PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

J. SCHMETS

Espaces associés aux espaces linéaires à semi-normes des fonctions continues et bornées sur un espace complètement régulier et séparé

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1973, tome 10, fascicule 4 , p. 35-50

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1973__10_4_35_0>

II$^{\text{ème}}$ - Coll. Anal. Fonct.
(1973, Bordeaux)
p. 313-328

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1973 t.10-4

ESPACES ASSOCIES AUX ESPACES LINEAIRES A SEMI-NORMES DES FONCTIONS CONTINUES ET BORNEES SUR UN ESPACE COMPLETEMENT REGULIER ET SEPARE

par

J. SCHMETS

1.- Soit X un espace complètement régulier et séparé.

a) Espaces linéaires à semi-normes des fonctions continues et bornées sur X

Nous désignons par $\mathscr{C}^b(X)$ l'algèbre linéaire des fonctions continues et bornées sur X, et par βX le compactifié de Stone-Čech de X. Selon l'usage, nous identifions non seulement tout point x de X avec la mesure de Dirac qui lui est associée (ce qui fait apparaître X comme un sous-espace topologique dense de βX), mais encore tout élément f de $\mathscr{C}^b(X)$ avec son extension continue unique sur βX [ce qui identifie les algèbres linéaires $\mathscr{C}^b(X)$ et $\mathscr{C}^b(\beta X)$].

Si P est un système de semi-normes sur $\mathscr{C}^b(X)$, nous notons $C^b_P(X)$ l'espace qui en résulte.

Pour toute partie A de X, la fonction $\|\cdot\|_A$ définie sur $\mathscr{C}^b(X)$ par

$$\|f\|_A = \sup_{x \in A} |f(x)| \ , \ \forall f \in \mathscr{C}^b(X) \ ,$$

est visiblement une semi-norme sur $\mathscr{C}^b(X)$ telle que $\|\cdot\|_A = \|\cdot\|_{\overline{A}}$.

Cela étant, on vérifie aisément que les semi-normes $\|\cdot\|_A$ de la convergence uniforme sur les éléments A d'une famille $\mathscr{P}$ de parties de X déterminent un système de semi-normes $P_{\mathscr{P}}$ sur $\mathscr{C}^b(X)$ si

- $\bigcup_{A \in \mathscr{P}} A$ est dense dans X (ce qui assure la séparation de $P_{\mathscr{P}}$),
- étant donné $A_1, A_2 \in \mathscr{P}$, il existe $A \in \mathscr{P}$ tel que $A_1 \cup A_2 \subset \overline{A}$ (ce qui assure la filtration de $P_{\mathscr{P}}$).

De plus, on voit aisément qu'on peut, sans restriction, supposer que $\mathcal{P}$ contienne les adhérences et les parties de ses éléments.

Par abus d'écriture, on pose $C^b_{\mathcal{P}}(X) = C^b_{P_{\mathcal{P}}}(X)$ et cette notation suppose que $\mathcal{P}$ est une famille de parties de X dont l'union est dense dans X, héréditaire à gauche, filtrante croissante et stable par passage à l'adhérence.

Deux cas particuliers sont à mettre en évidence :

a) d'une part, la famille $\mathcal{P}(X)$ de toutes les parties de X : on obtient alors l'espace de Banach $C^b(X)$ car $P_{\mathcal{P}(X)}$ est équivalent à la norme de la convergence uniforme sur X.

b) d'autre part, la famille $\mathcal{A}(X)$ de toutes les parties finies de X : on obtient alors l'espace $C^b_s(X)$, qui est évidemment un espace faible.

b) <u>Espaces linéaires à semi-normes des fonctions continues sur</u> X

Des considérations analogues à celles développées en a) ont déjà été effectuées pour l'algèbre linéaire $\mathcal{C}(X)$ des fonctions continues sur X.

Contentons-nous de signaler que

- une partie B de X est dite <u>bornée</u> si tout $f \in \mathcal{C}(X)$ est uniformément borné sur B,

- nous notons υX le repleté de X, c'est-à-dire l'ensemble des caractères de $\mathcal{C}(X)$ considéré comme sous-espace topologique du dual algébrique $\mathcal{C}(X)^{*alg}_s$ de $\mathcal{C}(X)$, muni de la topologie simple $\sigma[\mathcal{C}(X)^{*alg}, \mathcal{C}(X)]$,

- nous identifions $x \in X$ avec la mesure de Dirac qu'il détermine, et $f \in \mathcal{C}(X)$ avec son prolongement continu unique sur υX,

- si P est un système de semi-normes sur $\mathcal{C}(X)$, nous notons $C_P(X)$ l'espace qui en résulte,

- $C_{\mathcal{P}}(X)$ désigne l'espace linéaire $\mathcal{C}(X)$ muni du système $P_{\mathcal{P}}$ des semi-normes de la convergence uniforme sur les éléments de $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}$ étant une famille de parties bornées de X dont l'union est dense dans X, héréditaire à gauche, filtrante croissante et stable par passage à l'adhérence,

- en particulier, si $\mathcal{P}$ est la famille $\mathcal{A}(X)$ [resp. $\mathcal{K}(X)$, $\mathcal{B}(X)$] des parties finies (resp. relativement compactes ; bornées) de X, on note $C_s(X)$ [resp. $C_c(X)$; $C_b(X)$] l'espace $C_{\mathcal{P}}(X)$.

