PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

JEAN HORVÁTH

Quelques résultats de M. H. Powell sur le théorème du graphe fermé

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1973, tome 10, fascicule 3
, p. 65-77

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1973__10_3_65_0>

$II^{\text{ème}}$ - Coll. Anal. Fonct.
(1973, Bordeaux)
p. 219-231

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1973 t. 10-3

Quelques résultats de M.H. Powell sur le théorème du graphe fermé

par Jean Horváth

Si j'ai choisi de parler ici sur quelques résultats récents de mon jeune collègue Mike Powell [7], c'est non seulement parce que je crois que ces résultats méritent d'être connus et qu'en particulier ils simplifient et illustrent certains théorèmes classiques, mais aussi parce que dans ces résultats interviennent des idées de bornologie, dont précisément Bordeaux est un des hauts-lieux, grâce au talent, l'énergie et l'enthousiasme du Professeur Hogbe-Nlend.

1. Le théorème de Adasch-Kōmura-Valdivia

1.1. Pour nous mettre dans l'ambiance, je voudrais commencer par rappeler le théorème déjà classique de ces auteurs [1; 6; 8; 9]. En 1961 Mahowald démontra que si E est un espace vectoriel topologique séparé tel que toute application linéaire dans un espace de Banach dont le graphe est fermé est nécessairement continue, alors E est tonnelé. Le problème se posa alors de caractériser les espaces localement convexes séparés F tels que toute application linéaire d'un espace tonnelé séparé dans F dont le graphe est fermé est continue.

Notons par $\mathcal{T}_F$ la topologie de l'espace localement convexe séparé F. L'ensemble Φ des topologies tonnelées plus fines que $\mathcal{T}_F$ n'est pas vide car la topologie localement convexe la plus fine lui appartient. La borne inférieure localement convexe $\mathcal{T}_F^t$ de Φ est elle-même tonnelée: c'est la topologie la moins fine parmi toutes les topologies tonnelées plus fines que $\mathcal{T}_F$; on l'appelle la topologie tonnelée associée à $\mathcal{T}_F$. On voit facilement que si E est un espace tonnelé et $u: E \to F[\mathcal{T}_F]$ une application linéaire continue, alors u reste continue quand on remplace $\mathcal{T}_F$ par $\mathcal{T}_F^t$.

Kōmura démontra en 1962 que les deux assertions suivantes, portantes sur l'espace localement convexe séparé F, sont équivalentes:

1a) Pour tout espace tonnelé séparé E, toute application linéaire $u: E \to F$ dont le graphe est fermé est continue.

1b) Si $\mathcal{T}$ est une topologie localement convexe séparée sur F moins fine que $\mathcal{T}_F$, alors $\mathcal{T}_F^t = \mathcal{T}^t$.

Avant de donner la démonstration, je rappelle que le graphe d'une application linéaire $u: E \to F[\mathcal{T}_F]$ est fermé si et seulement si il existe une topologie localement convexe séparée $\mathcal{T}$ moins fine que $\mathcal{T}_F$ telle que $u: E \to F[\mathcal{T}]$ soit continue [6, lemme 3.1; 5, 5.27].

1a) $\Rightarrow$ 1b): Si $\mathcal{T}_F$ est plus fin que $\mathcal{T}$, alors évidemment $\mathcal{T}_F^t$ est plus fin que $\mathcal{T}^t$. D'autre part $1_F: F[\mathcal{T}^t] \to F[\mathcal{T}]$ est continu, donc à plus forte raison ayant graphe fermé. Par conséquent $1_F: F[\mathcal{T}^t] \to F[\mathcal{T}_F]$ a un graphe fermé, donc est continue par hypothèse. Il en résulte que $\mathcal{T}^t$ est plus fine que $\mathcal{T}_F$, donc que $\mathcal{T}_F^t$.

1b) $\Rightarrow$ 1a): Si le graphe de $u: E \to F[\mathcal{T}_F]$ est fermé, soit $\mathcal{T}$ une topologie localement convexe séparée moins fine que $\mathcal{T}_F$ telle que $u: E \to F[\mathcal{T}]$ soit continue. Puisque E est tonnelé, $u: E \to F[\mathcal{T}^t]$ est aussi continue, mais $\mathcal{T}^t = \mathcal{T}_F^t$ par hypothèse, donc à plus forte raison $u: E \to F[\mathcal{T}_F]$ est continue.

