PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

JEAN RISS

Fonctions continues et séparément additives

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1973, tome 10, fascicule 4
, p. 1-25

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1973__10_4_1_0>

II$^{\text{ème}}$ - Coll. Anal. Fonct.
(1973, Bordeaux)
p. 279-303

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1973 t. 10-4

FONCTIONS CONTINUES ET SEPAREMENT ADDITIVES

par

Jean RISS (Bordeaux)

---o0o---

INTRODUCTION

On sait que quel que soit l'ensemble Λ on peut munir l'ensemble de ses parties $\mathcal{P}(\Lambda)$ d'une structure d'anneau compact. On se propose d'étudier des propriétés des fonctions définies sur l'anneau compact $\mathcal{P}(\Lambda_1) \times \ldots \times \mathcal{P}(\Lambda_k)$, à valeurs dans un groupe abélien topologique séparé G, qui sont continues et qui sont additives (au sens de la théorie de la mesure) par rapport à chacune des variables. On en déduira un théorème de structure pour l'espace $\mathcal{S}(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k ; G)$ de ces fonctions, muni de la topologie de la convergence uniforme, quand G est limite projective de groupes abéliens topologiques métrisables.

Sous l'hypothèse que G ne contient aucun sous-groupe compact autre que $\{0\}$ les éléments f de $\mathcal{S}(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k ; G)$ sont mis en correspondance biunivoque avec un ensemble de matrices $(a_{\lambda_1 \ldots \lambda_k})$ indexées par $\Lambda_1 \times \ldots \times \Lambda_k$.

On étudie ensuite le dual des espaces $\mathcal{S}(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k ; \mathbb{R})$. Il se trouve qu'ils ont une structure d'algèbre de Banach unitaire commutative et que $\mathcal{S}(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k ; \mathbb{R})$ s'injecte continuement dans ce dual ; on en déduit une relation métrique pour les éléments de $\mathcal{S}(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k ; \mathbb{R})$, ralation qui résulte aussi de la formule de Plancherel.

On termine par une interprétation de $\ell_1 \check{\otimes} \ell_1$, espace qui apparaît comme isomorphe à $\mathcal{S}(\mathbb{N}, \mathbb{N} ; \mathbb{R})$, c'est à dire à un espace de matrices.

1. - Rappelons d'abord que la structure d'anneau topologique de $\mathcal{P}(\Lambda)$ est définie comme suit :

- l'addition est la différence symétrique, la multiplication est l'intersection.
- un système fondamental de voisinages de $\emptyset$ est la famille des idéaux $\mathfrak{J}_F = \{X, X \subset \complement F\}$ où F parcourt $\mathcal{P}_o(\Lambda)$, ensemble des parties finies de Λ.

Si $(\Lambda_i)_{i \in I}$ est une partition de Λ il est immédiat que $\mathcal{P}(\Lambda)$ est isomorphe au produit $\prod_{i \in I} \mathcal{P}(\Lambda_i)$ par l'isomorphisme associant à $X \subset \Lambda$ l'élément $(X \Lambda_i)_{i \in I}$. En particulier si l'on prend comme partition celle dont chaque élément est réduit à un point on trouve que $\mathcal{P}(\Lambda)$ est isomorphe à F_2^{Λ}, où F_2 est le corps discret à deux éléments ; il en résulte que $\mathcal{P}(\Lambda)$ est un anneau compact dans lequel le sous-groupe $\mathcal{P}_o(\Lambda)$ est dense.

Ce même isomorphisme prouve que le dual du groupe abélien compact $\mathcal{P}(\Lambda)$ peut être identifié au groupe $\mathcal{P}_o(\Lambda)$ rendu discret, par la formule de dualité

$$(X, F) \to \chi_F(X) = (-1)^{\operatorname{card}(XF)}$$

(on écrira χ_λ au lieu de $\chi_{\{\lambda\}}$).

2. - Dans ce paragraphe nous allons établir des critères de continuité pour les fonctions séparément additives f.

<u>Proposition 1</u> - Pour que f soit continue il faut et il suffit que quel que soit le voisinage V de 0 dans G il existe pour chaque $i = 1, 2, \dots, k$ une partie finie F_i de Λ_i telle que si l'une au moins des inclusions $X_i \subset \complement F_i$ est vérifiée on ait $f(X_1, X_2, \dots, X_k) \in V$.

En effet si f est continue elle est uniformément continue et f est nulle dès que l'une des variables l'est (à cause de l'additivité séparée). La continuité uniforme signifie que quel que soit V il existe $F_1, \ldots, F_k$ telles que les relations $Y_i + X_i \subset \complement F_i$ impliquent

$$f(Y_1, \ldots, Y_k) - f(X_1, \ldots, X_k) \in V ,$$

prenant alors $Y_i = X_i$ sauf pour un indice j où l'un prend $Y_j = \emptyset$ on trouve que la condition est nécessaire.

Réciproquement cette condition est suffisante ; en effet on a

$$\begin{aligned} f(Y_1, \ldots, Y_k) - f(X_1, \ldots, X_k) = {} & f(Y_1, \ldots, Y_k) - f(X_1, Y_2, \ldots, Y_k \\ & + f(X_1, Y_2, \ldots, Y_k) - f(X_1, X_2, Y_3, \ldots, Y_k) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + f(X_1, X_2, \ldots, Y_k) - f(X_1, X_2, \ldots, X_k) \end{aligned}$$

d'autre part par exemple

$$\begin{aligned} & f(Y_1, Y_2, \ldots, Y_k) - f(X_1, X_2, \ldots, Y_k) \\ = \quad & f(Y_1 + X_1 Y_1, Y_2, \ldots, Y_k) - f(X_1 + X_1 Y_1, Y_2, \ldots, Y_k) \end{aligned}$$

Or les conditions $X_i + Y_i \subset \complement F_i$ impliquent a fortiori

$$Y_i + X_i Y_i \subset \complement F_i \quad \text{et} \quad X_i + X_i Y_i \subset \complement F_i$$

On en déduit que sous les hypothèses de la proposition 1 on aura

$$f(Y_1, \ldots, Y_k) - f(X_1, \ldots, X_k) \in \underbrace{(V-V) + \ldots + (V-V)}_{k \text{ termes}}$$

c'est à dire la continuité (uniforme) de f.

Proposition 2 - Pour que f soit continue il faut et il suffit qu'elle soit continue à l'origine et qu'elle soit séparément continue.

