

J. SCHMETS

**Espaces associés aux espaces linéaires à semi-normes des fonctions continues et bornées sur un espace complètement régulier et séparé**

*Publications du Département de Mathématiques de Lyon*, 1973, tome 10, fascicule 4, p. 35-50

[http://www.numdam.org/item?id=PDML\\_1973\\_\\_10\\_4\\_35\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PDML_1973__10_4_35_0)

© Université de Lyon, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ESPACES ASSOCIES AUX  
ESPACES LINEAIRES A SEMI-NORMES  
DES FONCTIONS CONTINUES ET BORNEES  
SUR UN ESPACE COMPLETEMENT REGULIER ET SEPRE

par

J. SCHMETS

1.- Soit  $X$  un espace complètement régulier et séparé.

a) Espaces linéaires à semi-normes des fonctions continues et bornées sur  $X$

Nous désignons par  $\mathcal{C}^b(X)$  l'algèbre linéaire des fonctions continues et bornées sur  $X$ , et par  $\beta X$  le compactifié de Stone-Čech de  $X$ . Selon l'usage, nous identifions non seulement tout point  $x$  de  $X$  avec la mesure de Dirac qui lui est associée (ce qui fait apparaître  $X$  comme un sous-espace topologique dense de  $\beta X$ ), mais encore tout élément  $f$  de  $\mathcal{C}^b(X)$  avec son extension continue unique sur  $\beta X$  [ce qui identifie les algèbres linéaires  $\mathcal{C}^b(X)$  et  $\mathcal{C}^b(\beta X)$ ].

Si  $P$  est un système de semi-normes sur  $\mathcal{C}^b(X)$ , nous notons  $C_P^b(X)$  l'espace qui en résulte.

Pour toute partie  $A$  de  $X$ , la fonction  $\|\cdot\|_A$  définie sur  $\mathcal{C}^b(X)$  par

$$\|f\|_A = \sup_{x \in A} |f(x)|, \quad \forall f \in \mathcal{C}^b(X),$$

est visiblement une semi-norme sur  $\mathcal{C}^b(X)$  telle que  $\|\cdot\|_A = \|\cdot\|_{\overline{A}}$ .

Cela étant, on vérifie aisément que les semi-normes  $\|\cdot\|_A$  de la convergence uniforme sur les éléments  $A$  d'une famille  $\mathcal{P}$  de parties de  $X$  déterminent un système de semi-normes  $P_{\mathcal{P}}$  sur  $\mathcal{C}^b(X)$  si

- $\bigcup_{A \in \mathcal{P}} A$  est dense dans  $X$  (ce qui assure la séparation de  $P_{\mathcal{P}}$ ),
- étant donné  $A_1, A_2 \in \mathcal{P}$ , il existe  $A \in \mathcal{P}$  tel que  $A_1 \cup A_2 \subset \overline{A}$  (ce qui assure la filtration de  $P_{\mathcal{P}}$ ).

De plus, on voit aisément qu'on peut, sans restriction, supposer que  $\mathcal{P}$  contienne les adhérences et les parties de ses éléments.

Par abus d'écriture, on pose  $C_{\mathcal{P}}^b(X) = C_{\mathcal{P}}^b(X)$  et cette notation suppose que  $\mathcal{P}$  est une famille de parties de  $X$  dont l'union est dense dans  $X$ , héréditaire à gauche, filtrante croissante et stable par passage à l'adhérence.

Deux cas particuliers sont à mettre en évidence :

- a) d'une part, la famille  $\mathcal{P}(X)$  de toutes les parties de  $X$  : on obtient alors l'espace de Banach  $C^b(X)$  car  $\mathcal{P}_{\mathcal{P}(X)}$  est équivalent à la norme de la convergence uniforme sur  $X$ .
- b) d'autre part, la famille  $\mathcal{K}(X)$  de toutes les parties finies de  $X$  : on obtient alors l'espace  $C_s^b(X)$ , qui est évidemment un espace faible.

### b) Espaces linéaires à semi-normes des fonctions continues sur $X$

Des considérations analogues à celles développées en a) ont déjà été effectuées pour l'algèbre linéaire  $\mathcal{G}(X)$  des fonctions continues sur  $X$ .

Contentons-nous de signaler que

- une partie  $B$  de  $X$  est dite bornée si tout  $f \in \mathcal{G}(X)$  est uniformément borné sur  $B$ ,
- nous notons  $\upsilon X$  le replété de  $X$ , c'est-à-dire l'ensemble des caractères de  $\mathcal{G}(X)$  considéré comme sous-espace topologique du dual algébrique  $\mathcal{G}(X)^{\text{alg}}$  de  $\mathcal{G}(X)$ , muni de la topologie simple  $\sigma[\mathcal{G}(X)^{\text{alg}}, \mathcal{G}(X)]$ ,
- nous identifions  $x \in X$  avec la mesure de Dirac qu'il détermine, et  $f \in \mathcal{G}(X)$  avec son prolongement continu unique sur  $\upsilon X$ ,
- si  $\mathcal{P}$  est un système de semi-normes sur  $\mathcal{G}(X)$ , nous notons  $C_{\mathcal{P}}(X)$  l'espace qui en résulte,
- $C_{\mathcal{P}}(X)$  désigne l'espace linéaire  $\mathcal{G}(X)$  muni du système  $\mathcal{P}_{\mathcal{P}}$  des semi-normes de la convergence uniforme sur les éléments de  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{P}$  étant une famille de parties bornées de  $X$  dont l'union est dense dans  $X$ , héréditaire à gauche, filtrante croissante et stable par passage à l'adhérence,
- en particulier, si  $\mathcal{P}$  est la famille  $\mathcal{K}(X)$  [resp.  $\mathcal{K}(X)$ ,  $\mathcal{B}(X)$ ] des parties finies (resp. relativement compactes ; bornées) de  $X$ , on note  $C_s(X)$  [resp.  $C_c(X)$  ;  $C_b(X)$ ] l'espace  $C_{\mathcal{P}}(X)$ .