Le dual algébrique F^* de F est complet, donc quasi-complet pour la topologie $\sigma(F^*,F)$. Il en résulte que l'intersection d'une famille quelconque de sous-espaces vectoriels quasi-complets de F^* est un sous-espace vectoriel quasi-complet. Étant donné un sous-espace vectoriel L de F^* on peut donc parler de son quasi-complété $\ulcorner L$, qui est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels quasi-complets de F^* contenant L.

Un espace localement convexe séparé F est tonnelé si et seulement si $\mathcal{T}_F$ est égal à la topologie de Mackey $\tau(F,F')$ et F' est quasi-complet pour $\sigma(F^*,F)$. Il en résulte immédiatement que $\mathcal{T}_F^t = \tau(F,\ulcorner F'\urcorner) = \beta(F,\ulcorner F'\urcorner)$.

On a alors les deux assertions suivantes, dont l'équivalence avec les deux assertions précédentes constitue l'énoncé du théorème d'Adasch-Komura-Valdivia sous la forme qui lui a été donnée par Powell:

1c) [Adasch] Pour tout sous-espace vectoriel L de F' qui est $\sigma(F',F)$-dense dans F' on a $\ulcorner L\urcorner \supset F'$.

1d) [Valdivia] Tout sous-espace vectoriel quasi-complet M de F^*, tel que $M \cap F'$ soit $\sigma(F',F)$-dense dans F', contient F'.

Il est clair que ces deux conditions sont équivalentes.

1b) $\Rightarrow$ 1c): Si L est un sous-espace $\sigma(F',F)$-dense de F', alors $\mathcal{T} = \sigma(F,L)$ est une topologie localement convexe séparée moins fine que $\mathcal{T}_F$. Par hypothèse $\mathcal{T}^t = \tau(F,\ulcorner L\urcorner) = \mathcal{T}_F^t = \tau(F,\ulcorner F'\urcorner)$, d'où $\ulcorner L\urcorner = \ulcorner F'\urcorner$, c.-à-d. $\ulcorner L\urcorner \supset F'$.

1c) $\Rightarrow$ 1b): Soit $\mathcal{T}$ une topologie localement convexe séparée moins fine que $\mathcal{T}_F$ et posons $L = (F[\mathcal{T}])'$. Alors L est un sous-espace faiblement dense de F', donc par hypothèse $\ulcorner L\urcorner = \ulcorner F'\urcorner$, d'où $\mathcal{T}^t = \mathcal{T}_F^t$.

1.2. Le résultat qu'on vient de démontrer donne une démonstration particulièrement simple du théorème du graphe fermé de Pták et des époux Robertson.

Je désigne par $\nu(F',F)$ la topologie la plus fine sur F' qui induit sur toute partie équicontinue la même topologie que $\sigma(F',F)$. Un sous-ensemble M de F' est $\nu(F',F)$-fermé si et seulement si pour tout ensemble convexe, équilibré, $\sigma(F',F)$-fermé, équicontinu $A \subset F'$ l'intersection $M \cap A$ est $\sigma(F',F)$-fermée.

On dit que F est un espace infra-Pták (ou B_r-complet) si tout sous-espace $\nu(F',F)$-fermé et $\sigma(F',F)$-dense de F' est égal à F'. Il résulte du théorème de Krein-Chmoulian que tout espace de Fréchet est infra-Pták, et du théorème de Grothendieck sur le complété que tout espace infra-Pták est complet.

<u>Théorème</u> [Pták-A.P. et W. Robertson]. Si E est un espace tonnelé et F un espace infra-Pták, alors toute application linéaire $E \to F$ dont le graphe est fermé est continue.

<u>Démonstration</u>. Je vais montrer que F satisfait à la condition 1d). Soit M un sous-espace vectoriel quasi-complet de F^* tel que $L = M \cap F'$ soit $\sigma(F',F)$-dense dans F'. Je dis que L est $\nu(F',F)$-fermé, alors par hypothèse $L = F'$, c.-à-d. $M \supset F'$. Or si A est un sous-ensemble convexe, équilibré, $\sigma(F',F)$-fermé et équicontinu de F', alors $L \cap A = M \cap A$ est $\sigma(F',F)$-fermé puisque M est quasi-complet et A compact.