Signalons enfin que, pour tout $r > 0$, θ_r est la fonction tronquante définie sur $\mathbb{C}$ par

$$\theta_r(z) = \begin{cases} z & \text{si } |z| \leq r \\ rz/|z| & \text{si } |z| > r \end{cases} ;$$

ces fonctions θ_r appartiennent visiblement à $\mathscr{C}^b(\mathbb{C})$.

2.- Soit E un espace linéaire à semi-normes ; nous désignons alors par E_s^* (resp. E_b^*) son dual topologique E^* muni de la topologie simple $\sigma(E^*,E)$ [resp. forte $\beta(E^*,E)$].

Soit en outre Q une propriété localement convexe stable par passage aux limites inductives séparées et satisfaite par tout espace linéaire lorsqu'il est muni du système de semi-normes le plus fort.

On peut alors définir le Q-<u>espace associé à</u> E (cf. [9]) comme étant l'espace linéaire E muni du système de semi-normes le plus faible qui, à la fois,

a) soit plus fort que celui de E,

b) satisfasse à Q.

Pour se convaincre de l'existence de ce Q-espace associé à E, il suffit de considérer la limite inductive de tous les systèmes de semi-normes sur E qui satisfont aux propriétés a) et b) ci-dessus.

Ces Q-espaces associés à E ont déjà été étudiés, au moyen de constructions transfinies, pour les propriétés suivantes : ultrabornologique [2], tonnelé [9], bornologique, évaluable [10], et d-tonnelé, σ-tonnelé, d-évaluable et σ-évaluable [11]. Pour ces dernières notions, rappelons que E est σ-tonnelé (resp. σ-évaluable) si toute suite bornée de E_s^* (resp. E_b^*) est équicontinue et qu'il est d-tonnelé (resp. d-évaluable) si toute union dénombrable de parties équicontinues bornée dans E_s^* (resp. E_b^*) est équicontinue.

De plus, ces Q-espaces ont déjà été déterminés pour $E = C_p(X)$: ultrabornologique [2] et [4], tonnelé [1] et [4], bornologique [4], évaluable [3], et d-tonnelé, σ-tonnelé, d-évaluable et σ-évaluable [11].

Notre but est de les déterminer dans le cas de l'espace $E = C_p^b(X)$, ce qui offre des comparaisons intéressantes avec le cas précédent et amène à établir des résultats généraux concernant les Q-espaces associés.

3.- ESPACES $C_P^b(X)$ ET ULTRABORNOLOGIE

THEOREME 1.- Si E_P est un espace ultrabornologique à réseau de type $\mathcal{K}$ ou $s\mathcal{K}$, pour tout système Q de semi-normes plus faible que P sur E, E_P est l'espace ultrabornologique associé à E_Q.

En particulier, si P est un système de semi-normes sur $\mathscr{C}^b(X)$ plus faible que $\|\cdot\|_X$,

– $C^b(X)$ est l'espace ultrabornologique associé à $C_P^b(X)$.

– $C_P^b(X)$ est ultrabornologique si et seulement si $P \simeq \|\cdot\|_X$.

Preuve. Soit F l'espace ultrabornologique associé à E_Q. D'une part, comme Q est plus faible que P sur E et que E_P est ultrabornologique, l'opérateur identité de E_P dans F est continu. D'autre part, l'opérateur identité de l'espace ultrabornologique F dans l'espace E_P à réseau de type $\mathcal{K}$ ou $s\mathcal{K}$ est alors à graphe fermé, donc continu. D'où la conclusion.

Les cas particuliers sont immédiats car $C^b(X)$ est un espace de Banach.

4.- a) ESPACES $C_P^b(X)$ ET TONNELAGE

THEOREME 2.- Si E_P est un espace tonnelé de Pták, pour tout système Q de semi-normes plus faible que P sur E, E_P est l'espace tonnelé associé à E_Q.

En particulier, si P est un système de semi-normes sur $\mathscr{C}^b(X)$ plus faible que $\|\cdot\|_X$,

– $C^b(X)$ est l'espace tonnelé associé à $C_P^b(X)$.

– $C_P^b(X)$ est tonnelé si et seulement si $P \simeq \|\cdot\|_X$.

Preuve. Soit F l'espace tonnelé associé à E_Q. D'une part, comme Q est plus faible que P sur E et que E_P est tonnelé, l'opérateur identité de E_P dans F est continu. D'autre part, l'opérateur identité de l'espace tonnelé F dans l'espace de Pták E_P est alors à graphe fermé, donc continu. D'où la conclusion.

Les cas particuliers sont immédiats car $C^b(X)$ est un espace de Banach.

b) ESPACES $C_{\mathscr{P}}^b(X)$ ET d-TONNELAGE

Rappelons qu'un d-tonneau d'un espace linéaire à semi-normes E est un tonneau qui est intersection dénombrable de voisinages fermés et absolument convexes de 0, et que E est d-tonnelé si et seulement si tout d-tonneau de E est voisinage de 0.