Signalons enfin que, pour tout  $r > 0$ ,  $\theta_r$  est la fonction tronquante définie sur  $\mathbb{C}$  par

$$\theta_r(z) = \begin{cases} z & \text{si } |z| \leq r \\ rz/|z| & \text{si } |z| > r \end{cases};$$

ces fonctions  $\theta_r$  appartiennent visiblement à  $\mathcal{C}^b(\mathbb{C})$ .

2.- Soit  $E$  un espace linéaire à semi-normes ; nous désignons alors par  $E_s^*$  (resp.  $E_b^*$ ) son dual topologique  $E^*$  muni de la topologie simple  $\sigma(E^*, E)$  [resp. forte  $\beta(E^*, E)$ ].

Soit en outre  $Q$  une propriété localement convexe stable par passage aux limites inductives séparées et satisfaite par tout espace linéaire lorsqu'il est muni du système de semi-normes le plus fort.

On peut alors définir le Q-espace associé à  $E$  (cf. [9]) comme étant l'espace linéaire  $E$  muni du système de semi-normes le plus faible qui, à la fois,

- a) soit plus fort que celui de  $E$ ,
- b) satisfasse à  $Q$ .

Pour se convaincre de l'existence de ce  $Q$ -espace associé à  $E$ , il suffit de considérer la limite inductive de tous les systèmes de semi-normes sur  $E$  qui satisfont aux propriétés a) et b) ci-dessus.

Ces  $Q$ -espaces associés à  $E$  ont déjà été étudiés, au moyen de constructions transfinies, pour les propriétés suivantes : ultrabornologique [2], tonnelé [9], bornologique, évaluable [10], et  $d$ -tonnelé,  $\sigma$ -tonnelé,  $d$ -évaluable et  $\sigma$ -évaluable [11]. Pour ces dernières notions, rappelons que  $E$  est  $\sigma$ -tonnelé (resp.  $\sigma$ -évaluable) si toute suite bornée de  $E_s^*$  (resp.  $E_b^*$ ) est équicontinue et qu'il est  $d$ -tonnelé (resp.  $d$ -évaluable) si toute union dénombrable de parties équi continues bornée dans  $E_s^*$  (resp.  $E_b^*$ ) est équicontinue.

De plus, ces  $Q$ -espaces ont déjà été déterminés pour  $E = C_p(X)$  : ultrabornologique [2] et [4], tonnelé [1] et [4], bornologique [4], évaluable [3], et  $d$ -tonnelé,  $\sigma$ -tonnelé,  $d$ -évaluable et  $\sigma$ -évaluable [11].

Notre but est de les déterminer dans le cas de l'espace  $E = C_p^b(X)$ , ce qui offre des comparaisons intéressantes avec le cas précédent et amène à établir des résultats généraux concernant les  $Q$ -espaces associés.

3.- ESPACES  $C_P^b(X)$  ET ULTRABORNLOGIE

THEOREME 1.- Si  $E_P$  est un espace ultrabornologique à réseau de type  $K$  ou  $\mathcal{K}$ , pour tout système  $Q$  de semi-normes plus faible que  $P$  sur  $E$ ,  $E_P$  est l'espace ultrabornologique associé à  $E_Q$ .

En particulier, si  $P$  est un système de semi-normes sur  $\mathcal{E}^b(X)$  plus faible que  $\|\cdot\|_X$ ,

-  $C^b(X)$  est l'espace ultrabornologique associé à  $C_P^b(X)$ .

-  $C_P^b(X)$  est ultrabornologique si et seulement si  $P \approx \|\cdot\|_X$ .

Preuve. Soit  $F$  l'espace ultrabornologique associé à  $E_Q$ . D'une part, comme  $Q$  est plus faible que  $P$  sur  $E$  et que  $E_P$  est ultrabornologique, l'opérateur identité de  $E_P$  dans  $F$  est continu. D'autre part, l'opérateur identité de l'espace ultrabornologique  $F$  dans l'espace  $E_P$  à réseau de type  $K$  ou  $\mathcal{K}$  est alors à graphe fermé, donc continu. D'où la conclusion.

Les cas particuliers sont immédiats car  $C^b(X)$  est un espace de Banach.

4.- a) ESPACES  $C_P^b(X)$  ET TONNELAGE

THEOREME 2.- Si  $E_P$  est un espace tonnelé de Pták, pour tout système  $Q$  de semi-normes plus faible que  $P$  sur  $E$ ,  $E_P$  est l'espace tonnelé associé à  $E_Q$ .

En particulier, si  $P$  est un système de semi-normes sur  $\mathcal{E}^b(X)$  plus faible que  $\|\cdot\|_X$ ,

-  $C^b(X)$  est l'espace tonnelé associé à  $C_P^b(X)$ .

-  $C_P^b(X)$  est tonnelé si et seulement si  $P \approx \|\cdot\|_X$ .

Preuve. Soit  $F$  l'espace tonnelé associé à  $E_Q$ . D'une part, comme  $Q$  est plus faible que  $P$  sur  $E$  et que  $E_P$  est tonnelé, l'opérateur identité de  $E_P$  dans  $F$  est continu. D'autre part, l'opérateur identité de l'espace tonnelé  $F$  dans l'espace de Pták  $E_P$  est alors à graphe fermé, donc continu. D'où la conclusion.