1.3. A vrai dire, Komura démontre un résultat bien plus général que celui que nous avons cité plus haut. Il considère une propriété α qu'un espace localement convexe séparé peut avoir ou ne pas avoir, et il dit que E a la propriété $\bar{\alpha}$ si E a la topologie localement convexe finale par rapport à une famille d'applications linéaires dans E d'espaces qui ont tous la propriété α. Etant donné un espace localement convexe séparé F avec sa topologie $\mathcal{T}_F$, la $\bar{\alpha}$-topologie associée $\mathcal{T}_F^{\bar{\alpha}}$ est la moins fine parmi toutes les topologies ayant la propriété $\bar{\alpha}$ qui sont plus fines que $\mathcal{T}_F$. On a alors l'équivalence des conditions suivantes, portantes sur l'espace localement convexe séparé F:

a) Pour tout espace E ayant la propriété α, toute application linéaire $u: E \to F$ dont le graphe est fermé est continue.

b) Pour tout espace E ayant la propriété $\bar{\alpha}$, toute application linéaire $u: E \to F$ dont le graphe est fermé est continue.

c) Si $\mathcal{T}$ est une topologie localement convexe séparée sur F moins fine que $\mathcal{T}_F$, alors $\mathcal{T}_F^{\overline{\alpha}} = \mathcal{T}^{\overline{\alpha}}$.

2. Espaces normables

Si pour α on prend la propriété d'être normable, alors $\overline{\alpha}$ est la propriété d'être un espace localement convexe séparé bornologique. Un système fondamental de voisinages de l'origine pour la topologie bornologique $\mathcal{T}_F^{\times}$ associée à $\mathcal{T}_F$ est donné par tous les ensembles convexes, équilibrés, $\mathcal{T}_F$-bornivores. On a alors l'équivalence des assertions suivantes:

2a) Pour tout espace normable E, toute application linéaire $E \to F$ dont le graphe est fermé est continue.

2b) Pour tout espace localement convexe bornologique séparé E, toute application linéaire $E \to F$ dont le graphe est fermé est continue.

2c) Si $\mathcal{T}$ est une topologie localement convexe séparée sur F moins fine que $\mathcal{T}_F$, alors $\mathcal{T}_F^{\times} = \mathcal{T}^{\times}$.

Comme $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}^{\times}$ ont les mêmes ensembles bornés, cette dernière condition est equivalente à la suivante:

2d) Si $\mathcal{T}$ est une topologie localement convexe séparée sur F moins fine que $\mathcal{T}_F$, alors tout ensemble $\mathcal{T}$-borné est $\mathcal{T}_F$-borné (c.-à-d. $\mathcal{T}_F$ et $\mathcal{T}$ ont les mêmes ensembles bornés).

On sait qu'une application linéaire d'un espace localement convexe séparé E dans un espace localement convexe séparé F est bornée (c.-à-d. transforme tout ensemble borné en un ensemble borné) si et seulement si elle transforme toute suite qui converge vers 0 au sense de Mackey dans E en une suite bornée dans F. Appliquant ceci à

$1_F: F[\mathcal{T}] \to F[\mathcal{T}_F]$ on voit que 2d) est équivalente à la condition suivante:

2e) Si $\mathcal{T}$ est une topologie localement convexe séparée sur F moins fine que $\mathcal{T}_F$, alors toute suite qui converge vers 0 au sense de Mackey pour $\mathcal{T}$ est bornée pour $\mathcal{T}_F$.

Il est clair que 2b) peut aussi s'énoncer en disant que si E est un espace localement convexe séparé quelconque et $u: E \to F$ une application linéaire dont le graphe est fermé, alors $u: E[\mathcal{T}_E^\times] \to F$ est continue, c.-à-d. bornée. On voit donc que 2b) est équivalente à:

2f) Pour tout espace localement convexe séparé E, toute application linéaire $u: E \to F$ dont le graphe est fermé transforme les suites qui convergent vers 0 au sens de Mackey dans E en des suites bornées dans F.

Observons que 2e) est un cas particulier de 2f). En tenant compte de ce que pour $\mathcal{T}_F$ et $\sigma(F,F')$ les sous-ensembles bornés sont les mêmes, on voit que 2d) est équivalente à:

2g) Si L est un sous-espace $\sigma(F',F)$-dense de F', alors pour tout sous-ensemble B de F, tel que $y'(B)$ soit borné pour tout $y' \in L$, on a que $y'(B)$ est borné pour tout $y' \in F'$.