La nécessité est évidente. Si $k = 1$ la proposition 1 montre que la condition est suffisante. Raisonnons alors par récurrence : comme f est continue à l'origine quel que soit V il existe $F_1, \ldots, F_k$ telles que les conditions $A_i \subset \complement F_i$ impliquant $f(A_1, \ldots, A_k) \in V$; posons alors

$$X_i = Y_i + Z_i \quad \text{où} \quad Y_i = X_i F_i \qquad Z_i = X_i \complement F_i$$

on a

$$Y_i Z_i = \emptyset$$

donc

$$f(X_1, \ldots, X_k) = f(Z_1, \ldots, Z_k) + \Sigma\, f(T_1, \ldots, T_k)$$

où la somme porte sur tous les choix $T_i = Y_i$ ou Z_i sauf celui où pour tout i $T_i = Z_i$. Chacun des termes de la somme contient au plus $(k-1)$ variables Z_i et les valeurs prises par les Y_i sont en nombre fini puisque pour chaque i on a $Y_i \subset F_i$; considérées comme fonctions des Z_i les fonctions sous le signe Σ sont donc continues par l'hypothèse de récurrence et comme le choix des Y_i est fini il en résulte à l'aide de la proposition 1 que chaque terme de la somme appartiendra à V si au moins l'une des variables Z_i est assez petite et cela quel que soit le choix des Y_i dans F_i, c'est donc dire qu'il existe $F'_1, \ldots, F'_k$ telles que si l'une au moins des conditions $Z_i \subset \complement F'_i$ est vérifiée on aura

$$f(X_1, \ldots, X_k) \in \underbrace{V + V + \ldots + V}_{2^k \text{ termes}}$$

si donc pour au moins un i on a $X_i \subset \complement (F_i \cup F'_i)$ on aura a fortiori $X_i \subset \complement F_i$ et $Z_i \subset \complement F'_i$ d'où la continuité de f à l'aide de la proposition 1.

<u>Proposition 3</u> - Si f est limite simple d'une suite de fonctions f_n continues et séparément additive alors la limite est uniforme.

Il est d'abord évident que f est séparément additive. Comme les f_n sont définies sur un espace compact donc de Baire quel que soit le voisinage fermé V de 0 dans G il existe un ouvert non vide Ω et un entier p tel que $n \geq p$ et $(X_1, \dots, X_k) \in \Omega$ impliquent.

$$f_n(X_1, \dots, X_k) - f(X_1, \dots, X_k) \in V$$

De plus comme $\prod_{i=1}^{k} \mathcal{P}_o(\Lambda_i)$ est dense dans $\prod_{i=1}^{k} \mathcal{P}(\Lambda_i)$ il existe des parties finies $A_1, \dots, A_k$, $F_1, \dots, F_k$ telles que

$$\prod_{i=1}^{k} (A_i + \mathcal{J}_{F_i}) \subset \Omega$$

et l'on peut évidemment supposer que pour tout $i : F_i \supset A_i$.

Autrement dit si pour tout i on a $Y_i \subset \complement F_i$ on aura

$$f_n(A_1 + Y_1, \dots, A_k + Y_k) - f(A_1 + Y_1, \dots, A_k + Y_k) \in V$$

Supposons alors d'abord $k = 1$, comme $A_1 \; Y_1 = \emptyset$ puisque $Y_1 \subset \complement F_1 \subset \complement A_1$, on aura

$$f_n(A_1) + f_n(Y_1) - f(A_1) - f(Y_1) \in V$$

pour $Y_1 = \emptyset$ on a donc

$$f_n(A_1) - f(A_1) \in V$$

donc

$$f_n(Y_1) - f(Y_1) \in V - V$$

mais comme il n'y a qu'un nombre fini de parties $X_1 \subset A_1$ la convergence simple implique que si n est assez grand, $n \geq p'$, on aura

$$n \geq p' \quad \text{et} \quad X_1 \subset A_1 \Rightarrow f_n(X_1) - f(X_1) \in V$$

D'où si $n \geq \sup(p, p')$ et quel que soit $X_1 \subset \Lambda_1$ on aura

$$f_n(X_1) - f(X_1) \in (V - V) + V$$

ce qui pour $k = 1$ démontre la convergence uniforme des f_n vers f.

Raisonnons alors par récurrence en utilisant les F_i introduits au début de la démonstration et en posant

$$X_i = Y_i + Z_i \qquad Y_i = X_i\, F_i \qquad X_i = X_i \complement F_i$$

ainsi que

$$f_n(X_1, \dots, X_k) = f_n(Y_1, \dots, Y_k) + \Sigma\ f_n(T_1, \dots, T_k),$$

comme on l'a fait dans la démonstration de la proposition 2. Alors chaque $f_n(T_1, \dots, T_k)$ ne dépend que de $(k-1)$ variables Z_i ; il y a donc par hypothèse de récurrence convergence uniforme de cette somme vers

$$\Sigma\ f(T_1, \dots, T_k)$$

et cela pour chaque choix des Y_i dans les F_i, or ces choix sont en nombre fini, donc il existe p' assez grand tel que $n \geq p'$ implique que quels que soient les Y_i dans F_i on aura

$$\begin{matrix} f_n(X_1, \dots, X_k) - f_n(Y_1, \dots, Y_k) \\ - [f(X_1, \dots, X_k) - f(Y_1, \dots, Y_k)] \end{matrix} \quad \in V$$

D'autre part la convergence simple implique qu'il existe p'' tel que quel que soit les Y_i dans les F_i on aura si $n \geq p''$

$$f_n(Y_1, \dots, Y_k) - f(Y_1, \dots, Y_k) \in V$$

d'où si $n \geq \text{Sup}(p', p'')$

$$f_n(X_1, \dots, X_k) - f(X_1, \dots, X_k) \in V + V$$

ce qui démontre la proposition.

Proposition 4 - Quels que soient les ensembles $\Lambda_1 \Lambda_2 \ldots \Lambda_k$, quels que soient les ensembles dénombrables $\Lambda_{k+1}, \ldots, \Lambda_{k+h}$ si la fonction séparément additive $f(X_1, \ldots, X_k ; X_{k+1}, \ldots, X_{k+h})$ est continue par rapport à $(X_1, \ldots, X_k)$ et par rapport à chaque X_{k+i} $i = 1, 2, \ldots, h$ alors elle est continue.