Les cas particuliers sont immédiats car  $C^b(X)$  est un espace de Banach.

b) ESPACES  $C_P^b(X)$  ET d-TONNELAGE

Rappelons qu'un d-tonneau d'un espace linéaire à semi-normes  $E$

est un tonneau qui est intersection dénombrable de voisinages fermés et absolument convexes de 0, et que E est d-tonnelé si et seulement si tout d-tonneau de E est voisinage de 0.

**PROPOSITION 1.-** Pour tout d-tonneau  $\theta$  de  $C_{\mathcal{P}}^b(X)$ , il existe une suite  $A_n$  de  $\mathcal{P}$  et un nombre  $r > 0$  tels que

$$\theta \supset \left\{ f \in \mathcal{E}^b(X) : \|f\|_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} \leq r \right\} .$$

Preuve. Soit  $\theta = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$  un d-tonneau de  $C_{\mathcal{P}}^b(X)$ , les  $V_n$  étant des voisinages fermés et absolument convexes de 0.

D'une part, comme  $\theta$  est un tonneau de  $C_{\mathcal{P}}^b(X)$ , c'est un tonneau de  $C^b(X)$  et il existe  $r > 0$  tel que

$$\theta \supset \left\{ f \in \mathcal{E}^b(X) : \|f\|_X \leq r \right\} .$$

D'autre part, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $A_n \in \mathcal{P}$  et  $r_n > 0$  tels que

$$V_n \supset \left\{ f \in \mathcal{E}^b(X) : \|f\|_{A_n} \leq r_n \right\} .$$

Comme  $V_n \supset \theta$ , on peut exiger que  $r_n$  soit supérieur ou égal à  $r$  car, si  $f \in \mathcal{E}^b(X)$  est tel que  $\|f\|_{A_n} \leq r$ , on a

$$f = \theta_r \circ f + (f - \theta_r \circ f) \in \theta + \varepsilon V_n \subset (1+\varepsilon)V_n$$

quel que soit  $\varepsilon > 0$  et on en déduit que  $f$  appartient à  $V_n$  car  $V_n$  est fermé et absolument convexe.

D'où la conclusion car, au total, on a

$$\theta = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ f \in \mathcal{E}^b(X) : \|f\|_{A_n} \leq r \right\} = \left\{ f \in \mathcal{E}^b(X) : \|f\|_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} \leq r \right\} .$$

**THEOREME 3.-**

a) L'espace  $C_{\mathcal{P}}^b(X)$  est d-tonnelé si et seulement si  $\mathcal{P}$  contient les unions dénombrables de ses éléments.

b) L'espace d-tonnelé associé à  $C_{\mathcal{P}}^b(X)$  est  $C_{\mathcal{P}_d}^b(X)$ , où  $\mathcal{P}_d$  désigne la famille des parties de  $X$  déterminée par les unions dénombrables d'éléments de  $\mathcal{P}$ .

Preuve de a). La suffisance de la condition résulte aussitôt de la Proposition 1.

La condition est nécessaire. De fait, si les  $A_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) appartiennent à  $\mathcal{P}$ ,

$$\theta = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f \in \mathcal{E}^b(X) : \|f\|_{A_n} \leq 1\} = \{f \in \mathcal{E}^b(X) : \|f\|_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} \leq 1\}$$

est un  $d$ -tonneau de  $C_{\mathcal{P}}^b(X)$ . Si  $C_{\mathcal{P}}^b(X)$  est  $d$ -tonnelé, il existe donc  $A \in \mathcal{P}$  et  $r > 0$  tels que

$$\theta \supset \{f \in \mathcal{E}^b(X) : \|f\|_A \leq r\} .$$

La conclusion résulte alors du lemme suivant.

LEMME.- Soient  $A, A' \subset X$  et  $r, r' > 0$ . On a

$$\{f \in \mathcal{E}^b(X) : \|f\|_A \leq r\} \supset \{f \in \mathcal{E}^b(X) : \|f\|_{A'} \leq r'\}$$

si et seulement si  $A \subset \overline{A'}$  et  $r \geq r'$ .

Preuve du lemme. La condition est évidemment suffisante.

Elle est nécessaire. D'une part, on a  $A \subset \overline{A'}$  car sinon, si  $x \in A \setminus \overline{A'}$ , il existe  $f \in \mathcal{E}^b(X)$  tel que  $f(\overline{A'}) = 0$  et  $f(x) = r+1$ , d'où une contradiction. Cela étant, il est immédiat qu'on doit avoir  $r \geq r'$ .

Preuve de b). Vu a), le système de semi-normes de l'espace  $d$ -tonnelé associé à  $C_{\mathcal{P}}^b(X)$  est plus fort que celui de  $C_{\mathcal{P}_d}^b(X)$ .

Pour conclure, il suffit de prouver que  $C_{\mathcal{P}_d}^b(X)$  est  $d$ -tonnelé, ce qui est immédiat, par application de a).

### c). ESPACES $C_{\mathcal{P}}^b(X)$ ET $\sigma$ -TONNELAGE

Remarquons que toute fonctionnelle linéaire continue  $\tilde{\zeta}$  sur  $C_{\mathcal{P}}^b(X)$  est continue sur  $C^b(X)$ , donc peut être interprétée comme étant une mesure de Radon sur  $\beta X$ . En particulier,  $\tilde{\zeta}$  admet un support compact  $[\tilde{\zeta}]$  dans  $\beta X$  tel que  $[c\tilde{\zeta}] = [c][\tilde{\zeta}]$  pour tout nombre complexe  $c \neq 0$  et pour lequel il existe  $C > 0$  tel que

$$|\tilde{\zeta}(f)| \leq C \|f\|_{[\tilde{\zeta}]}, \quad \forall f \in C_{\mathcal{P}}^b(X) .$$

De plus,  $[\tilde{\zeta}]$  est le plus petit fermé  $F$  de  $\beta X$  tel que  $\tilde{\zeta}(f)$  soit nul

pour tout  $f \in C_{\mathcal{P}}^b(X)$  nul sur  $F$ .