PROPOSITION 1.- <u>Pour tout</u> d-<u>tonneau</u> θ <u>de</u> $C^b_{\mathcal{P}}(X)$, <u>il existe une suite</u> A_n <u>de</u> $\mathcal{P}$ <u>et un nombre</u> $r > 0$ <u>tels que</u>

$$\theta \supset \{f \in \mathcal{C}^b(X) : \|f\|_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n} \leq r\} .$$

<u>Preuve</u>. Soit $\theta = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} V_n$ un d-tonneau de $C^b_{\mathcal{P}}(X)$, les V_n étant des voisinages fermés et absolument convexes de 0.

D'une part, comme θ est un tonneau de $C^b_{\mathcal{P}}(X)$, c'est un tonneau de $C^b(X)$ et il existe $r > 0$ tel que

$$\theta \supset \{f \in \mathcal{C}^b(X) : \|f\|_X \leq r\} .$$

D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $A_n \in \mathcal{P}$ et $r_n > 0$ tels que

$$V_n \supset \{f \in \mathcal{C}^b(X) : \|f\|_{A_n} \leq r_n\} .$$

Comme $V_n \supset \theta$, on peut exiger que r_n soit supérieur ou égal à r car, si $f \in \mathcal{C}^b(X)$ est tel que $\|f\|_{A_n} \leq r$, on a

$$f = \theta_r \circ f + (f - \theta_r \circ f) \in \theta + \varepsilon V_n \subset (1+\varepsilon)V_n$$

quel que soit $\varepsilon > 0$ et on en déduit que f appartient à V_n car V_n est fermé et absolument convexe.

D'où la conclusion car, au total, on a

$$\theta = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f \in \mathcal{C}^b(X) : \|f\|_{A_n} \leq r\} = \{f \in \mathcal{C}^b(X) : \|f\|_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n} \leq r\} .$$

THEOREME 3.-

a) <u>L'espace</u> $C^b_{\mathcal{P}}(X)$ <u>est</u> d-<u>tonnelé si et seulement si</u> $\mathcal{P}$ <u>contient les unions dénombrables de ses éléments</u>.

b) <u>L'espace</u> d-<u>tonnelé associé à</u> $C^b_{\mathcal{P}}(X)$ <u>est</u> $C^b_{\mathcal{P}_d}(X)$, <u>où</u> $\mathcal{P}_d$ <u>désigne la famille des parties de</u> X <u>déterminée par les unions dénombrables d'éléments de</u> $\mathcal{P}$.

Preuve de a). La suffisance de la condition résulte aussitôt de la Proposition 1.

La condition est nécessaire. De fait, si les A_n ($n \in \mathbb{N}$) appartiennent à $\mathcal{P}$,

$$\theta = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f \in \mathcal{C}^b(X) : \|f\|_{A_n} \leq 1\} = \{f \in \mathcal{C}^b(X) : \|f\|_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} \leq 1\}$$

est un d-tonneau de $C^b_{\mathcal{P}}(X)$. Si $C^b_{\mathcal{P}}(X)$ est d-tonnelé, il existe donc $A \in \mathcal{P}$ et $r > 0$ tels que

$$\theta \supset \{f \in \mathcal{C}^b(X) : \|f\|_A \leq r\} \quad .$$

La conclusion résulte alors du lemme suivant.

LEMME.- _Soient_ $A, A' \subset X$ _et_ $r, r' > 0$. _On a_

$$\{f \in \mathcal{C}^b(X) : \|f\|_A \leq r\} \supset \{f \in \mathcal{C}^b(X) : \|f\|_{A'} \leq r'\}$$

si et seulement si $A \subset \overline{A'}$ _et_ $r \geq r'$.

Preuve du lemme. La condition est évidemment suffisante.

Elle est nécessaire. D'une part, on a $A \subset \overline{A'}$ car sinon, si $x \in A \backslash \overline{A'}$, il existe $f \in \mathcal{C}^b(X)$ tel que $f(\overline{A'}) = 0$ et $f(x) = r+1$, d'où une contradiction. Cela étant, il est immédiat qu'on doit avoir $r \geq r'$.

Preuve de b). Vu a), le système de semi-normes de l'espace d-tonnelé associé à $C^b_{\mathcal{P}}(X)$ est plus fort que celui de $C^b_{\mathcal{P}_d}(X)$.

Pour conclure, il suffit de prouver que $C^b_{\mathcal{P}_d}(X)$ est d-tonnelé, ce qui est immédiat, par application de a).

c) ESPACES $C^b_{\mathcal{P}}(X)$ ET σ-TONNELAGE

Remarquons que toute fonctionnelle linéaire continue $\mathcal{T}$ sur $C^b_{\mathcal{P}}(X)$ est continue sur $C^b(X)$, donc peut être interprétée comme étant une mesure de Radon sur βX. En particulier, $\mathcal{T}$ admet un support compact $[\mathcal{T}]$ dans βX tel que $[c\mathcal{T}] = [\mathcal{T}]$ pour tout nombre complexe $c \neq 0$ et pour lequel il existe $C > 0$ tel que

$$|\mathcal{T}(f)| \leq C \, \|f\|_{[\mathcal{T}]} \; , \; \forall \, f \in C^b_{\mathcal{P}}(X) \quad .$$

De plus, $[\mathcal{T}]$ est le plus petit fermé F de βX tel que $\mathcal{T}(f)$ soit nul pour tout $f \in C^b_{\mathcal{P}}(X)$ nul sur F.