Il est évident qu'il suffit de faire la démonstration pour $h = 1$. Considérons la suite de fonctions

$$f_n(X_1, \ldots, X_{k+1}) = f(X_1, \ldots, X_k, X_{k+1} \quad F_n)$$

où F_n est une suite croissante de parties finies de Λ_{k+1} et de réunion Λ_{k+1}. Comme F_n est finie la continuité de f_n est immédiate. D'autre part la continuité séparée de f par rapport à X_{k+1} donne

$$f(X_1, \ldots, X_{k+1}) = \lim_{n \to \infty} f_n(X_1, \ldots, X_{k+1})$$

et d'après la proposition 3 cette limite est uniforme donc f est continue.

Corollaire - Quand tous les Λ_i sauf un au plus sont dénombrables la continuité séparée de f entraîne la continuité.

3. - La proposition 4 va permettre d'établir, quand G est limite projective de groupes abéliens topologiques métrisables, un isomorphisme entre $\mathcal{S}(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k ; G)$ et $\mathcal{S}(\Lambda_1 ; \mathcal{S}(\Lambda_2, \ldots, \Lambda_k ; G))$. En fait on va le faire quand G est métrisable le cas général s'en déduisant par un procédé standard. On utilisera pour cela les lemmes suivants :

Lemme 1 - Si G est métrisable il en est de même de $\mathcal{S}(\Lambda_2, \ldots, \Lambda_k ; G)$.

En effet si V_n est une suite fondamentale de voisinages de 0 dans G, alors les $\tilde{V}_n = \{ f, f(\prod_2^k \mathcal{P}(\Lambda_1)) \subset V_n \}$ est une suite fondamentale de voisinages de 0 dans $\mathcal{S}(\Lambda_2, \ldots, \Lambda_k ; G)$ puisque la topologie de ce groupe est celle de la convergence uniforme.

<u>Lemme 2</u> - Si G est métrisable il existe une partie dénombrable Λ'_1 de Λ_1 telle que $X_1 \subset \complement \Lambda'_1$ implique $f(X_1) = 0$.

En effet pour chaque V_n élément d'une suite fondamentale de voisinages de 0 dans G, il existe une partie F_n telle que $X_1 \subset \complement F_n$ implique $f(X_1) \in V_n$; il suffit alors de prendre $\Lambda'_1 = \bigcup_{n \geq 1} F_n$.

<u>Théorème 1</u> - à chaque $f \in \mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_k ; G)$ associons la fonction $\tilde{f}$ définie sur $\mathcal{P}(\Lambda_1)$ à valeurs dans $\mathcal{S}(\Lambda_1 ; \mathcal{S}(\Lambda_2, \ldots, \Lambda_k ; G))$ qui au point X_1 est la fonction partielle f_{X_1} . Alors si G est métrisable $f \to \tilde{f}$ est un isomorphisme topologique de $\mathcal{S}(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k ; G)$ et $\mathcal{S}(\Lambda_1 ; \mathcal{S}(\Lambda_2, \ldots, \Lambda_k ; G))$.

Remarquons d'abord que l'on a bien $f_{X_1} \in \mathcal{S}(\Lambda_1 ; \mathcal{S}(\Lambda_2, \ldots, \Lambda_k ; G))$ car f est continue, donc pour chaque X_1 f_{X_1} l'est. De plus $f \to \tilde{f}$ est une représentation de groupes manifestement continue en vertu de la proposition 1 et injective. Montrons que cette fonction est surjective : soit $\Phi \in \mathcal{S}(\Lambda_1 ; \mathcal{S}(\Lambda_2, \ldots, \Lambda_k ; G))$, comme ϕ prend ses valeurs dans un groupe métrisable il existe une partie dénombrable Λ'_1 de Λ_1 telle que $X_1 \subset \complement \Lambda'_1$ implique $\phi(X_1) = o$; considérons alors la fonction définie sur $\mathcal{P}(\Lambda'_1) \times \mathcal{P}(\Lambda_2) \times \ldots \times \mathcal{P}(\Lambda_k)$ à valeurs dans G par

$$(X'_1 , X_2, \ldots, X_k) = \phi (X'_1) (X_2, \ldots, X_k)$$

elle est manifestement séparément additive, continue en $(X_2, \ldots, X_k)$ et continue en X_1 ; comme Λ'_1 et dénombrable elle est continue d'après la proposition 4 et il en est alors de même de la fonction f définie sur $\mathcal{P}(\Lambda_1) \times \ldots \times \mathcal{P}(\Lambda_k)$ par

$$(X_1, \ldots, X_k) = \phi(X_1) (X_2, \ldots, X_k)$$

car un peut considérer cette fonction comme composée de la précédente et de $X_1 \to X_1 \cdot \Lambda'_1$ car $\varphi(X_1) = \varphi(X_1, \Lambda'_1)$ puisque $\varphi(X_1 \complement \Lambda'_1) = o$. Comme manifestement $\tilde{f} = \phi$, $f \to \tilde{f}$ est bien une surjection. La bicontinuité de $f \to \tilde{f}$ est évidente.

4. - Toute $f \in \mathcal{S}(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k ; G)$ est définie par ses valeurs sur l'ensemble dense $\prod_{i=1}^{k} \mathcal{P}_o(\Lambda_i)$ et de plus à cause de l'additivité séparée de f ses valeurs sur cet ensemble dense sont déterminées par ses valeurs sur les $\{\lambda_1\} \times \ldots \times \{\lambda_k\}$. Si à chaque f on fait donc correspondre les éléments

$$a_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k} = f(\{\lambda_1\}, \ldots, \{\lambda_k\})$$
$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \Lambda_1 \times \ldots \times \Lambda_k$$

on obtient ainsi une matrice M_f à éléments dans G et indexée par $\Lambda_1 \times \ldots \times \Lambda_k$. L'application $f \to M_f$ est donc injective. Il reste à caractériser les matrices M_f que l'on obtient ainsi ; elles vérifient une condition évidente à savoir : pour chaque telle f il existe une partie compacte K de G telle que toutes les sommes

$$\sum_{\begin{cases}\lambda_1 \in F_1 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \lambda_k \in F_k\end{cases}} a_{\lambda_1 \ldots \lambda_k}$$

appartiennent à K quelles que soient les parties finies F_i dans les Λ_i. Il suffit évidemment de prendre

$$K = f\left(\prod_{i=1}^{k} \mathcal{P}(\Lambda_i)\right)$$

Réciproquement on a :