THEOREME 4.-

a) L'espace  $C_{\mathcal{P}}^b(X)$  est  $\sigma$ -tonnelé si et seulement si, pour toute suite  $\tilde{\zeta}_n \in [C_{\mathcal{P}}^b(X)]^*$ ,  $\|\cdot\|_{\bigcup_{n=1}^{\infty} [\tilde{\zeta}_n]}$  est une semi-norme continue sur  $C_{\mathcal{P}}^b(X)$ .

b) L'espace  $\sigma$ -tonnelé associé à  $C_{\mathcal{P}}^b(X)$  est l'espace  $C_{\mathcal{P}'}^b(\beta X)$ , où  $\mathcal{P}'$  est la famille des parties de  $\beta X$  déterminée par  $\mathcal{P}$  et les unions dénombrables de supports d'éléments de  $[C_{\mathcal{P}}^b(X)]^*$ .

Preuve de a). La condition est nécessaire. Soit une suite  $\tilde{\zeta}_n \in [C_{\mathcal{P}}^b(X)]^*$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un nombre complexe  $c_n \neq 0$  tel que

$$|c_n \tilde{\zeta}_n(f)| \leq \|f\|_{[\tilde{\zeta}_n]}, \quad \forall f \in C_{\mathcal{P}}^b(X).$$

De là, la suite  $c_n \tilde{\zeta}_n$  est bornée dans  $[C_{\mathcal{P}}^b(X)]_s^*$ , donc est équicontinue : il existe  $A \in \mathcal{P}$  et  $C > 0$  tels que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |c_n \tilde{\zeta}_n(f)| \leq C \|f\|_A, \quad \forall f \in C_{\mathcal{P}}^b(X).$$

On en déduit immédiatement que

$$[\tilde{\zeta}_n] = [c_n \tilde{\zeta}_n] \subset \overline{A}^{\beta X}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

d'où la conclusion.

La condition est suffisante. Soit  $\tilde{\zeta}_n$  une suite bornée de  $[C_{\mathcal{P}}^b(X)]_s^*$  et posons

$$X' = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} [\tilde{\zeta}_n]}^{\beta X},$$

l'adhérence étant prise dans  $\beta X$ . On sait donc que  $\|\cdot\|_{X'}$  est une semi-norme continue sur  $C_{\mathcal{P}}^b(X)$ . Cela étant, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on voit aisément qu'on peut définir une fonctionnelle linéaire  $\tilde{\zeta}'_n$  sur  $\mathcal{E}^b(X')$  par

$$\tilde{\zeta}'_n(f) = \tilde{\zeta}_n(\tilde{f}), \quad \forall f \in \mathcal{E}^b(X'),$$

où  $\tilde{f}$  désigne un prolongement continu et borné de  $f$  à  $\beta X$ . De plus, de façon immédiate, les  $\tilde{\zeta}'_n$  sont continus sur  $C^b(X')$  et constituent même une suite bornée de  $[C^b(X')]_s^*$ . Comme  $C^b(X')$  est un espace de Banach,



la suite  $\tilde{\zeta}'_n$  est équicontinue : il existe  $C > 0$  tel que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |\tilde{\zeta}'_n(f)| \leq C \|f\|_{X'}, \quad \forall f \in C^b(X').$$

D'où la conclusion car, de cette dernière majoration, on déduit aisément une majoration analogue pour les  $\tilde{\zeta}_n$  dans  $C^b_{\mathcal{P}}(X)$ .

Preuve de b). Vu a), le système de semi-normes de l'espace  $\sigma$ -tonnelé associé à  $C^b_{\mathcal{P}}(X)$  est plus fort que celui de  $C^b_{\mathcal{P}'}(X)$ .

Pour conclure, il suffit donc de prouver que l'espace  $C^b_{\mathcal{P}'}(X)$  est  $\sigma$ -tonnelé et, pour ce faire, vu a), il suffit d'établir que, pour tout  $\tilde{\zeta} \in [C^b_{\mathcal{P}'}(X)]^*$ , il existe une suite  $\tilde{\zeta}_n \in [C^b_{\mathcal{P}}(X)]^*$  telle que

$$\tilde{\zeta} \in \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} [\tilde{\zeta}_n]}^{\beta X}.$$

Soit  $\tilde{\zeta} \in [C^b_{\mathcal{P}'}(X)]^*$ . Par construction de  $\mathcal{P}'$ , il existe  $A \in \mathcal{P}$ , une suite  $\tilde{\zeta}_n \in [C^b_{\mathcal{P}}(X)]^*$  et  $C > 0$  tels que

$$|\tilde{\zeta}(f)| \leq C \sup \left( \|f\|_A, \|f\|_{\bigcup_{n=1}^{\infty} [\tilde{\zeta}_n]} \right), \quad \forall f \in C^b_{\mathcal{P}'}(X).$$