THEOREME 4.-

a) L'espace $C^b_{\mathcal{P}}(X)$ est σ-tonnelé si et seulement si, pour toute suite $\mathcal{T}_n \in [C^b_{\mathcal{P}}(X)]^*$, $\|\cdot\|_{\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}[\mathcal{T}_n]}}$ est une semi-norme continue sur $C^b_{\mathcal{P}}(X)$.

b) L'espace σ-tonnelé associé à $C^b_{\mathcal{P}}(X)$ est l'espace $C^b_{\mathcal{P}'}(\beta X)$, où $\mathcal{P}'$ est la famille des parties de βX déterminée par $\mathcal{P}$ et les unions dénombrables de supports d'éléments de $[C^b_{\mathcal{P}}(X)]^*$.

Preuve de a). La condition est nécessaire. Soit une suite $\mathcal{T}_n \in [C^b_{\mathcal{P}}(X)]^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un nombre complexe $c_n \neq 0$ tel que

$$|c_n\mathcal{T}_n(f)| \leq \|f\|_{[\mathcal{T}_n]} \quad , \ \forall \ f \in C^b_{\mathcal{P}}(X) \quad .$$

De là, la suite $c_n\mathcal{T}_n$ est bornée dans $[C^b_{\mathcal{P}}(X)]^*_s$, donc est équicontinue : il existe $A \in \mathcal{P}$ et $C > 0$ tels que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |c_n\mathcal{T}_n(f)| \leq C \ \|f\|_A \quad , \ \forall \ f \in C^b_{\mathcal{P}}(X) \quad .$$

On en déduit immédiatement que

$$[\mathcal{T}_n] = [c_n\mathcal{T}_n] \subset \overline{A}^{\beta X} \quad , \ \forall \ n \in \mathbb{N} \quad ,$$

d'où la conclusion.

La condition est suffisante. Soit $\mathcal{T}_n$ une suite bornée de $[C^b_{\mathcal{P}}(X)]^*_s$ et posons

$$X' = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} [\mathcal{T}_n]}^{\beta X} \quad ,$$

l'adhérence étant prise dans βX. On sait donc que $\|\cdot\|_{X'}$ est une semi-norme continue sur $C^b_{\mathcal{P}}(X)$. Cela étant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on voit aisément qu'on peut définir une fonctionnelle linéaire $\mathcal{T}'_n$ sur $\mathcal{C}^b(X')$ par

$$\mathcal{T}'_n(f) = \mathcal{T}_n(\tilde{f}) \quad , \ \forall \ f \in \mathcal{C}^b(X') \quad ,$$

où $\tilde{f}$ désigne un prolongement continu et borné de f à βX. De plus, de façon immédiate, les $\mathcal{T}'_n$ sont continus sur $C^b(X')$ et constituent même une suite bornée de $[C^b(X')]^*_s$. Comme $C^b(X')$ est un espace de Banach, la suite $\mathcal{T}'_n$ est équicontinue : il existe $C > 0$ tel que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\mathcal{T}'_n(f)| \leq C \, \|f\|_{X'} \quad , \forall f \in C^b(X') \quad .$$

D'où la conclusion car, de cette dernière majoration, on déduit aisément une majoration analogue pour les $\mathcal{T}_n$ dans $C^b_{\mathcal{P}}(X)$.

Preuve de b). Vu a), le système de semi-normes de l'espace σ-tonnelé associé à $C^b_{\mathcal{P}}(X)$ est plus fort que celui de $C^b_{\mathcal{P}'}(X)$.

Pour conclure, il suffit donc de prouver que l'espace $C^b_{\mathcal{P}'}(X)$ est σ-tonnelé et, pour ce faire, vu a), il suffit d'établir que, pour tout $\mathcal{T} \in [C^b_{\mathcal{P}'}(X)]^*$, il existe une suite $\mathcal{T}_n \in [C^b_{\mathcal{P}}(X)]^*$ telle que

$$[\mathcal{T}] \subset \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} [\mathcal{T}_n]}^{\beta X} \quad .$$

Soit $\mathcal{T} \in [C^b_{\mathcal{P}'}(X)]^*$. Par construction de $\mathcal{P}'$, il existe $A \in \mathcal{P}$, une suite $\mathcal{T}_n \in [C^b_{\mathcal{P}}(X)]^*$ et $C > 0$ tels que

$$|\mathcal{T}(f)| \leq C \sup \left(\|f\|_A \, , \|f\|_{\bigcup_{n=1}^{\infty}[\mathcal{T}_n]}\right) \, , \forall f \in C^b_{\mathcal{P}'}(X) \quad .$$

Comme $\mathcal{T} \in [C^b_{\mathcal{P}'}(X)]^*$, on a $\mathcal{T} \in [C^b(X)]^*$ et $\mathcal{T}$ peut donc être représenté par une mesure de Radon μ sur βX. Posons $\mu_1 = \mu_{\overline{A}^{\beta X}}$ et $\mu_2 = \mu - \mu_1$, où $\mu_{\overline{A}^{\beta X}}$ désigne la restriction de la mesure μ à l'ensemble $\overline{A}^{\beta X}$. Alors, μ_1 détermine une fonctionnelle linéaire $\mathcal{T}_0$ sur $C^b(X)$ telle que

$$|\mathcal{T}_0(f)| = \left|\int f \, d\mu_{\overline{A}^{\beta X}}\right| \leq V\mu(\overline{A}^{\beta X}) \, . \, \|f\|_{\overline{A}^{\beta X}} \, , \forall f \in C^b(X) \quad ,$$

c'est-à-dire que $\mathcal{T}_0$ appartient à $[C^b_{\mathcal{P}}(X)]^*$. De là, il vient