Théorème 2 - Si le groupe abélien topologique séparé G ne contient aucun sous-groupe compact autre que $\{0\}$ alors toute matrice $(a_{\lambda_1 \dots \lambda_k})_{(\lambda_1 \dots \lambda_k) \in \Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_k}$ pour laquelle il existe une partie compacte K de G contenant toutes les sommes finies

$$\sum_{\begin{cases} \lambda_1 \in F_1 \\ \dots\dots \\ \lambda_k \in F_k \end{cases}} a_{\lambda_1 \dots \lambda_k} \qquad (F_1, \dots, F_k) \in \prod_{i=1}^{k} \mathcal{P}_o(\Lambda_i)$$

est la matrice M_f d'une $f \in \mathcal{S}(\Lambda_1, \dots, \Lambda_k ; G)$

En effet tout revient à voir que sur le sous-ensemble dense $\prod_{i=1}^{k} \mathcal{P}_o(\Lambda_i)$ de $\prod_{i=1}^{k} \mathcal{P}(\Lambda_i)$ la fonction f_o définie par

$$(F_1, \dots, F_k) \to \sum_{\begin{cases} \lambda_1 \in F_1 \\ \dots\dots \\ \lambda_k \in F_k \end{cases}} a_{\lambda_1 \dots \lambda_k}$$

est uniformément continue, car prenant ses valeurs dans l'espace compact K on pourra la prolonger par continuité, ce prolongement étant de plus manifestement séparément additif. On va donc établir la continuité uniforme et cela par récurrence sur k .

Premier cas : k = 1

Posons

$$I = \bigcap_{F \in \mathcal{P}_o(\Lambda)} \overline{\bigcup_{R \subset \complement F} f_o(R)}$$

$$K = \overline{\bigcup_{F} f_o(F)}$$

L'hypothèse est que K est compact ; montrons d'abord sans hypothèse sur G que $I + K \subset K$.

Soit $a \in I$; quel que soit le voisinage V de 0 dans G on a donc pour tout $F \in \mathcal{P}_o(\Lambda)$

$$a \in V + \bigcup_{R \subset F} f_o\ (R)$$

donc quel que soit F il existe $R \subset \complement F$ tel que

$$a \in V + f_o\ (R)$$

donc $\quad a + f_o\ (F) \in V + f_o\ (R) + f_o\ (F) \subset V + K$

donc

$$a + f_o\ (F) \in V + K$$
$$a + f_o\ (F) \in \overline{K} = K$$
$$a + K \subset K$$
$$I + K \subset K$$

donc aussi

$$I + I + \dots + I + K \subset K$$

Le sous-groupe engendré par I est donc contenu dans $K - K$;
sous l'hypothèse faite sur G on a donc $I = \{0\}$
ce qui signifie puisque K est un espace compact que la base de filtre $\left(\bigcup_{R \subset \complement F} f_o\ (R) \right)$ où F parcourt $\mathcal{P}_o(\Lambda)$ converge vers 0 donc que f_o est continue en ϕ, ce qui avec l'additivité de f_o prouve sa continuité uniforme.

<u>Cas général</u>. On raisonne par récurrence sur k :

a) Montrons d'abord que quel que soit $(F_1, F_2, \dots, F_k) \in \pi\ \mathcal{P}_o\ (\Lambda_i)$ et quel que soit le voisinage V de 0 dans G
il existe $(R_1, R_2, \dots, R_k) \in \pi\ \mathcal{P}_o(\Lambda_i)$ tel que si

$$X_i \subset \complement R_i \qquad i = 1, 2, \dots, k$$

on a

$$f_o(F_1 + X_1, \dots, F_k + X_k) \in f_o(F_1, \dots, F_k) + f_o(X_1, \dots, X_k) + V$$

Considérons pour cela dans $\prod_i \mathcal{P}_o(F'_i)$ où $F'_i = \complement F_i$ la fonction

$$(X_1, X_2, \dots, X_k) \to f_o(F_1 + X_1, \dots, F_k + X_k)$$

$$= f_o(F_1, \dots, F_k) + f_o(X_1, \dots, X_k) + \Sigma\, f_o(Y_1, \dots, Y_k)$$

où la somme porte sur tous les choix $Y_i = F_i$ ou X_i à l'exclusion des deux choix "quel que soit i $Y_i = F_i$" et "quel que soit i $Y_i = X_i$".

Chacun des termes de cette somme dépend donc au moins d'une des variables X_i et au plus de $(k-1)$ d'entre elles. Par l'hypothèse de récurrence cette somme est continue et sera donc aussi petite que l'on veut si chaque X_i est assez petit dans F'_i et (comme F_i est finie $(i = 1, \dots, k)$) si X_i est assez petit dans Λ_i, d'où le résultat.

b) Posons encore

$$I = \bigcap_{F_1, \dots, F_k} \overline{\bigcup_{\substack{Z_i \subset \complement F_1 \\ \dots\dots \\ Z_k \subset \complement F_k}} f_o(Z_1, \dots, Z_k)}$$

$$K = \overline{\bigcup_{\substack{F_1 \subset \Lambda_1 \\ \dots\dots \\ F_k \subset \Lambda_k}} f_o(F_1, F_2, \dots, F_k)}$$

et montrons que l'on a $I + K \subset K$

Pour cela soit V un voisinage de 0 dans G ; si $b \in K$ il existe donc une relation

$$b \in f_o(F_1, F_2, \dots, F_k) + V$$

A partir de ces F_i déterminons des R_i comme en a) ; si alors $a \in I$ on peut écrire

$$a \in f_o(Z_1, Z_2, \dots, Z_k) + V$$

$$\text{avec} \quad Z_i \subset \complement R_i$$

on aura alors

$$a + b \in f_o(F_1, \dots, F_k) + f_o(Z_1, \dots, Z_k) + V + V$$

donc à cause de a) on aura

$$a + b \in f_o(F_1 + Z_1, \dots, F_k + Z_k) - V + V + V$$

donc

$$a + b \in K - V + V + V$$

et ceci ayant lieu quel que soit V on a bien

$$I + K \subset K$$

d'où (comme dans le cas $k = 1$) $I = \{0\}$, ce qui veut dire que f_o est continue à l'origine.

c) On sait donc maintenant que f_o est continue à l'origine et qu'en vertu de l'hypothèse de récurrence elle est uniformément continue par rapport à chaque groupe de $(k-1)$ variables, d'où l'on va déduire qu'elle est uniformément continue. f_o étant continue à l'origine quel que soit V il existe $F_1, F_2, \dots, F_k$ telle que

$$"X_i \subset \complement F_i \quad i = 1, 2, \dots, k" \Rightarrow f_o(X_1, \dots, X_k) \in V$$

Par ailleurs si $A_1 \subset F_1$ les fonctions partielles en nombre fini

$$(X_2, \dots, X_k) \to f_o(A_1, X_2, \dots, X_k)$$

sont par hypothèse de récurrence uniformément continues, donc en particulier toutes leurs valeurs appartiendront à V si $X_2\, X_3 \dots X_k$ sont assez petits ; mais par ce qui précède ceci est aussi vrai si $X_1 \subset \complement F_1$. Par additivité on en déduit que quel que soit X_1 on aura

$$f_o(X_1, X_2, \dots, X_k) \in V + V$$

pourvu que $X_2, X_3, \dots, X_k$ soient assez petits. En raisonnant maintenant sur $X_2, \dots$ puis sur $X_{k-1} \dots$ on en déduit que f_o est petite dès que l'une des variables est petites et la démonstration s'achève comme pour la proposition 1.