Comme  $\tilde{\zeta} \in [C^b_{\mathcal{P}'}(X)]^*$ , on a  $\tilde{\zeta} \in [C^b(X)]^*$  et  $\tilde{\zeta}$  peut donc être représenté par une mesure de Radon  $\mu$  sur  $\beta X$ . Posons  $\mu_1 = \mu|_{\bar{A}^{\beta X}}$  et  $\mu_2 = \mu - \mu_1$ ,

où  $\mu|_{\bar{A}^{\beta X}}$  désigne la restriction de la mesure  $\mu$  à l'ensemble  $\bar{A}^{\beta X}$ . Alors,  $\mu_1$  détermine une fonctionnelle linéaire  $\tilde{\zeta}_0$  sur  $C^b(X)$  telle que

$$|\tilde{\zeta}_0(f)| = \left| \int f \, d\mu|_{\bar{A}^{\beta X}} \right| \leq v\mu(\bar{A}^{\beta X}) \cdot \|f\|_{\bar{A}^{\beta X}}, \quad \forall f \in C^b(X),$$

c'est-à-dire que  $\tilde{\zeta}_0$  appartient à  $[C^b_{\mathcal{P}}(X)]^*$ . De là, il vient

$$\begin{aligned} |\tilde{\zeta}(f)| &= \left| \int f \, d\mu \right| \leq \left| \int f \, d\mu_1 \right| + \left| \int f \, d\mu_2 \right| \\ &\leq v\mu(\bar{A}^{\beta X}) \cdot \|f\|_{[\tilde{\zeta}_0]} + v\mu(\beta X \setminus \bar{A}^{\beta X}) \cdot \|f\|_{\bigcup_{n=1}^{\infty} [\tilde{\zeta}_n]} \\ &\leq v\mu(\beta X) \cdot \|f\|_{\bigcup_{n=0}^{\infty} [\tilde{\zeta}_n]}, \end{aligned}$$

pour tout  $f \in C^b(X)$ , car on a  $[\mu] \subset A \cup \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} [\zeta_n]}^{\beta X}$  et

$$\overline{A \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} [\zeta_n]}^{\beta X} \setminus \overline{A}^{\beta X} \subset \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} [\zeta_n]}^{\beta X} .$$

D'où la conclusion.

5.- Avant d'aborder les propriétés d'avaluabilité, de d-évaluabilité et de  $\sigma$ -évaluabilité de  $C_p^b(X)$ , voici quelques résultats concernant les espaces linéaires à semi-normes.

**PROPOSITION 2.-** Soit E un espace linéaire à semi-normes.

a) Si F est un sous-espace linéaire de E,  $\theta \cap F$  est un tonneau (resp. d-tonneau ;  $\sigma$ -tonneau) de F pour tout tonneau (resp. d-tonneau ;  $\sigma$ -tonneau)  $\theta$  de E. De plus,  $\theta \cap F$  est bornivore dans F si  $\theta$  est bornivore dans E.

b) Si F est un sous-espace linéaire dense dans E et si F est tonnelé (resp. d-tonnelé ;  $\sigma$ -tonnelé ; évaluable ; d-évaluable ;  $\sigma$ -évaluable), E est tonnelé (resp. d-tonnelé ;  $\sigma$ -tonnelé ; évaluable ; d-évaluable ;  $\sigma$ -évaluable).

Preuve. La démonstration de l'énoncé a) est immédiate. Celle de b) se déduit aisément de a).

En effet, par exemple, si F est tonnelé et si  $\theta$  est un tonneau de E,  $\theta \cap F$  est un tonneau de F : il existe donc une semi-norme p de E et  $r > 0$  tels que

$$\{f \in F : p(f) \leq r\} \subset \theta \cap F \subset \theta .$$

On en déduit immédiatement que

$$\{f \in E : p(f) \leq r\} \subset \theta$$

car  $\theta$  est fermé et F dense dans E.

Voici une réciproque partielle du cas b) de la Proposition 2.

**PROPOSITION 3.-** Soit F un sous-espace linéaire de E tel que, pour tout borné B de E, il existe un borné de F dont l'adhérence dans E contient B. Alors l'adhérence dans E de tout tonneau bornivore de F est un tonneau bornivore de E.

De là,  $F$  est évaluable (resp. d-évaluable ;  $\sigma$ -évaluable) si et seulement si  $E$  l'est.

Preuve. Soit  $\theta$  un tonneau bornivore de  $F$  et désignons par  $\bar{\theta}$  son adhérence dans  $E$ . Bien sûr,  $\bar{\theta}$  est fermé et absolument convexe dans  $E$ . Prouvons qu'il est bornivore dans  $E$ . De fait, si  $B$  est un borné de  $E$  et si  $B'$  est un borné de  $F$  dont l'adhérence  $\bar{B}'$  dans  $E$  contient  $B$ , il existe  $r > 0$  tel que  $B' \subset r\theta$ , donc tel que  $B \subset \bar{B}' \subset r\bar{\theta}$ .

Vu le cas b) de la Proposition 2, comme  $F$  est notamment dense dans  $E$ , il suffit pour conclure de noter les points suivants.

Si  $E$  est évaluable, tout tonneau bornivore  $\theta$  de  $F$  a pour adhérence  $\bar{\theta}$  dans  $E$  un tonneau bornivore de  $E$  :  $\bar{\theta}$  contient donc une semi-boule  $b$  de  $E$ , d'où la conclusion car alors  $\theta = \bar{\theta} \cap F \supset b \cap F$ .

Si  $E$  est d-évaluable, soit  $\theta$  un d-tonneau bornivore de  $F$ . Il s'écrit donc

$$\theta = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f \in F : p_n(f) \leq r_n\} ,$$

les  $p_n$  étant des semi-normes continues sur  $E$  et les  $r_n$  étant strictement positifs. Vu ce qui précède, nous savons que l'adhérence  $\bar{\theta}$  de  $\theta$  dans  $E$  est un tonneau bornivore. Comme, en outre, on a

$$\bar{\theta} \subset \theta' = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f \in E : p_n(f) \leq r_n\} ,$$

$\theta'$  est un d-tonneau bornivore de  $E$ , donc contient une semi-boule  $b$  de  $E$ , d'où la conclusion car alors  $\theta = \theta' \cap F \supset b \cap F$ .

Si  $E$  est  $\sigma$ -évaluable, il suffit de procéder comme dans le cas d-évaluable.