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}(f)| = \left|\int f \, d\mu\right| &\leq \left|\int f \, d\mu_1\right| + \left|\int f \, d\mu_2\right| \\ &\leq V\mu(\overline{A}^{\beta X}) \, . \, \|f\|_{[\mathcal{T}_0]} + V\mu(\beta X \setminus \overline{A}^{\beta X}) \, . \, \|f\|_{\bigcup_{n=1}^{\infty}[\mathcal{T}_n]} \\ &\leq V\mu(\beta X) \, . \, \|f\|_{\bigcup_{n=0}^{\infty}[\mathcal{T}_n]} \quad , \end{aligned}$$

pour tout $f \in C^b(X)$, car on a $[\mu] \subset \overline{A \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [\tau_n]\right)}^{\beta X}$ et

$$\overline{A \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [\tau_n]\right)}^{\beta X} \setminus \overline{A}^{\beta X} \subset \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} [\tau_n]}^{\beta X} .$$

D'où la conclusion.

5.- Avant d'aborder les propriétés d'avaluabilité, de d-évaluabilité et de σ-évaluabilité de $C_p^b(X)$, voici quelques résultats concernant les espaces linéaires à semi-normes.

PROPOSITION 2.- *Soit* E *un espace linéaire à semi-normes.*

a) *Si* F *est un sous-espace linéaire de* E, $\theta \cap F$ *est un tonneau* (resp. d-*tonneau* ; σ-*tonneau*) *de* F *pour tout tonneau* (resp. d-*tonneau* ; σ-*tonneau*) θ *de* E. *De plus*, $\theta \cap F$ *est bornivore dans* F *si* θ *est bornivore dans* E.

b) *Si* F *est un sous-espace linéaire dense dans* E *et si* F *est tonnelé* (resp. d-*tonnelé* ; σ-*tonnelé* ; *évaluable* ; d-*évaluable* ; σ-*évaluable*), E *est tonnelé* (resp. d-*tonnelé* ; σ-*tonnelé* ; *évaluable* ; d-*évaluable* ; σ-*évaluable*).

Preuve. La démonstration de l'énoncé a) est immédiate. Celle de b) se déduit aisément de a).

En effet, par exemple, si F est tonnelé et si θ est un tonneau de E, $\theta \cap F$ est un tonneau de F : il existe donc une semi-norme p de E et $r > 0$ tels que

$$\{f \in F : p(f) \leq r\} \subset \theta \cap F \subset \theta .$$

On en déduit immédiatement que

$$\{f \in E : p(f) \leq r\} \subset \theta$$

car θ est fermé et F dense dans E.

Voici une réciproque partielle du cas b) de la Proposition 2.

PROPOSITION 3.- *Soit* F *un sous-espace linéaire de* E *tel que, pour tout borné* B *de* E, *il existe un borné de* F *dont l'adhérence dans* E *contient* B. *Alors l'adhérence dans* E *de tout tonneau bornivore de* F *est un tonneau bornivore de* E.

De là, F est évaluable (resp. d-évaluable ; σ-évaluable) si et seulement si E l'est.

Preuve. Soit θ un tonneau bornivore de F et désignons par $\overline{\theta}$ son adhérence dans E. Bien sûr, $\overline{\theta}$ est fermé et absolument convexe dans E. Prouvons qu'il est bornivore dans E. De fait, si B est un borné de E et si B' est un borné de F dont l'adhérence $\overline{B'}$ dans E contient B, il existe $r > 0$ tel que $B' \subset r\theta$, donc tel que $B \subset \overline{B'} \subset r\overline{\theta}$.

Vu le cas b) de la Proposition 2, comme F est notamment dense dans E, il suffit pour conclure de noter les points suivants.

Si E est évaluable, tout tonneau bornivore θ de F a pour adhérence $\overline{\theta}$ dans E un tonneau bornivore de E : $\overline{\theta}$ contient donc une semi-boule b de E, d'où la conclusion car alors $\theta = \overline{\theta} \cap F \supset b \cap F$.

Si E est d-évaluable, soit θ un d-tonneau bornivore de F. Il s'écrit donc

$$\theta = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f \in F : p_n(f) \leq r_n\} ,$$

les p_n étant des semi-normes continues sur E et les r_n étant strictement positifs. Vu ce qui précède, nous savons que l'adhérence $\overline{\theta}$ de θ dans E est un tonneau bornivore. Comme, en outre, on a

$$\overline{\theta} \subset \theta' = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f \in E : p_n(f) \leq r_n\} ,$$

θ' est un d-tonneau bornivore de E, donc contient une semi-boule b de E, d'où la conclusion car alors $\theta = \theta' \cap F \supset b \cap F$.

Si E est σ-évaluable, il suffit de procéder comme dans le cas d-évaluable.