5. - Dire que $f \in \mathcal{S}(\Lambda\ ;\ G)$ implique que la famille de vecteurs $a_\lambda = f(\{\lambda\})\ \lambda \in \Lambda$ est sommable ainsi que chacune de ses sous-familles ; réciproquement si une famille de vecteurs $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est sommable ainsi que chacune de ses sous-familles alors sur $\mathcal{P}(\Lambda)$ la fonction $A \to f(A) = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda$ est additive continue.

En effet :

la continuité de f en ϕ signifie que $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ vérifie le critère de Cauchy au sens des familles sommables ; toutes ses sous-familles le vérifient donc aussi. Si donc $\widetilde{G}$ désigne le complété de G, on définit sur $\mathcal{P}(\Lambda)$ une fonction additive à valeurs dans $\widetilde{G}$ par

$$f'(A) = \sum_{\lambda \in A} a_\lambda$$

Cette fonction f' est continue en ϕ, donc continue. Elle coïncide avec f dans $\mathcal{P}_o(\Lambda)$. Donc $f = f'$, ce qui revient à dire que chaque famille partielle

$(a_\lambda)_{\lambda \in A}$ est non seulement sommable dans $\widetilde{G}$, mais aussi dans G; compte tenu de ce que l'on vient de dire la réciproque est évidente.

Dans ce cas particulier on peut donc traduire le théorème 1 sous la forme : pour qu'une famille d'éléments $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ d'un groupe abélien topologique séparé sans sous-groupe compact autre que $\{0\}$ soit inconditionnellement sommable (c'est-à-dire sommable ainsi que chacune de ses sous-familles) il faut et il suffit que toutes ses sommes partielles finies soient contenues dans un compact.

Revenons alors au cas général et soit $f \in \mathcal{S}(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k ; G)$, on aura donc quels que soient $X_i \subset \Lambda_i$ $i = 1, 2, \ldots, k$

$$f(X_1, \ldots, X_k) = \sum_{\lambda_1 \in X_1} \Big(\sum_{\lambda_2 \in X_2} \big(\ldots \big(\sum_{\lambda_k \in X_k} a_{\lambda_1 \ldots \lambda_k} \big) \ldots \big)\Big)$$

où chacune des sommes est à entendre au sens des familles sommables, où l'ordre des sommations peut être permuté comme l'on veut, mais où en général les sommes doubles (et a fortiori multiples)

$$\sum_{(\lambda_i, \lambda_j) \in X_i \times X_j}$$

n'existent pas en tant que famille sommables. Pour établir cette dernière affirmation considérons l'espace de Banach de dimension infinie $\mathcal{S}(\mathbb{N}; \mathbb{R})$; d'après un résultat de Dvoretzky-Roges il existe une famille $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{N} ; \mathbb{R})$ sommable mais dont les normes $\|u_n\|$ ne sont pas sommables. Evidemment u peut être considéré comme un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{N}, \mathbb{N} ; \mathbb{R})$, celui qui est associé à la matrice $(u_n(m))_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ et on a

$$\sum_{(n,m)} |u_n(m)| = \sum_n \sum_m |u_n(m)| = \sum_m \|u_n\| = +\infty$$

d'où le résultat énoncé. On peut encore traduire ce résultat en disant que $\mathcal{S}(\mathbb{N} \times \mathbb{N} ; \mathbb{R})$ s'injecte continûment dans $\mathcal{S}(\mathbb{N}, \mathbb{N} ; \mathbb{R})$ mais non surjectivement.

On peut évidemment donner d'autres conséquences de la description que l'on a faite de $\mathcal{S}(\Lambda ; G)$. Considérons par exemple un espace de Banach réflexif E et dans E une famille de vecteurs $(a_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ telle qu'il existe une partie bornée B de E contenant toutes les sommes $\sum_{p \in F, q \in G} a_{p,q}$, où $(F, G) \in \mathcal{P}_o(N) \times \mathcal{P}_o(N)$; dans ces conditions l'ensemble de ces sommes est relativement compact. En effet si l'on munit E de la topologie faible, ces sommes sont alors contenues dans un compact, il existe donc une fonction séparément additive, faiblement continue f dont la matrice est $(a_{p,q})_{N \times N}$. D'après un théorème d'Orlicz cette fonction est séparément fortement continue, donc continue puisque les ensembles d'indices sont dénombrables. En fait on peut même s'affranchir du fait que dans cet exemple les indices sont dénomblables en démontrant un théorème d'Orlicz pour les fonctions séparément additives : ce théorème résulte du théorème d'Orlicz (cas d'une variable) et de la continuité à l'origine de la restriction f_o de f à $\prod_{i=1}^{k} \mathcal{P}_o(\Lambda_i)$, continuité qui résulte elle même de celle des restrictions f_1 de f_o aux $\prod_{i=k}^{k} \mathcal{P}_o(\mathbb{N}_i)$ où les $\mathbb{N}_i$ sont des parties dénombrables des Λ_i.

6\. - On se propose maintenant d'étudier le dual de $\mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2 ; \mathbb{R})$. L'étude dans le cas de plus de deux ensemblesd'indices est strictement semblable.