**REMARQUE.**- Les hypothèses de la Proposition 3 ne suffisent pas pour obtenir que  $E$  tonnelé (resp. d-tonnelé ;  $\sigma$ -tonnelé) implique que  $F$  soit tonnelé (resp. d-tonnelé ;  $\sigma$ -tonnelé).

Ainsi,  $E = L_1^{loc}(\mathbb{R})$  est un espace de Fréchet et  $F = L_1(\mathbb{R})$  muni des semi-normes induites par  $E$  n'est même pas un espace  $\sigma$ -tonnelé car les fonctionnelles

$$\zeta_n(f) = \int_n^{n+1} f(x) dx , n \in \mathbb{N} ,$$

constituent une suite bornée de  $F'_s$ , qui n'est pas équicontinue dans  $F$ .

Il est possible d'adapter la démonstration de la Proposition 3 pour passer au cas des espaces évaluable, d-évaluable et  $\sigma$ -évaluable associés.

**PROPOSITION 4.** - Soit  $E_p$  un espace évaluable et soit  $P'$  un système de semi-normes sur  $E$  plus faible que  $P$ .

Si  $F$  est un sous-espace linéaire de  $E$  tel que, pour tout borné  $B$  de  $E_p$ , il existe un borné de  $F_p$ , dont l'adhérence dans  $E_p$  contienne  $B$ , alors

- a)  $E_p$  est évaluable si et seulement si  $F_p$  l'est.  
 b)  $E_{p''}$  est l'espace évaluable associé à  $E_p$  si et seulement si  $F_{p''}$  est l'espace évaluable associé à  $F_p$ .

Cet énoncé est encore valable si on y remplace partout évaluable par d-évaluable (resp.  $\sigma$ -évaluable).

Preuve. La partie a) est en fait un cas particulier de la Proposition 3 car  $\overline{A}^{E_p} \subset \overline{A}^{E_{p'}}$  pour toute partie  $A$  de  $F$ .

Etablissons b). Soit  $E_{p''}$  l'espace évaluable (resp. d-évaluable ;  $\sigma$ -évaluable) associé à  $E_p$ . Comme tout borné de  $E_{p''}$  est borné dans  $E_p$ , et que  $\overline{A}^{E_p} \subset \overline{A}^{E_{p''}}$  pour toute partie  $A$  de  $F$ , la Proposition 3 affirme que  $F_{p''}$  est évaluable (resp. d-évaluable ;  $\sigma$ -évaluable).

Soit à présent  $F_{p''}$  l'espace évaluable (resp. d-évaluable ;  $\sigma$ -évaluable) associé à  $F_p$ . Bien sûr, on a  $P' \leq P'' \leq P''$  sur  $F$  et, comme  $F$  est dense dans  $E_p$ , on peut considérer  $P''$  comme étant un système de semi-normes sur  $E$  intermédiaire entre  $P'$  et  $P''$ . Or le cas b) de la Proposition 2 montre alors que  $E_{p''}$  est évaluable (resp. d-évaluable ;  $\sigma$ -évaluable) : on a donc  $P'' \approx P''$  sur  $E$ , d'où la conclusion.

## 6.- ESPACES $C_p^b(X)$ ET EVALUABILITE, d-EVALUABILITE ET $\sigma$ -EVALUABILITE

L'application des résultats du paragraphe précédent est immédiate à partir de la notion d'espaces complexes modulaires et de la Proposition 6 qui suit. En ce qui concerne les espaces complexes modulaires, nous renvoyons à [7] (cf. pp. 349-364) ; ce sont les espaces linéaires à semi-normes  $E$  munis d'une relation d'ordre  $\geq$  telle que

- toute combinaison linéaire à coefficients positifs d'éléments  $\geq 0$

soit  $\geq 0$ ,

- si  $f \geq 0$  et  $-f \geq 0$ , alors  $f = 0$ ,

- tout  $f \in E$  admette une représentation unique  $\Re f + i\Im f$ , où  $\Re f$  et  $\Im f$  sont réels, c'est-à-dire combinaisons linéaires à coefficients réels d'éléments  $\geq 0$ ,

- pour tout  $f \in E$ , il existe un module  $|f| \geq 0$  tel que  $|f| = f$  si  $f \geq 0$ , et que  $|f| = |\Re f - i\Im f|$ ,  $|cf| = |c||f|$  et  $|f+g| \leq |f| + |g|$  quels que soient  $f, g \in E$  et  $c \in \mathbb{C}$ ,

- il existe un système de semi-normes  $P$  sur  $E$  équivalent à celui de  $E$  tel que  $p(f) \leq p(g)$  pour tout  $p \in P$  et tous  $f, g \in E$  tels que  $|f| \leq |g|$  (cf. [7], § 12, p. 363).

**PROPOSITION 5.-** Si l'espace  $C_p(X)$  est complexe modulaire pour l'ordre naturel de  $\mathcal{E}(X)$ ,  $P$  est plus faible que le système des semi-normes de  $C_c(\cup X)$ .

Preuve. On sait (cf. [6]) que  $C_c(\cup X)$  est la limite inductive des espaces de Banach  $\mathcal{E}(X)_{\Delta(f)}$  pour  $f \in \mathcal{E}(X)$ ,  $\mathcal{E}(X)_{\Delta(f)}$  étant l'enveloppe linéaire de

$$\Delta(f) = \{g \in \mathcal{E}(X) : |g| \leq |f|\}$$

munie de la jauge déterminée par  $\Delta(f)$ .

C'est alors immédiat car, vu la dernière partie de la définition des espaces complexes modulaires, les semi-boules de  $C_p(X)$  absorbent  $\Delta(f)$  quel que soit  $f \in \mathcal{E}(X)$ .