REMARQUE.- Les hypothèses de la Proposition 3 ne suffisent pas pour obtenir que E tonnelé (resp. d-tonnelé ; σ-tonnelé) implique que F soit tonnelé (resp. d-tonnelé ; σ-tonnelé).

Ainsi, $E = L_1^{loc}(\mathbb{R})$ est un espace de Fréchet et $F = L_1(\mathbb{R})$ muni des semi-normes induites par E n'est même pas un espace σ-tonnelé car les fonctionnelles

$$\mathcal{T}_n(f) = \int_n^{n+1} f(x)\, dx \ , \ n \in \mathbb{N} ,$$

constituent une suite bornée de F_s^*, qui n'est pas équicontinue dans F.

Il est possible d'adapter la démonstration de la Proposition 3 pour passer au cas des espaces évaluable, d-évaluable et σ-évaluable associés.

PROPOSITION 4.- Soit E_P un espace évaluable et soit P' un système de semi-normes sur E plus faible que P.

Si F est un sous-espace linéaire de E tel que, pour tout borné B de $E_{P'}$, il existe un borné de $F_{P'}$ dont l'adhérence dans E_P contienne B, alors

a) $E_{P'}$ est évaluable si et seulement si $F_{P'}$ l'est.

b) $E_{P''}$ est l'espace évaluable associé à $E_{P'}$ si et seulement si $F_{P''}$ est l'espace évaluable associé à $F_{P'}$.

Cet énoncé est encore valable si on y remplace partout évaluable par d-évaluable (resp. σ-évaluable).

Preuve. La partie a) est en fait un cas particulier de la Proposition 3 car $\overline{A}^{E_P} \subset \overline{A}^{E_{P'}}$ pour toute partie A de F.

Etablissons b). Soit $E_{P''}$ l'espace évaluable (resp. d-évaluable ; σ-évaluable) associé à $E_{P'}$. Comme tout borné de $E_{P''}$ est borné dans $E_{P'}$ et que $\overline{A}^{E_P} \subset \overline{A}^{E_{P''}}$ pour toute partie A de F, la Proposition 3 affirme que $F_{P''}$ est évaluable (resp. d-évaluable ; σ-évaluable).

Soit à présent $F_{P'''}$ l'espace évaluable (resp. d-évaluable ; σ-évaluable) associé à $F_{P'}$. Bien sûr, on a $P' \leq P''' \leq P''$ sur F et, comme F est dense dans E_P, on peut considérer P''' comme étant un système de semi-normes sur E intermédiaire entre P' et P''. Or le cas b) de la Proposition 2 montre alors que $E_{P'''}$ est évaluable (resp. d-évaluable ; σ-évaluable) : on a donc $P''' \simeq P''$ sur E, d'où la conclusion.

6.- ESPACES $C_P^b(X)$ ET EVALUABILITE, d-EVALUABILITE ET σ-EVALUABILITE

L'application des résultats du paragraphe précédent est immédiate à partir de la notion d'espaces complexes modulaires et de la Proposition 6 qui suit. En ce qui concerne les espaces complexes modulaires, nous renvoyons à [7] (cf. pp. 349-364) ; ce sont les espaces linéaires à semi-normes E munis d'une relation d'ordre $\geq$ telle que

– toute combinaison linéaire à coefficients positifs d'éléments ≥ 0

soit ≥ 0 ,

– si $f \geq 0$ et $-f \geq 0$, alors $f = 0$,

– tout $f \in E$ admette une représentation unique $\mathcal{R}f + i\mathcal{I}f$, où $\mathcal{R}f$ et $\mathcal{I}f$ sont réels, c'est-à-dire combinaisons linéaires à coefficients réels d'éléments ≥ 0 ,

– pour tout $f \in E$, il existe un module $|f| \geq 0$ tel que $|f| = f$ si f est ≥ 0, et que $|f| = |\mathcal{R}f - i\mathcal{I}f|$, $|cf| = |c|\,|f|$ et $|f+g| \leq |f| + |g|$ quels que soient $f,g \in E$ et $c \in \mathbb{C}$,

– il existe un système de semi-normes P sur E équivalent à celui de E tel que $p(f) \leq p(g)$ pour tout $p \in P$ et tous $f,g \in E$ tels que $|f| \leq |g|$ (cf. [7], § 12, p. 363).

PROPOSITION 5.- Si l'espace $C_P(X)$ est complexe modulaire pour l'ordre naturel de $\mathscr{C}(X)$, P est plus faible que le système des semi-normes de $C_c(\upsilon X)$.

Preuve. On sait (cf. [6]) que $C_c(\upsilon X)$ est la limite inductive des espaces de Banach $\mathscr{C}(X)_{\Delta(f)}$ pour $f \in \mathscr{C}(X)$, $\mathscr{C}(X)_{\Delta(f)}$ étant l'enveloppe linéaire de

$$\Delta(f) = \{g \in \mathscr{C}(X) : |g| \leq |f|\}$$

munie de la jauge déterminée par $\Delta(f)$.

C'est alors immédiat car, vu la dernière partie de la définition des espaces complexes modulaires, les semi-boules de $C_P(X)$ absorbent $\Delta(f)$ quel que soit $f \in \mathscr{C}(X)$.