<u>Exemple</u>. Soit $F = \mathcal{C}([0,1])$ l'espace des fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$ muni de la topologie de la convergence uniforme. Il existe un espace normable E et une application linéaire $E \to F$ dont le graphe est fermé mais qui n'est pas continue. En effet, les fonctions "triangulaires" f_n bien connues, définies par $f_n(x) = 2^{2n}x$ si $0 \leq x \leq 2^{-n}$, $f_n(x) = 2^n(2 - 2^n x)$ si $2^{-n} \leq x \leq 2.2^{-n}$ et $f_n(x) = 0$ si $2.2^{-n} \leq x \leq 1$, convergent vers 0 au sens de Mackey pour la topologie de la convergence simple, mais $\| f_n \| = \max_{0 \leq x \leq 1} |f_n(x)| \to \infty$. L'espace F ne satisfait donc pas à la condition 2e).

3. Espaces banachisables

Quand α est la propriété que la topologie de E peut être définie par une norme pour laquelle E est un espace de Banach, alors $\bar{\alpha}$ est la propriété d'être un espace ultrabornologique. Un système fondamental de voisinages de 0 pour la topologie ultrabornologique $\mathcal{T}_F^u$ associée à la topologie $\mathcal{T}_F$ est donné par tous les ensembles équilibrés, convexes qui absorbent tous les disques complétants (c.-à-d. ensembles bornés, équilibrés, convexes B tels que E_B muni de la jauge de B soit un espace de Banach). Les assertions suivantes sont équivalentes:

3a) Pour tout espace de Banach E, toute application linéaire $E \to F$ dont le graphe est fermé est continue.

3b) Pour tout espace ultrabornologique E, toute application linéaire $E \to F$ dont le graphe est fermé est continue.

3c) Si $\mathcal{T}$ est une topologie localement convexe séparée sur F moins fine que $\mathcal{T}_F$, alors $\mathcal{T}_F^u = \mathcal{T}^u$.

Il est connu [3] qu'un espace localement convexe séparé F est ultrabornologique si et seulement si tout ensemble convexe, équilibré qui absorbe tout ensemble convexe, équilibré, compact est un voisinage de 0. Je démontre ceci en le généralisant suivant Powell. Soit F un espace localement convexe séparé et soit $\mathcal{K}$ la collection de tous les ensembles convexes, équilibrés, compacts de F. Notons par $\mathcal{T}'_F$ la topologie dont un système fondamental de voisinages de 0 est donné par tous les ensembles convexes, équilibrés qui absorbent les éléments de $\mathcal{K}$. Je dis qu'alors $\mathcal{T}_F^u = \mathcal{T}'_F$. Comme tout ensemble convexe, équilibré, compact est un disque complétant, $\mathcal{T}_F^u$ est moins fin que $\mathcal{T}'_F$. Soit alors V un ensemble convexe, équilibré qui n'est pas un voisinage de 0 pour $\mathcal{T}_F^u$. Il existe un disque complétant $B \subset F$ tel que $B \not\subset n^3 V$ pour tout entier $n \geq 1$, c.-à-d. il existe $x_n \in B$ tel que $x_n \notin n^3 V$. Or $\frac{1}{n} x_n$

converge vers 0 dans F_B, donc l'enveloppe convexe, équilibrée, fermée K de $\left\{\frac{1}{n}x_n\right\}$ est compact pour $\mathcal{T}^u_{F'}$ et à plus forte raison $K \in \mathcal{K}$. Mais $K \not\subset n^2 V$, donc V n'est pas un voisinage pour $\mathcal{T}'_F$ non plus.

On dit [2; 3] qu'une suite (x_n) de points de F est très convergente vers 0 s'il existe $K \in \mathcal{K}$ et une suite $\lambda_n \uparrow \infty$ tels que $\lambda_n x_n \in K$ (c.-à-d. (x_n) tend vers 0 au sens de Mackey pour la bornologie engendrée par $\mathcal{K}$). Nous venons de démontrer que si V n'est pas un voisinage de 0 pour $\mathcal{T}^u_F$, alors il existe une suite très convergente vers 0 qui n'est pas absorbée par V. En effet, $y_n = \frac{1}{n^2}x_n$ est très convergente vers 0 puisque $ny_n \in K$, mais $y_n \notin nV$. Si donc V est un ensemble convexe, équilibré qui absorbe toute suite très convergente vers 0, il est un voisinage de 0 pour $\mathcal{T}^u_F$.