**PROPOSITION 6.-** Soit  $C_p(X)$  un espace complexe modulaire pour l'ordre naturel de  $\mathcal{E}(X)$ . Alors, pour tout borné  $B$  de  $C_p(X)$ , il existe  $B'$  de  $C_p^b(X)$  dont l'adhérence dans  $C_c(\cup X)$ , donc dans  $C_p(X)$ , contient  $B$ .

Preuve. La dernière partie de la définition des espaces complexes modulaires montre que

$$B' = \{\theta_n \circ f : f \in B, n \in \mathbb{N}\}$$

est borné dans  $C_p^b(X)$ , vu que  $|\theta_n \circ f| \leq |f|$  pour tout  $f \in C_p(X)$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ .

En outre, on voit aisément que, pour tout  $f \in \mathcal{E}(X)$ , la suite  $\theta_n \circ f$  converge vers  $f$  dans  $C_c(\cup X)$  et, a fortiori, dans  $C_p(X)$  vu la Proposition 5.

D'où la conclusion.

THEOREME 5.- Si  $C_P(X)$  est un espace complexe modulaire pour l'ordre naturel de  $\mathcal{E}(X)$ ,

a)  $C_P(X)$  est évaluable (resp. d-évaluable ;  $\sigma$ -évaluable) si et seulement si  $C_P^b(X)$  l'est.

b)  $C_{P'}(X)$  est l'espace évaluable (resp. d-évaluable ;  $\sigma$ -évaluable) associé à  $C_P(X)$  si et seulement si  $C_{P'}^b(X)$  est l'espace évaluable (resp. d-évaluable ;  $\sigma$ -évaluable) associé à  $C_P^b(X)$ .

Preuve. Comme l'espace  $C_c(\cup X)$  est ultrabornologique (cf. [6]), c'est une conséquence immédiate des Propositions 4, 5 et 6.

THEOREME 6.- Si  $C_P^b(X)$  a un système de semi-normes plus fort que celui de  $C_S^b(X)$  et a les mêmes bornés que  $C^b(X)$ ,  $C^b(X)$  est l'espace évaluable associé à  $C_P^b(X)$ .

Preuve. D'une part, tout voisinage de 0 dans  $C_P^b(X)$  absorbe tout borné de  $C^b(X)$ , donc contient un multiple de la boule unité de  $C^b(X)$ .

D'autre part, la boule unité fermée de  $C^b(X)$  est un tonneau de  $C_S^b(X)$ , donc de  $C_P^b(X)$ , bornivore dans  $C^b(X)$ .

REMARQUE.- L'espace  $C_P^b(X)$  a les mêmes bornés que  $C^b(X)$  notamment dans les deux cas suivants :

- P est le système des semi-normes de la convergence uniforme sur les parties dénombrables de X ,

- P est le système des semi-normes strictes  $p_\varphi$  définies par

$$p_\varphi(f) = \sup_{x \in X} |\varphi(x)f(x)|, \quad \forall f \in \mathcal{E}^b(X),$$

où  $\varphi$  parcourt la famille des fonctions bornées sur X qui tendent vers 0 à l'infini (c'est-à-dire telles que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un compact  $K_\varepsilon$  de X tel que  $|\varphi(x)| \leq \varepsilon$  pour tout  $x \in X \setminus K_\varepsilon$ ).

7.- En faisant intervenir les espaces complexes modulaires, on peut obtenir un résultat analogue à la Proposition 4, concernant la propriété de bornologie.

PROPOSITION 7.- Si  $E_P$  et  $E_{P'}$  sont des espaces complexes modulaires pour la même relation d'ordre, si P' est plus faible que P sur E, si  $E_P$  est bornologique et si F est un sous-espace linéaire de E

tel que l'adhérence dans  $E_p$  de

$$B_f = \{g \in F : |g| \leq |f|\}$$

contienne  $f$  quel que soit  $f \in E$ , alors

- a)  $E_{p'}$  est bornologique si et seulement si  $F_{p'}$  l'est ,  
 b)  $E_{p''}$  est l'espace bornologique associé à  $E_{p'}$  si et seulement si  $F_{p''}$  est l'espace bornologique associé à  $F_{p'}$  .

Preuve. Il suffit évidemment d'établir b).

Soit  $E_{p''}$  l'espace bornologique associé à  $E_{p'}$  . Comme les bornés de  $E_{p'}$  et de  $E_{p''}$  coïncident et qu'on a  $P' \leq P'' \leq P$  sur  $E$ , pour tout borné  $B$  de  $E_{p''}$  ,  $B' = \bigcup_{f \in B} B_f$  est un borné de  $F_{p''}$  dont l'adhérence dans  $E_p$  , donc dans  $E_{p''}$  , contient  $B$ . Vu la Proposition 3,  $F_{p''}$  est donc évaluable.

Pour prouver que  $F_{p''}$  est bornologique, il suffit alors d'établir que toute fonctionnelle linéaire sur  $F$  et bornée sur les bornés de  $F_{p''}$  est continue sur  $F_{p''}$  . Soit  $\tilde{\zeta}$  une telle fonctionnelle. On sait alors que  $\tilde{\zeta}$  est combinaison linéaire de fonctionnelles linéaires positives sur  $F$  [c'est-à-dire telles que  $\tilde{\zeta}(f) \geq 0$  pour tout  $f \geq 0$ ] et bornée sur les bornés de  $F_{p''}$  . On est ainsi ramené au cas où, en outre,  $\tilde{\zeta}$  est positif. On peut alors étendre  $\tilde{\zeta}$  au cône  $K$  des éléments  $\geq 0$  de  $E$  par

$$\tau(f) = \sup_{f \in B_f} \tilde{\zeta}(g) , \forall f \in K .$$

Ce prolongement  $\tau$  satisfait alors aux conditions requises pour être la restriction d'une fonctionnelle  $\tilde{\zeta}$  linéaire positive et bornée sur les bornés de  $E_{p''}$  . De là,  $\tilde{\zeta}$  est continu sur  $E_{p''}$  et sa restriction  $\tilde{\zeta}$  à  $F$  est donc continue sur  $F_{p''}$  .