PROPOSITION 6.- Soit $C_P(X)$ un espace complexe modulaire pour l'ordre naturel de $\mathscr{C}(X)$. Alors, pour tout borné B de $C_P(X)$, il existe B' de $C_P^b(X)$ dont l'adhérence dans $C_c(\upsilon X)$, donc dans $C_P(X)$, contient B.

Preuve. La dernière partie de la définition des espaces complexes modulaires montre que

$$B' = \{\theta_n \circ f : f \in B \;,\; n \in \mathbb{N}\}$$

est borné dans $C_P^b(X)$, vu que $|\theta_n \circ f| \leq |f|$ pour tout $f \in C_P(X)$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

En outre, on voit aisément que, pour tout $f \in \mathscr{C}(X)$, la suite $\theta_n \circ f$ converge vers f dans $C_c(\upsilon X)$ et, a fortiori, dans $C_P(X)$ vu la Proposition 5.

D'où la conclusion.

THEOREME 5.- Si $C_P(X)$ est un espace complexe modulaire pour l'ordre naturel de $\mathscr{C}(X)$,

a) $C_P(X)$ est évaluable (resp. d-évaluable ; σ-évaluable) si et seulement si $C_P^b(X)$ l'est.

b) $C_{P'}(X)$ est l'espace évaluable (resp. d-évaluable ; σ-évaluable) associé à $C_P(X)$ si et seulement si $C_{P'}^b(X)$ est l'espace évaluable (resp. d-évaluable ; σ-évaluable) associé à $C_P^b(X)$.

Preuve. Comme l'espace $C_c(\upsilon X)$ est ultrabornologique (cf. [6]), c'est une conséquence immédiate des Propositions 4, 5 et 6.

THEOREME 6.- Si $C_P^b(X)$ a un système de semi-normes plus fort que celui de $C_s^b(X)$ et a les mêmes bornés que $C^b(X)$, $C^b(X)$ est l'espace évaluable associé à $C_P^b(X)$.

Preuve. D'une part, tout voisinage de 0 dans $C_P^b(X)$ absorbe tout borné de $C^b(X)$, donc contient un multiple de la boule unité de $C^b(X)$.

D'autre part, la boule unité fermée de $C^b(X)$ est un tonneau de $C_s^b(X)$, donc de $C_P^b(X)$, bornivore dans $C^b(X)$.

REMARQUE.- L'espace $C_P^b(X)$ a les mêmes bornés que $C^b(X)$ notamment dans les deux cas suivants :

– P est le système des semi-normes de la convergence uniforme sur les parties dénombrables de X ,

– P est le système des semi-normes strictes p_φ définies par

$$p_\varphi(f) = \sup_{x\in X} |\varphi(x)f(x)| \quad , \ \forall\ f \in \mathscr{C}^b(X) \quad ,$$

où φ parcourt la famille des fonctions bornées sur X qui tendent vers 0 à l'infini (c'est-à-dire telles que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K_ε de X tel que $|\varphi(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in X\backslash K_\varepsilon$).

7.- En faisant intervenir les espaces complexes modulaires, on peut obtenir un résultat analogue à la Proposition 4, concernant la propriété de bornologie.

PROPOSITION 7.- Si E_P et $E_{P'}$ sont des espaces complexes modulaires pour la même relation d'ordre, si P' est plus faible que P sur E, si E_P est bornologique et si F est un sous-espace linéaire de E tel que l'adhérence dans E_P de

$$B_f = \{g \in F : |g| \leq |f|\}$$

contienne f quel que soit $f \in E$, alors

a) $E_{P'}$ est bornologique si et seulement si $F_{P'}$ l'est ,

b) $E_{P''}$ est l'espace bornologique associé à $E_{P'}$ si et seulement si $F_{P''}$ est l'espace bornologique associé à $F_{P'}$.

Preuve. Il suffit évidemment d'établir b).

Soit $E_{P''}$ l'espace bornologique associé à $E_{P'}$. Comme les bornés de $E_{P'}$ et de $E_{P''}$ coïncident et qu'on a $P' \leq P'' \leq P$ sur E, pour tout borné B de $E_{P''}$, $B' = \bigcup_{f \in B} B_f$ est un borné de $F_{P''}$ dont l'adhérence dans E_P , donc dans $E_{P''}$, contient B. Vu la Proposition 3, $F_{P''}$ est donc évaluable.

Pour prouver que $F_{P''}$ est bornologique, il suffit alors d'établir que toute fonctionnelle linéaire sur F et bornée sur les bornés de $F_{P''}$ est continue sur $F_{P''}$. Soit σ une telle fonctionnelle. On sait alors que σ est combinaison linéaire de fonctionnelles linéaires positives sur F [c'est-à-dire telles que $\sigma(f) \geq 0$ pour tout $f \geq 0$] et bornée sur les bornés de $F_{P''}$. On est ainsi ramené au cas où, en outre, σ est positif. On peut alors étendre σ au cône K des éléments ≥ 0 de E par

$$\tau(f) = \sup_{f \in B_f} \sigma(g) \ , \ \forall f \in K \ .$$

Ce prolongement τ satisfait alors aux conditions requises pour être la restriction d'une fonctionnelle $\tilde{\sigma}$ linéaire positive et bornée sur les bornés de $E_{P''}$. De là, $\tilde{\sigma}$ est continu sur $E_{P''}$ et sa restriction σ à F est donc continue sur $F_{P''}$.