Il résulte de ceci que l'application linéaire $f: E[\mathcal{T}^u_E] \to F$ est continue si et seulement si f transforme toute suite très convergente vers 0 dans E en un suite bornée dans F. Les assertions 3a)-3c) sont donc équivalentes au suivantes:

3d) Si $\mathcal{T}$ est une topologie localement convexe séparée sur F moins fine que $\mathcal{T}_F$, alors tout ensemble convexe, équilibré, $\mathcal{T}$-compact est $\mathcal{T}_F$-borné.

3e) Si $\mathcal{T}$ est une topologie localement convexe séparée sur F moins fine que $\mathcal{T}_F$, alors toute suite très convergente vers 0 pour $\mathcal{T}$ est bornée pour $\mathcal{T}_F$.

3f) Pour tout espace localement convexe séparé E, toute application linéaire $E \to F$ dont le graphe est fermé transforme les suites très convergentes vers 0 dans E en des suites bornées dans F.

Tout ensemble convexe, équilibré $\mathcal{T}_F$-compact est $\sigma(F,F')$-compact et tout ensemble convexe, équilibré, $\sigma(F,F')$-compact est un disque complétant. D'ici résulte que les assertions précédentes sont aussi équivalentes à:

3g) Si L est un sous-espace $\sigma(F',F)$-dense de F', alors pour tout sous-ensemble convexe, équilibré, $\sigma(F,L)$-compact K de F on a que $y'(K)$ est borné pour tout $y' \in F'$.

Je voudrais remarquer que dans un travail récent [10] Valdivia donne deux nouvelles classes qui sont maximales pour le théorème du graphe fermé. Il résulte de ce travail que si E est un espace normé, non tonnelé, alors il existe un espace de Banach F et une application linéaire $u: E \to F$ dont le graphe est fermé mais qui n'est pas continue. Il semble que des résultats voisins aux précédents se trouvent dans la thèse d'Eberhardt [4], qui ne me fut malheureusement pas accessible pendant la rédaction de cette conférence.

4. La topologie ultrabornologique associée à un espace de De Wilde

Les réseaux constituent la contribution la plus importante à la théorie des espaces localement convexes au cours des vingt dernières années. Pour les détails je renvoie au mémoire de De Wilde [2]; un exposé très succinct d'une petite partie de la théorie se trouve dans le cours que j'ai fait en 1972 à l'Ecole d'Été de Bruxelles sur les Espaces Vectoriels Topologiques [5]. Ici je ne veux que rappeler quelques définitions et résultats fondamentaux.

Un réseau sur un espace localement convexe séparé E est une famille $\mathcal{R} = \{C(n_1,\dots,n_k)\}$ de parties de E, où k, n_1, $n_2,\dots$ varient dans l'ensemble des entiers ≥ 1, et qui satisfait aux conditions

$$E = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} C(n_1),\ C(n_1) = \bigcup_{n_2=1}^{\infty} C(n_1,n_2),\dots,\ C(n_1,\dots,n_{k-1}) = \bigcup_{n_k=1}^{\infty} C(n_1,\dots,n_{k-1},n_k).$$

On dit que $\mathcal{R}$ est du type $\mathcal{C}$ si pour toute suite $(n_k)_{k\geq 1}$ d'entiers ≥ 1 il existe une suite $(\rho_k)_{k\geq 1}$ de nombres >0 tels que les conditions $0 \leq \lambda_k \leq \rho_k$ et $x_k \in C(n_1,\dots,n_k)$ pour $k \geq 1$ impliquent que la série $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$ est convergente dans E.

Profitant de l'absence de De Wilde de ce colloque, je propose qu'on appelle un espace localement convexe séparé sur lequel il existe un réseau du type $\mathcal{C}$ un espace de De Wilde. Avec cette terminologie commode on peut énoncer:

Théorème du graphe fermé de De Wilde. Si E est un espace de Fréchet (donc aussi si E est un espace ultrabornologique) et si F est un espace de De Wilde, alors toute application linéaire de E dans F dont le graphe est séquentiellement fermé est continue.

