supposons ce dernier point acquis, cela implique que $B = K(D) \cap \mathfrak{X}$ est un borné topologique de $c_{\mathbb{R}}\mathfrak{X}$, donc son adhérence $\overline{B}^\beta$, prise dans $\beta\mathfrak{X}$, est un compact de $(c_{\mathbb{R}}\mathfrak{X})''$; comme $\mu_{K(D)}|f^\circ|^p = \mu_{\overline{B}^\beta}|f^\circ|^p$ pour toute fonction $f \in \Omega_c^p$, il est clair que $K(D) = \overline{B}^\beta$.
La proposition suivante va permettre de conclure.

(4.2) <u>PROPOSITION.</u> - *L'appui d'un disque bornivore* D *de* Ω_c^p *contenant* 2Δ *est un compact de* $\upsilon\mathfrak{X}$.

Preuve. - Il est bien connu que pour tout point $a \in \beta\mathfrak{X} \setminus \upsilon\mathfrak{X}$ il existe une suite croissante d'ouverts (O_n) de $\beta\mathfrak{X}$ recouvrant $\mathfrak{X}$ et telle que, pour tout n, on ait $a \notin \overline{O}_n^\beta$. Le tout est alors conséquence du lemme suivant dont la démonstration suit celle du résultat similaire de [4].

(4.3) <u>LEMME</u>. - *Soit* (O_n) *une suite croissante d'ouverts de* $\beta\mathfrak{X}$ *recouvrant* $\mathfrak{X}$. *Il existe alors un ouvert* O_n *tel que* $K(D) \subset \overline{O}_n^\beta$.

Preuve. - Sinon, il existe une suite (f_n) telle que $\mu_{\overline{O}_n^\beta}|f_n^\circ|^p < 1$ et $f_n \notin D$. Comme D contient 2Δ, il est clair que la suite (g_n) définie par $g_n = 2f_n^\circ \times (1-\varphi_{\overline{O}_n^\beta})$ n'appartient pas à D. Finalement, tout compact K de $\mathfrak{X}$ étant inclus dans l'un des ouverts (O_n), la suite $n \times g_n$ est bornée dans Ω_c^p, donc absorbée par D, mais cela signifie qu'il existe un indice $n_\circ$ tel que $g_{n_\circ} \in D$, ce qui suffit.

On obtient ainsi le critère suivant :

(4.4) THEOREME. - *Si toute partie fermée et bornée de* $c_{\mathbb{R}}\mathfrak{X}$ *est compacte à un ensemble localement négligeable près, alors* $\Omega_c^p(\mathfrak{X},\mu)$ *est ultrabornologique.*

Preuve. - Compte tenu du fait que la mesure μ est bornée sur $\mathfrak{X}$, donc que Ω_c^p est complet, le théorème est conséquence de la proposition (4.2).

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. BLANCHARD - M. JOURLIN, *La topologie de la convergence bornée sur les algèbres de fonctions continues*, Publ. Dép. Math., Lyon, 6-2, 1969, p. 85-96.

[2] H. BUCHWALTER, *Topologies et compactologies*, Publ. Dép. Math. Lyon, 6-2, 1969, p. 1-74.

[3] H. BUCHWALTER, *Parties bornées d'un espace topologique complètement régulier*, Séminaire Choquet, 9e année, 1969-1970, n° 14, 15 pages.

[4] H. BUCHWALTER, *Sur le théorème de Nachbin-Shirota*, J. Math. pures et appl., 51, 1972, p. 399-418.

[5] L. GILLMAN - M. JERISON, *Rings of continuous functions*, Van Nostrand (1960).

[6] A. GOLDMAN, *Prémesures et mesures sur les espaces compactologiques*, Publ. Dép. Math. Lyon, 9-1, 1972, p. 61-86.

[7] L. NACHBIN, *Topological vector spaces of continuous functions*, Proc. Acad. Sc. USA, 40, 1954, p. 471-474.

[8] N.J. NIELSEN, *Projective limits of* L^p *spaces*, Aarhus Universitet, May 1970.

[9] T. SHIROTA, *On locally convex vector spaces of continuous functions*, Proc. Jap. Acad. Sc., 30, 1954, p. 294-298.

André GOLDMAN

Département de Mathématiques
Université LYON I
43, boulevard du Onze Novembre
69621-VILLEURBANNE