Soit, à présent, $F_{P'''}$ l'espace bornologique associé à $F_{P'}$. Vu ce qui précède, on a $P' \leq P''' \leq P'' \leq P$ sur F. Soit alors $\tilde{P}'''$ le système de semi-normes qui prolonge P''' à E de telle sorte que $P' \leq \tilde{P}''' \leq P'' \leq P$. Pour conclure, il suffit de prouver qu'on a $\tilde{P}''' \simeq P''$ sur E ou, ce qui revient au même que $E_{\tilde{P}'''}$ est bornologique.

Tout d'abord, $E_{\tilde{P}'''}$ est évaluable vu la Proposition 4 et le fait que les bornés de $E_{\tilde{P}'''}$ et de $E_{P'}$ coïncident car ceux de $E_{P''}$ et de $E_{P'}$ le font.

Dès lors, $E_{\widetilde{P}''}$ est bornologique si toute fonctionnelle linéaire $\mathcal{T}$ sur E et bornée sur les bornés de $E_{\widetilde{P}''}$ est continue sur $E_{\widetilde{P}''}$. D'une part, $\mathcal{T}$ est évidemment continu sur $E_{P''}$. D'autre part, la restriction de $\mathcal{T}$ à F est bornée sur les bornés de $F_{P'}$, donc est continue sur $F_{P''}$ et admet un prolongement $\widetilde{\mathcal{T}}$ linéaire continu sur $E_{\widetilde{P}''}$. Pour conclure, il suffit alors de noter que F est dense dans $E_{P''}$.

8.- <u>ESPACES</u> $C_P^b(X)$ <u>ET BORNOLOGIE</u>

THEOREME 7.- <u>Si</u> $C_P(X)$ <u>est un espace complexe modulaire pour l'ordre naturel de</u> $\mathscr{C}(X)$,

a) $C_P(X)$ <u>est bornologique si et seulement si</u> $C_P^b(X)$ <u>l'est</u> ,

b) $C_{P'}(X)$ <u>est l'espace bornologique associé à</u> $C_P(X)$ <u>si et seulement si</u> $C_{P'}^b(X)$ <u>est l'espace bornologique associé à</u> $C_P^b(X)$.

<u>Preuve</u>. On sait que $C_c(\upsilon X)$ est un espace complexe modulaire pour l'ordre naturel de $\mathscr{C}(X)$, que P est plus faible que le système de semi-normes de $C_c(\upsilon X)$ par la Proposition 5 et que $C_c(\upsilon X)$ est ultrabornologique. De plus, il est immédiat que, pour tout $f \in \mathscr{C}(X)$, l'adhérence dans $C_c(\upsilon X)$ de $\{g \in \mathscr{C}^b(X) : |g| \leq |f|\}$ contient f. La Proposition 7 permet alors de conclure.

THEOREME 8.- <u>Si</u> $C_P^b(X)$ <u>a les mêmes bornés que</u> $C^b(X)$, $C^b(X)$ <u>est l'espace bornologique associé à</u> $C_P^b(X)$.

<u>Preuve</u>. C'est immédiat car $C^b(X)$ est un espace de Banach, donc bornologique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. BUCHWALTER, Parties bornées d'un espace topologique complètement régulier. Séminaire Choquet, 9 (1969-1970), n°14, 15 pages.

[2] H. BUCHWALTER, Sur le théorème de Nachbin-Shirota, J. Math. Pures et Appl., 51 (1972), 399-418.

[3] H. BUCHWALTER - K. NOUREDDINE, Topologies localement convexes sur les espaces de fonctions continues. C.R. Acad. Sc. Paris, 274A (1972), 1931-1934.

[4] H. BUCHWALTER - J. SCHMETS, Sur quelques propriétés de l'espace $C_s(T)$. J. Math. Pures et Appl., à paraître.
Voir aussi : C.R. Acad. Sc. Paris, 274A (1972), 1300-1303.

[5] M. DE WILDE - C. HOUET, On increasing sequences of absolutely convex sets in locally convex spaces. Math. Ann., 192 (1971), 257-261.

[6] M. DE WILDE - J. SCHMETS, Caractérisation des espaces C(X) ultrabornologiques. Bull. Soc. Roy. Sc. Liège, 40 (1971), 119-121.

[7] H.G. GARNIR - M. DE WILDE - J. SCHMETS, Analyse fonctionnelle, I, Birkhäuser Verlag, Basel, 1968.

[8] T. HUSAIN, Two new classes of locally convex spaces. Math. Ann., 166 (1966), 289-299.

[9] Y. KOMURA, On linear topological spaces. Kumamoto J. of Sc., 5A (1962), 148-157.

[10] K. NOUREDDINE, L'espace infratonnelé associé à un espace localement convexe. C.R. Acad. Sc. Paris, 174A (1972), 1821-1823.

[11] K. NOUREDDINE - J. SCHMETS, Espaces associés à un espace localement convexe et espaces de fonctions continues. Bull. Soc. Roy. Sc. Liège, à paraître.

J. SCHMETS
Institut de Mathématique
Université de Liège
Avenue des Tilleuls, 15
B-4000 LIEGE / BELGIQUE.