On remarquera d'abord que si $\Lambda'_1 \subset \Lambda_1$ et $\Lambda'_2 \subset \Lambda_2$ on peut identifier $\mathcal{S}(\Lambda'_1, \Lambda'_2 ; \mathbb{R})$ à un sous-espace de $\mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2 ; \mathbb{R})$ en associant à $f' \in \mathcal{S}(\Lambda'_1, \Lambda'_2 ; \mathbb{R})$ l'élément f de $\mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2 ; \mathbb{R})$ défini par

$$f(X_1, X_2) = f'(X_1 \Lambda'_1 , X_2 \Lambda'_2)$$

et que cette identification est une isométrie (normes de la convergence uniforme). Quand Λ'_1 et Λ'_2 décrivent les familles de parties dénombrables de Λ_1 et Λ_2 la réunion des $\mathcal{S}(\Lambda'_1, \Lambda'_2 ; \mathbb{R})$ est alors $\mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2 ; \mathbb{R})$ car $\mathbb{R}$ étant métrisable chacun de ses éléments appartient à un tel sous-espace ; plus précisément même toute partie dénombrable de $\mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2 ; \mathbb{R})$ est contenue dans un sous-espace $\mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2 ; \mathbb{R})$. Il en résulte que pour qu'une fonction linéaire définie sur cet espace à valeurs dans un espace vectoriel topologique soit continue il faut et il suffit que ses restrictions aux sous-espaces $\mathcal{S}(\Lambda'_1, \Lambda'_2 ; \mathbb{R})$ le soient quand Λ'_1 et Λ'_2 sont dénombrable.

Considérons alors une matrice $(\beta_{\lambda_1, \lambda_2})$ telle que pour toute matrice $a = (a_{\lambda_1, \lambda_2}) \in \mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2 ; \mathbb{R})$ la matrice $\beta . a = (\beta_{\lambda_1, \lambda_2} \; a_{\lambda_1, \lambda_2})$ soit encore un élément de $\mathcal{S}(\Lambda_1 , \Lambda_2 ; \mathbb{R})$. On va voir que dans ces conditions l'application $a \to \beta . a$ et continue. Pour toute matrice $c = (c_{\lambda_1, \lambda_2})$ posons

$$c^{FG} = (c^{FG}_{\lambda_1, \lambda_2}) \quad \text{où} \quad c^{FG}_{\lambda_1, \lambda_2} = \begin{cases} c_{\lambda_1, \lambda_2} & \text{si } (\lambda_1, \lambda_2) \in F \times G \\ o & \quad '' \quad \notin \quad '' \end{cases}$$

Dans $\mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2 ; \mathbb{R})$ on a

$$a = \lim_{\substack{F \to \Lambda_1 \\ G \to \Lambda_2}} a^{FG} \qquad (F, G) \in \mathcal{P}_o(\Lambda_1) \times \mathcal{P}_o(\Lambda_2)$$

Mais chacune des formes linéaires $a \to a_{\lambda_1, \lambda_2}$ est continue donc

$a \to \beta^{FG} a$ est continue, donc

$$\beta . a = \lim_{\substack{F \to \Lambda_1 \\ G \to \Lambda_1}} (\beta \; a)^{FG} = \lim_{\substack{F \to \Lambda_1 \\ G \to \Lambda_2}} (\beta^{FG} . a)$$

donc le théorème de Banach.-Steinhaus donne la continuité de $a \to \beta . a$ dans chaque sous-espace $\mathcal{S}(\Lambda'_1, \Lambda'_2 ; \mathbb{R})$ avec Λ'_1 et Λ'_2 dénombrables, d'où le résultat.

Désignons alors par $\beta(\Lambda_1, \Lambda_2 ; \mathbb{R})$ la famille des matrices $(\beta_{\lambda_1, \lambda_2})$ telles que $a \in \mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2 ; \mathbb{R})$ implique $\beta a \in \mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2 ; \mathbb{R})$. On voit de suite que $\beta(\Lambda_1, \Lambda_2 ; \mathbb{R})$ est une algèbre de Banach commutative unitaire, quand on la munit de la norme des opérateurs. D'ailleurs en tant qu'espace normé cette algèbre est isométrique au dual de $\mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2 ; \mathbb{R})$, car on a

$$L(a) = \lim_{\substack{F \to \Lambda_1 \\ G \to \Lambda_2}} L(a^{FG}) \qquad (F, G) \in \mathcal{P}_o(\Lambda_1) \times \mathcal{P}_o(\Lambda_2)$$

et si l'on pose

$$\beta_{\lambda_1, \lambda_2} = L(E_{\lambda_1, \lambda_2})$$

(où E_{λ_1, λ_2} est la matrice dont tous les termes sont nuls sauf celui d'indice (λ_1, λ_2) qui vaut 1) on a donc

$$L(a) = \lim_{\substack{F \to \Lambda_1 \\ G \to \Lambda_2}} \sum_{\substack{\lambda_1 \in F \\ \lambda_2 \in G}} \beta_{\lambda_1, \lambda_2} \, a_{\lambda_1, \lambda_2}$$

et l'existence de cette limite prouve que $\beta = (\beta_{\lambda_1, \lambda_2}) \in \beta(\Lambda_1, \Lambda_2 ; \mathbb{R})$

On vient donc de construire une injection de $\mathcal{S}'(\Lambda_1, \Lambda_2 ; \mathbb{R})$ dans $\beta(\Lambda_1, \Lambda_2 ; \mathbb{R})$. Maintenant si $\beta \in \beta(\Lambda_1, \Lambda_2 ; \mathbb{R})$ alors

$$a \to \sum_{\lambda_1 \in \Lambda_1} \Big(\sum_{\lambda_2 \in \Lambda_2} \beta_{\lambda_1, \lambda_2} \, a_{\lambda_1, \lambda_2} \Big)$$

est une forme linéaire continue (= la valeur au point (Λ_1, Λ_2) de la fonction

$\beta . a)$; cette injection est donc une surjection. En fait c'est une isométrie : car on a

$$|L(a)| \leq \sup_{F,G} \left| \sum_{\substack{\lambda_1 \in F \\ \lambda_2 \in G}} \beta_{\lambda_1,\lambda_2} \; a_{\lambda_1,\lambda_2} \right|$$

$$\leq \sup_{F,G} \|\beta . a\| \leq \|\beta\| \; \|a\|$$

donc

$$\|L\| \leq \|\beta\|$$

et de même

$$\|\beta\| = \sup_{\|a\| \leq 1} \|\beta . a\|$$

$$= \sup_{\|a\| \leq 1} \; \sup_{F,G} \left| \sum_{\substack{\lambda_1 \in F \\ \lambda_2 \in G}} \beta_{\lambda_1,\lambda_2} \; a_{\lambda_1,\lambda_2} \right|$$

$$= \sup_{\|a\| \leq 1} \; \sup_{F,G} \left| L(\beta \; a^{FG}) \right|$$

$$\leq \|L\| \sup_{\substack{\|a\| \leq 1 \\ F,G}} \|a^{FG}\|$$

or $\qquad \|a^{FG}\| \leq \|a\|$

donc $\qquad \|\beta\| \leq \|L\|$

7. - Comme exemple de matrices $\beta \in \beta(\Lambda_1, \Lambda_2 \,;\, \mathbb{R})$ il y a les matrices de "changement de signe" par lignes et colonnes :

$$\beta_{\lambda_1,\lambda_2} = \chi_{\lambda_1}(A)\ \chi_{\lambda_2}(B) \qquad \begin{matrix} A \in \mathcal{P}(\Lambda_1) \\ B \in \mathcal{P}(\Lambda_2) \end{matrix}$$