Soit, à présent,  $F_{p'''}$  l'espace bornologique associé à  $F_{p'}$  . Vu ce qui précède, on a  $P' \leq P''' \leq P'' \leq P$  sur  $F$ . Soit alors  $\tilde{P}'''$  le système de semi-normes qui prolonge  $P'''$  à  $E$  de telle sorte que  $P' \leq \tilde{P}''' \leq P'' \leq P$ . Pour conclure, il suffit de prouver qu'on a  $\tilde{P}''' = P''$  sur  $E$  ou, ce qui revient au même que  $E_{\tilde{P}'''}$  est bornologique.

Tout d'abord,  $E_{\tilde{P}'''}$  est évaluable vu la Proposition 4 et le fait que les bornés de  $E_{\tilde{P}'''}$  et de  $E_{p'}$  coïncident car ceux de  $E_{p''}$  et de  $E_{p'}$  le font.

Dès lors,  $E_{\tilde{P}^n}$  est bornologique si toute fonctionnelle linéaire  $\tilde{\zeta}$  sur  $E$  et bornée sur les bornés de  $E_{\tilde{P}^n}$  est continue sur  $E_{\tilde{P}^n}$ . D'une part,  $\tilde{\zeta}$  est évidemment continu sur  $E_{P^m}$ . D'autre part, la restriction de  $\tilde{\zeta}$  à  $F$  est bornée sur les bornés de  $F_{P^m}$ , donc est continue sur  $F_{P^m}$  et admet un prolongement  $\tilde{\zeta}$  linéaire continu sur  $E_{\tilde{P}^n}$ . Pour conclure, il suffit alors de noter que  $F$  est dense dans  $E_{P^m}$ .

### 8.- ESPACES $C_P^b(X)$ ET BORNOLOGIE

**THEOREME 7.-** Si  $C_P(X)$  est un espace complexe modulaire pour l'ordre naturel de  $\mathcal{F}(X)$ ,

- a)  $C_P(X)$  est bornologique si et seulement si  $C_P^b(X)$  l'est,  
 b)  $C_{P^m}(X)$  est l'espace bornologique associé à  $C_P(X)$  si et seulement si  $C_{P^m}^b(X)$  est l'espace bornologique associé à  $C_P^b(X)$ .

Preuve. On sait que  $C_c(\cup X)$  est un espace complexe modulaire pour l'ordre naturel de  $\mathcal{F}(X)$ , que  $P$  est plus faible que le système de semi-normes de  $C_c(\cup X)$  par la Proposition 5 et que  $C_c(\cup X)$  est ultrabornologique. De plus, il est immédiat que, pour tout  $f \in \mathcal{F}(X)$ , l'adhérence dans  $C_c(\cup X)$  de  $\{g \in \mathcal{F}^b(X) : |g| \leq |f|\}$  contient  $f$ . La Proposition 7 permet alors de conclure.

**THEOREME 8.-** Si  $C_P^b(X)$  a les mêmes bornés que  $C^b(X)$ ,  $C^b(X)$  est l'espace bornologique associé à  $C_P^b(X)$ .

Preuve. C'est immédiat car  $C^b(X)$  est un espace de Banach, donc bornologique.



BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. BUCHWALTER, Parties bornées d'un espace topologique complètement régulier. Séminaire Choquet, 9 (1969-1970), n°14, 15 pages.
- [2] H. BUCHWALTER, Sur le théorème de Nachbin-Shirota, J. Math. Pures et Appl., 51 (1972), 399-418.
- [3] H. BUCHWALTER - K. NOUREDDINE, Topologies localement convexes sur les espaces de fonctions continues. C.R. Acad. Sc. Paris, 274A (1972), 1931-1934.
- [4] H. BUCHWALTER - J. SCHMETS, Sur quelques propriétés de l'espace  $C_s(T)$ . J. Math. Pures et Appl., à paraître.  
Voir aussi : C.R. Acad. Sc. Paris, 274A (1972), 1300-1303.
- [5] M. DE WILDE - C. HOUET, On increasing sequences of absolutely convex sets in locally convex spaces. Math. Ann., 192 (1971), 257-261.
- [6] M. DE WILDE - J. SCHMETS, Caractérisation des espaces  $C(X)$  ultrabornologiques. Bull. Soc. Roy. Sc. Liège, 40 (1971), 119-121.
- [7] H.G. GARNIR - M. DE WILDE - J. SCHMETS, Analyse fonctionnelle, I, Birkhäuser Verlag, Basel, 1968.
- [8] T. HUSAIN, Two new classes of locally convex spaces. Math. Ann., 166 (1966), 289-299.
- [9] Y. KOMURA, On linear topological spaces. Kumamoto J. of Sc., 5A (1962), 148-157.
- [10] K. NOUREDDINE, L'espace infratonné associé à un espace localement convexe. C.R. Acad. Sc. Paris, 174A (1972), 1821-1823.
- [11] K. NOUREDDINE - J. SCHMETS, Espaces associés à un espace localement convexe et espaces de fonctions continues. Bull. Soc. Roy. Sc. Liège, à paraître.

J. SCHMETS  
 Institut de Mathématique  
 Université de Liège  
 Avenue des Tilleuls, 15  
 B-4000 LIEGE / BELGIQUE.