La classe des espaces de De Wilde jouit de propriétés de stabilité remarquables. Par exemple:

a) Tout espace de Fréchet est un espace de De Wilde.

b) Tout sous-espace vectoriel séquentiellement fermé d'un espace de De Wilde est un espace de De Wilde.

c) Le produit d'une suite d'espaces de De Wilde est un espace de De Wilde.

d) La limite inductive d'une suite d'espaces de De Wilde est un espace de De Wilde.

e) Le dual fort d'un espace métrisable est un espace de De Wilde.

f) Le dual fort de la limite inductive d'une suite d'espaces métrisables est un espace de De Wilde.

Ce qui nous intéresse ici le plus, c'est la propriété évidente suivante:

g) Si $\mathcal{R} = \{ C(n_1,\ldots,n_k) \}$ est un réseau du type $\mathcal{C}$ sur E et $u: E \to F$ est une application linéaire continue, alors $u(\mathcal{R}) = \{ u(C(n_1,\ldots,n_k)) \}$ est un réseau du type $\mathcal{C}$ sur u(E).

D'ici résulte en particulier que le quotient d'un espace de De Wilde est un espace de De Wilde, que toute application linéaire surjective d'un espace de De Wilde sur un espace de Fréchet dont le graphe est fermé est ouverte, et finalement que si $\mathcal{T}_E$ est une topologie de De Wilde, alors toute topologie localement convexe séparée moins fine que $\mathcal{T}_E$ est aussi de De Wilde.

Allant dans l'autre direction, De Wilde démontra que si $\mathcal{T}_E$ est de De Wilde, alors la topologie bornologique associée $\mathcal{T}_E^{\times}$ est aussi de De Wilde. Or Powell a démontré le théorème suivant:

<u>Si $\mathcal{T}_E$ est une topologie de De Wilde, alors la topologie ultrabornologique associée $\mathcal{T}_E^u$ est aussi de De Wilde.</u>

Je remarque tout de suite que c'est le plus loin qu'on puisse aller dans cette direction: si $\mathcal{T}$ est une topologie plus fine que $\mathcal{T}_E$ et qui est de De Wilde, alors $\mathcal{T}$ est moins fine que $\mathcal{T}_E^u$. En effet, comme $1_E: E[\mathcal{T}_E^u] \to E[\mathcal{T}_E]$ est continue, $1_E: E[\mathcal{T}_E^u] \to E[\mathcal{T}]$ est fermée, donc, d'après le théorème du graphe fermé de De Wilde, continue, c.-à-d. $\mathcal{T}_E^u$ est plus fin que $\mathcal{T}$.

Comme corollaire du théorème de Powell on obtient que si $\mathcal{T}_E$ est de De Wilde, alors $\mathcal{T}_E^{\times}$, $\mathcal{T}_E^t$ et $\beta(E,E')$ sont de De Wilde. En effet, ces topologies sont moins fines que $\mathcal{T}_E^u$.

La démonstration du théorème de Powell se fait en plusieurs étapes:

1) Soit $\mathcal{R} = \{C(n_1,\dots,n_k)\}$ un réseau du type $\mathcal{C}$ sur $E[\mathcal{T}_E]$. Soit $n = (n_k)$ une suite d'entiers ≥ 1 et (ϱ_k) une suite de nombres > 0 qui satisfait par rapport à n à la condition qui définit un réseau du type $\mathcal{C}$. Choisissons $0 < r < 1$ et $x = (x_k)$ tel que $x_k \in C(n_1,\dots,n_k)$. L'application $\psi = \psi_{n,x,r}: \ell^{\infty} \to E$ sera définie par $\psi(a) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k \varrho_k x_k$ pour $a = (a_k) \in \ell^{\infty}$. Si $U = \{a \in \ell^{\infty};\ |a_k| \leq 1\}$ est le oube unité fermé de ℓ^{∞}, posons $B_{n,x,r} = \psi_{n,x,r}(U)$. L'ensemble $B_{n,x,r}$ est convexe, équilibré et l'on a $E = \bigcup_{n,x,r} B_{n,x,r}$.

2) $B_{n,x,r}$ est compact. Soit $u \in E'$. On a $|\langle\psi(a),u\rangle| = |\sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k \varrho_k u(x_k)| = |\langle a, {}^t\psi(u)\rangle| < \infty$ pour tout $a \in \ell^{\infty}$, d'où

${}^t\psi(u) = (r^k \rho_k u(x_k))_{k\geq 1} \in \ell^1$. Il en résulte que $\psi : \ell^\infty \to E$ est continue pour les topologies $\sigma(\ell^\infty, \ell^1)$ et $\sigma(E,E')$. Puisque U est $\sigma(\ell^\infty, \ell^1)$-compact, $B_{n,x,r}$ est $\sigma(E,E')$-compact.