(ce qui est évident) donc aussi les matrices du type

$$\beta_{\lambda_1,\lambda_2} = \int \chi_{\lambda_1}(A)\ \chi_{\lambda_2}(B)\ d\mu(A,B)$$

où μ est une mesure de Radon sur $\mathcal{P}(\Lambda_1) \times \mathcal{P}(\Lambda_2)$ car alors

$$\sum_{FG} \beta_{\lambda_1,\lambda_2}\ a_{\lambda_1,\lambda_2} = \int \Big[\sum_{F,G} \chi_{\lambda_1}(A)\,\chi_{\lambda_2}(B)\ a_{\lambda_1,\lambda_2} \Big]\ d\mu(A,B)$$

donc $$\Big| \sum_{F,G} \beta_{\lambda_1,\lambda_2}\ a_{\lambda_1,\lambda_2} \Big| \leq 4.\ \|\mu\|.\ \|a\|$$

car la norme d'une matrice de changements de signe est ≤ 4 , ce qui est évident.

Le théorème de Hahn-Banach permettrait d'améliorer le résultat précédent ; il permet en effet de voir que l'algèbre $\beta(\Lambda_1, \Lambda_2 ; \mathbb{R})$ est isomorphe à l'algèbre quotient de l'algèbre de convolution des mesures de Radon sur $\mathcal{P}(\Lambda_1) \times \mathcal{P}(\Lambda_2)$ modulo l'idéal des mesures μ telles que $f * \mu = 0$ pour toute $f \in \mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2 ; \mathbb{R})$.

Un calcul élémentaire de transformation de Fourier montre que si $a \in \mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2 ; \mathbb{R})$ on a

$$a_{\lambda_1,\lambda_2} = 4 \int \chi_{\lambda_1}(X)\ \chi_{\lambda_2}(Y)\ a(X,Y)\ dX\ dY$$

donc $a \in \mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2 ; \mathbb{R})$ implique $a \in \beta(\lambda_1, \lambda_2 ; \mathbb{R})$ et de plus cette injection de $\mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2 ; \mathbb{R})$ dans $\beta(\lambda_1, \lambda_2 ; \mathbb{R})$ est de norme ≤ 16 . En particulier on a donc :

$$a \in \mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2 ; \mathbb{R}) \Rightarrow \sum_{\lambda_1,\lambda_2} a^2_{\lambda_1,\lambda_2} < \infty$$

En fait la formule de Plancherel donne :

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2} a^2_{\lambda_1,\lambda_2} + \sum_{\lambda_1}\Big(\sum_{\lambda_2} a_{\lambda_1,\lambda_2}\Big)^2 + \sum_{\lambda_2}\Big(\sum_{\lambda_1} a_{\lambda_1,\lambda_2}\Big)^2$$

$$+ \Big(\sum_{\lambda_1}\Big(\sum_{\lambda_2} a_{\lambda_1,\lambda_2}\Big)\Big)^2$$

$$= 16 \int a^2(X, Y) \; dX \, dY$$

8\. - Considérons maintenant un espace $\mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2 \,;\, E)$ où E est un espace vectoriel topologie localement convexe séparé dans lequel tout compact est contenu dans un convexe compact. On va voir que $\beta(\Lambda_1, \Lambda_2 \,;\, \mathbb{R})$ peut être considéré comme opérant dans $\mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2 \,;\, E)$.

En effet si $a \in \mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2 \,;\, E)$ il existe par hypothèse un convexe compact K tel que toutes les sommes

$$\sum_{\substack{\lambda_1 \in F \\ \lambda_2 \in G}} a_{\lambda_1,\lambda_2} \qquad\qquad (F, G) \in \mathcal{P}_o(\Lambda_1) \times \mathcal{P}_o(\Lambda_2)$$

appartiennent à K. Si donc $\beta \in \beta(\Lambda_1, \Lambda_2 \,;\, \mathbb{R})$, c'est-à-dire si

$$\beta = (\beta_{\lambda_1,\lambda_2}) \qquad \beta_{\lambda_1,\lambda_2} = \int \chi_{\lambda_1}(X) \; \chi_{\lambda_2}(Y) \, d\mu(X, Y)$$

on aura

$$\sum_{F\times G} \beta_{\lambda_1,\lambda_2} \; a_{\lambda_1,\lambda_2} = \int \sum_{F\times G} \chi_{\lambda_1}(X) \; \chi_{\lambda_2}(Y) \; a_{\lambda_1,\lambda_2} \, d\mu(X, Y)$$

$$\in 2\|\mu\| \;\; (K - K)$$

donc $\beta . a \in \mathcal{S}(\Lambda_1, \Lambda_2 ; E)$ et $a \to \beta . a$ est continue.

Par exemple si $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda$ et si

$$\beta_{\lambda_1, \lambda_2} = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda_1 = \lambda_2 \\ 0 & \text{si } \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{cases}$$

on a

$$\beta_{\lambda_1, \lambda_2} = \int \chi_{\lambda_1}(X) \; \chi_{\lambda_2}(X) \; d X$$

si donc $(a_{\lambda_1, \lambda_2}) \in \mathcal{S}(\Lambda, \Lambda ; \mathbb{R})$ on aura aussi $(a_{\lambda \lambda}) \in \mathcal{S}(\Lambda ; \mathbb{R})$.

Par exemple si $\mathcal{C}$ est une algèbre de Banach et si (a_n) et (b_n) sont deux familles sommables, il en sera de même de $(a_n \, b_n)$.

