MICHEL ROME

L'espace $M^{\infty}(T)$ (résumé)

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1973, tome 10, fascicule 4
, p. 31-33
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1973__10_4_31_0>

II$^{\text{ème}}$ Coll. Anal. Fonct.
(1973. Bordeaux)
p. 309-311

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1973 t. 10-4

L'ESPACE $M^{\infty}(T)$ (Résumé)

Michel ROME

Dans cet exposé publié in extenso en [3], nous définissons et étudions l'espace $M^{\infty}(T)$ dual de l'espace compactologique $C^{\infty}(T)$. Ce dernier est structuré en algèbre compactologique en prenant comme recouvrement compact les parties équicontinues uniformément bornées et simplement fermées (donc simplement compactes). On démontre que l'espace des caractères de $C^{\infty}(T)$ s'identifie au complété universel θT de T. Le dual de $C^{\infty}(T)$ est par définition $M^{\infty}(T)$. Cet espace, déjà introduit par Léger et Soury, est un espace de mesures compris entre M_{τ} et M_{σ}, naturellement muni d'une structure d'elc séparé et complet. De ce point de vue, on rencontre là un espace assez curieux qui se laisse difficilement classer :

1. PROPOSITION. - $M^{\infty}(T)$ *n'est infratonnelé que si* T *est discret. Dans ce cas,* $M^{\infty}(T) = \ell^{1}(T)$.

2. PROPOSITION. - $M^{\infty}(T)$ *est semi-réflexif, ou de type* μ, *ou espace de Schwartz, si et seulement si* T *est pseudocompact.*

Enfin $M^{\infty}(T)$ ressemble à un espace DF par les propriétés suivantes :

3. PROPOSITION. - *Une partie de* $M^{\infty}(T)$ *est bornée si et seulement si elle est bornée en norme. Ainsi* $M^{\infty}(T)$ *admet une base dénombrable de bornés.*

4. PROPOSITION. - *Pour toute suite* (V_n) *de voisinages de zéro dans* $M^{\infty}(T)$ *il existe une suite* (λ_n) *de scalaires telle que* $V = \bigcap \lambda_n V_n$ *soit aussi un voisinage de zéro.*

5. PROPOSITION. - *Soit* E *un elc quelconque. Pour qu'une application linéaire* $U : M^{\infty}(T) \to E$ *soit continue il suffit qu'elle soit continue sur la boule unité de* $M^{\infty}(T)$.

Néanmoins, $M^{\infty}(T)$ n'est pas généralement un espace DF. En effet :

6. PROPOSITION. - *Les assertions suivantes sont équivalentes :*
   a) $M^{\infty}(T)$ *est un espace* DF.
   b) $M^{\infty}(T)$ *est* σ*-infratonnelé (toute suite fortement bornée de son dual est équicontinue).*

c) Toute suite f_n *de* $C(T)$ *est équicontinue.*

d) T *est un* P-*espace (tout noyau de* T *est ouvert).*

Les dernières propriétés découlent du fait que, pour toute partition continue de l'unité $(\varphi_i)_{i\in I}$, sur T, l'ensemble $H_{\varphi} = \{\Sigma\lambda_i \varphi_i \ ; \ |\lambda_i| \leqslant 1$ pour tout $i\}$ est élément de la compactologie de (T). Les lemmes suivants montrent que dans un certain sens on peut approcher n'importe quelle partie équicontinue par une partie H_{φ}.

7. **LEMME.** - *Pour toute partie* H *équicontinue et tout* $\varepsilon>0$ *il existe une partition continue de l'unité* $(\varphi_i)_{i\in I}$ *et une famille* $(t_i)_{i\in I}$ *de points de* T *telles que :*

pour toute $f\in H$ $\quad \|f - \sum_1 f(t_i)\,\varphi_i\| \leqslant \varepsilon.$

8. **LEMME.** - *Pour toute partie* H *équicontinue et uniformément bornée et tout* $\varepsilon>0$ *il existe une partition continue de l'unité* $(\varphi_i)_{i\in I}$ *telle que*
$\|\mu\|_H \leqslant \varepsilon\|\mu\| + \sum_{i\in I}|\mu(\varphi_i)|$ *pour toute* $\mu\in M^{\infty}(T)$.

Ces deux lemmes permettent de transporter à $M^{\infty}(T)$ certaines propriétés de $\ell^1(I)$.

9. **THEOREME.** - $M^{\infty}(T)$ *est une bande de* $M(\beta T)$.

10. **THEOREME.** - *Sur le cône positif de* $M^{\infty}(T)$, *la topologie de* $M^{\infty}(T)$ *coïncide avec sa topologie affaiblie* $\sigma(M^{\infty}(T), C^{\infty}(T))$.

11. **THEOREME.** - *Relativement à une partie* A *de* $M^{\infty}(T)$ *les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) A *est relativement compacte dans* $M^{\infty}(T)$,

(b) A *est relativement faiblement compacte,*

(c) A *est bornée et pour toute partition continue de l'unité* $(\varphi_i)_{i\in I}$ *l'ensemble des familles* $(\mu(\varphi_i))_{i\in I}$ *lorsque* μ *décrit* A, *est équisommable dans* $\ell^1(I)$. *Autrement dit, pour tout* $\varepsilon>0$, *il existe une partie finie* J *de* I *telle que*

$$\sup_{\mu\in A} \sum_{i\notin J} |\mu(\varphi_i)| \leqslant \varepsilon.$$

Cette caractérisation des parties compactes de $M^{\infty}(T)$ permet d'obtenir :

12. **THEOREME.** - $M^{\infty}(T)$ *est approximant.*

(1) M. ROME, *Le dual de l'espace compactologique* $C^{\infty}(T)$, Comptes rendus, 274, série A, 1972, p. 1631.

(2) M. ROME, *Ordre et compacité dans l'espace* $M^{\infty}(T)$, Comptes rendus, 274, série A, 1972, p. 1817.

(3) M. ROME, *L'espace* $M^{\infty}(T)$, Publ. Dép. Math. Lyon, 9-1, 1972.

Michel ROME

Département de Mathématiques
Université Claude-Bernard LYON I
43, bd du Onze Novembre 1918

69621-VILLEURBANNE