D'autre part $\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k x_k$ converge, donc $\rho_k x_k$ tend vers 0 et l'ensemble $\{\rho_k x_k\}$ est précompact. Or pour $a = (a_k) \in U$ on a $\sum |a_k| r^k \leq \sum r^k = r/(1-r)$, donc $\psi(a) = \sum \frac{1-r}{r} a_k r^k \cdot \frac{r}{1-r} \rho_k x_k$ est contenu dans l'enveloppe convexe, équilibré, $\mathcal{T}_E$-fermé de $\left\{ \frac{r}{1-r} \rho_k x_k \right\}$ qui est précompacte. Il en résulte que $B_{n,x,r}$ est $\mathcal{T}_E$-précompact, donc aussi compact.

3) Soit $\hat{\mathcal{T}}$ la topologie localement convexe la plus fine sur E qui rend continues les injections $E_{B_{n,x,r}} \hookrightarrow E$. Puisque les $B_{n,x,r}$ sont des disques complétants, la topologie $\hat{\mathcal{T}}$ est ultrabornologique. Elle est évidemment plus fine que $\mathcal{T}_E$.

4) $\mathcal{R}$ est un réseau du type $\mathcal{C}$ pour $\hat{\mathcal{T}}$. Soient (n_k) et (ρ_k) comme avant, choisissons $0 < t < 1$ et $s^2 = t$. Soit alors $x_k \in C(n_1, \ldots, n_k)$ et $0 \leq \lambda_k \leq t^k \rho_k$. L'élément $a = (a_k) \in \ell^\infty$ défini par $\lambda_k = a_k t^k \rho_k$ appartient à U. Dans $E[\mathcal{T}_E]$ la série $\sum \lambda_k x_k$ converge vers un élément x puisque $\mathcal{R}$ est du type $\mathcal{C}$ pour $\mathcal{T}_E$. On a $x - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k = \sum_{k>m} a_k s^k \cdot s^k \rho_k x_k = s^{m+1} \sum_{k>m} (a_k s^{k-m-1}) s^k \rho_k x_k$ $\in s^{m+1} B_{n,x,s}$, c.-à-d. $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$ converge vers x dans $E_{B_{n,x,s}}$ donc aussi pour $\hat{\mathcal{T}}$.

5) $\hat{\mathcal{T}} = \mathcal{T}_E^u$. Comme $\hat{\mathcal{T}}$ est de De Wilde et plus fine que $\mathcal{T}_E$, d'après la remarque déjà faite, $\hat{\mathcal{T}}$ est moins fine que $\mathcal{T}_E^u$. D'autre part $\hat{\mathcal{T}}$ est ultrabornologique, donc plus fine que $\mathcal{T}_E^u$.

Bibliographie

1. N. Adasch, Tonnelierte Räume und zwei Sätze von Banach. Math. Ann., 186 (1970), 209-214.

2. M. De Wilde, Réseaux dans les espaces linéaires à semi-normes. Mém. Soc. Roy. Sci. Liège, Coll. in 8° (5) 18, 2 (1969).

3. M. De Wilde, Ultrabornological spaces and the closed graph theorem. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège, 40 (1971), 116-118.

4. V. Eberhardt, Durch Graphensätze definierte lokalkonvexe Räume. Dissertation, München 1972.

5. J. Horváth, Locally convex spaces. Summer school on Topological Vector Spaces, Bruxelles, September 1972, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag.

6. Y. Kōmura, On linear topological spaces. Kumamoto J. Sci., Ser. A, 5 (1962), 148-157.

7. M.H. Powell, On Kōmura's closed graph theorem. Technical Report TR 72-35, Department of Mathematics, University of Maryland, College Park, 1972.

8. M. Valdivia, El teorema general de la gráfica cerrada en los espacios vectoriales topológicos localmente convexos. Rev. Real Acad. Ci. Exact. Fís. Nat. Madrid, 62 (1968), 545-551.

9. M. Valdivia, Sobre el teorema de la gráfica cerrada. Collectanea Math., 22 (1971), 51-72.

10. M. Valdivia, Mackey convergence and the closed graph theorem. Archiv der Math., à paraître.

Université de Paris VI et
Université de Maryland, College Park