De même si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux familles sommables dans des espaces vectoriels topologiques E et F , si ϕ est une application bilinéaire séparément continue de $E \times F$ dans un espace vectoriel topologique localement convexe séparé G alors $(\phi\,(x_n, \, y_n)) \in \mathcal{S}(\mathbb{N}, \, \mathbb{N} ; G)$ et si de plus dans G tout compact est contenu dans un convexe compact on aura $(\phi\,(x_n \, , y_n)) \in \mathcal{S}(\mathbb{N} ; G)$

9. - Si on reprend pour toute $\beta \in \beta \; (\Lambda_1, \Lambda_2 ; \mathbb{R})$ une représentation du type

$$\beta = (\beta_{\lambda_1, \lambda_2}) \qquad \beta_{\lambda_1, \lambda_2} = \int \chi_{\lambda_1}(X) \; \chi_{\lambda_2}(Y) \; d\mu \; (X, Y)$$

et si l'on introduit la densité θ de μ par rapport à sa variation totale ; on voit que

$$\beta_{\lambda_1, \lambda_2} = < x_{\lambda_1} \, , \, y_{\lambda_2} >$$

où $x_{\lambda_1} = \chi_{\lambda_1}$ et $y_{\lambda_2} = \theta . \chi_{\lambda_2}$ sont deux familles bornées de vecteurs dans l'espace de Hilbert $L_2(\nu)$. Un résultat important, bien qu'élémentaire car il résulte d'un calcul assez simple, prouve qu'inversement si $(x_{\lambda_1})_{\lambda_1 \in \Lambda_1}$ et $(y_{\lambda_2})_{\lambda_2 \in \Lambda_2}$ sont deux familles bornées de vecteurs dans un espace de Hilbert alors

$$(< x_{\lambda_1}, y_{\lambda_2} >) \in \beta(\Lambda_1, \Lambda_2 ; \mathbb{R})$$

On trouvera ce calcul soit dans l'article "Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques" de Grothendieck soit dans l'article "Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$- spaces and their applications" de Lindenstrauss et Pelczynoki (Studia Mathematica, T. XXIX 1968). La liaison entre les considérations de notre article et celle des produits tensoriels topologiques est d'ailleurs évidente car si E est par exemple un espace vectoriel topologique localement convexe séparé complet on a

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathbb{N}, \mathbb{N} ; E) &= \mathcal{S}(\mathbb{N} ; \mathcal{S}(\mathbb{N}, E)) \\ &= \ell_1 \check{\otimes} \mathcal{S}(N, E) \\ &= \ell_1 \check{\otimes} \ell_1 \check{\otimes} E \end{aligned}$$

où l'égalité représente un isomorphisme topologique qui lorsque E est un espace de Banach devient une isométrie sous réserve de renormer $\mathcal{S}(N, \mathbb{N} ; E)$ par une norme équivalente ; au lieu de prendre pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{N}, \mathbb{N} ; E)$ la norme

$$\|f\| = \sup_{\substack{X \subset N \\ Y \subset N}} \|f(X, Y)\|$$

il faut prendre

$$|||f||| = \sup_{\beta} \|\beta . f(N, N)\|$$

où β parcourt l'ensemble des matrices de changement de signes.

10. - On peut donner de l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{N}, \mathbb{N} ; \mathbb{R})$ une interprétation différente et intéressante. On a déjà utilisé le fait que si E est un espace de Banach réflexif alors pour qu'une famille de vecteurs de E soit sommable il faut et il suffit que l'ensemble de ses sommes partielles finies soit borné ; cette propriété résulte du théorème d'Orlicz, mais elle appartient aussi à des espaces de Banach non réflexifs, par exemple les espaces $L_1(\mu)$; démontrons d'abord ce point. On sait que si $f_1, f_2, \ldots, f_p$ sont p éléments de $L_1(\mu)$ on a

$$\sum_{i=1}^{p} \|f_i\|^2 \leq k \quad \operatorname{Sup}_F \|\sum_{i \in F} f_i\|^2$$

où F parcourt la famille des parties de $\{1, 2, \ldots, p\}$ et où k est une constante universelle (c'est une conséquence de l'inégalité de Kintchine) ; si alors $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est une famille quelconque d'éléments de $L_1(\mu)$ dont toutes les sommes partielles sont en normes majorées par C on aura

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \|f_\lambda\|^2 \leq k.\ C^2$$

mais alors cette famille vérifie le critère de Cauchy pour les familles sommables, car si ce n'était pas vrai il existerait $\alpha > 0$ et une suite de parties finies deux à deux disjointes F_n de Λ telles que

$$\|\sum_{\lambda \in F_n} f_\lambda\| \geq \alpha$$

posant alors

$$g_n = \sum_{\lambda \in F_n} f_\lambda$$

on aurait pour tout système fini $G \subset \mathbb{N}$

$$\|\sum_{n \in G} g_n\| = \|\sum_{n \in G} \sum_{\lambda \in F_n} f_\lambda\| \leq C$$

donc

$$\sum_n \| g_n \|^2 \leq k \,.\, C^2$$

contre l'hypothèse que pour tout n on a $\|g_n\| \geq \alpha > o$

Considérons alors une application linéraire continue T de C_o dans $L_1(\mu)$, c'est-à-dire un élément de $\mathcal{L}(C_o, L_1(\mu)$ et désignons par $(e_n)_{n\in N}$ la base canonique de C_o, on aura

$$\| \sum_{n\in F} T(e_n) \| \leq \|T\| \,.$$

Par ce qui précéde la famille $(T(e_n))_{n\in N}$ est donc sommable, c'est donc un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{N} \,;\, L_1(\mu))$; inversement si $u = (u_n)_{n\in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}(\mathbb{N} \,;\, L_1(\mu))$ il existe sur C_o une application linéaire continue et une seule T telle que $T(e_n) = u_n$. On obtient ainsi un isomorphisme (topologique) entre $\mathcal{L}(C_o, L_1(\mu))$ et $\mathcal{S}(\mathbb{N} \,;\, L_1(\mu))$ qui dans le cas particulier où $L_1(\mu) = \ell_1$ devient un isomorphisme entre $\mathcal{L}(C_o, \ell_1)$ et $\mathcal{S}(\mathbb{N}, \mathbb{N} \,;\, \mathbb{R})$.

Ceci pose le problème de caractériser les espaces vectoriels topologiques localement convexes séparés E, dans lesquels sont relativement compacts, dès qu'ils sont bornés, les ensembles de sommes du type

$$\sum_{\substack{\lambda_1 \in F_1 \\ \lambda_n \in F_n}} a_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k}$$

où $(F_1, \ldots, F_n) \in \prod^{k} \mathcal{P}_o(\Lambda_i)$. Evidemment C_o n'a pas cette propriété, ni donc un espace contenant un sous-espace isomorphes à C_o.

---o0o---

Université de Bordeaux I
U.E.R. de Mathématiques et Informatique
351, Cours de la Libération
33405 TALENCE (France)