PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

MARC ROGALSKI

Sur les espaces uniformément fermés de fonctions à variation bornée

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1973, tome 10, fascicule 4
, p. 67-79

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1973__10_4_67_0>

II$^{\text{ème}}$ - Coll. Anal. Fonct.
(1973, Bordeaux)
p. 345-357

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1973 t.10-4

SUR LES ESPACES UNIFORMEMENT FERMES DE FONCTIONS A VARIATION BORNEE.

par Marc ROGALSKI

RESUME. Cet exposé développe des travaux de G. Mokobodzki et de l'auteur parus dans [4] . On montre que tout sous-espace uniformément fermé de $C([0,1])$, formé de fonctions à variation bornée, est de dimension finie. On donne un résultat d'existence d'une majoration de la dimension dans certains cas.

I. INTRODUCTION, NOTATIONS et RAPPELS .-

Le résultat suivant est classique :

PROPOSITION 0 .- Soit H un sous-espace fermé en norme uniforme de $C([0,1])$. Si H est formé de fonctions de classe C^1, alors H est de dimension finie.

Rappelons la démonstration : Le théorème du graphe fermé montre que l'application $d : H \to C([0,1]) : f \rightsquigarrow f'$ est continue. Il en résulte que la boule unité B_H de H est équicontinue, donc compacte, et H est de dimension finie.

Nous nous proposons d'étendre ce résultat au cas où H est formé de fonctions absolument continues ou même à variation bornée. De plus, dans le cas où les "dérivées" des fonctions de H sont toutes dans un espace L^p, pour un même $p > 1$, nous donnerons un théorème d'existence d'une majoration de la dimension de H.

NOTATIONS :

- C désigne l'espace $C([0,1])$.

- VBC désigne l'espace des fonctions continues à variation bornée sur $[0,1]$. Si f appartient à VBC, nous désignerons par df la mesure de Stieltjes associée à f, et la nommerons "variation" de f; c'est une mesure diffuse sur $[0,1]$.
- $W^{1,p}$ désigne l'espace des fontions continues presque partout dérivables, primitives de leur dérivée, et à dérivée dans $L^p (1 \leqslant p \leqslant +\infty)$.

  On a les inclusions : $C^1 \subset W^{1,\infty} \subset W^{1,p} \subset W^{1,1} \subset VBC \subset C$
- M désigne l'espace des mesures de Radon sur $[0,1]$.
- L^p désigne l'espace classique associé à la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$.
- $L^p(\mu)$ désigne l'espace analogue pour une mesure positive sur $[0,1]$.

Si H est un sous-espace de C, nous noterons B_H sa boule unité.

Pour les résultats de base sur les fonctions de $W^{1,p}$ et VBC, on pourra se reporter à [5].

II- DISTANCE DE HAUSDORFF, GRASMANNIENNE D'UN ESPACE DE BANACH.

Soit (X,d) un espace métrique, de distance bornée. Sur l'ensemble $\mathcal{F}$ des fermés non vides de X, on définit la distance δ par l'expression

$$\delta(A,B) = \operatorname{Sup}\left[\operatorname*{Sup}_{x \in A} d(x,B), \operatorname*{Sup}_{y \in B} d(y,A)\right].$$

On montre que $(\mathcal{F}, \delta)$ est complet [resp: précompact, compact] si et seulement si (X,d) l'est lui-même. (cf.[0])

Soit alors E un espace de Banach muni de la distance d associée à sa norme. On note $\hat{\mathcal{G}}(E)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels fermés de E, et on identifie cet ensemble avec l'ensemble des traces de ses élements sur la boule unité B de E, c'est à dire qu'on a $\hat{\mathcal{G}}(E) \subset \mathcal{F}(B)$. Dé même, on peut considérer que $\hat{\mathcal{G}}(E)\setminus\{\{0\}\} \subset \mathcal{F}(S)$ (où S est la spère unité de E). On peut alors montrer que

$\hat{\mathcal{G}}(E)$ est fermé dans $\mathcal{F}(B)$, donc complet pour la distance δ sur $\mathcal{F}(B)$ associée à d. On appellerera <u>prégrasmannienne</u> de E l'espace métrique complet ainsi obtenu.

On obtient alors le résultat important suivant , qui nous servira dans la suite :

<u>LEMME 1 .-</u> L'ensemble $\mathcal{G}_n$ des sous-espaces de dimension n de E est ouvert dans $\hat{\mathcal{G}}(E)$; l'ensemble $\mathcal{G}(E)$ des sous-espaces fermés de E possédant un supplémentaire topologique dans E est aussi ouvert dans $\hat{\mathcal{G}}(E)$.

L'ensemble $\mathcal{G}(E)$ s'appelle <u>la grasmannienne de E</u>. Pour plus de détails sur l'étude de la prégrasmannienne et de la grasmannienne d'un espace de Banach, on pourra se reporter à [1] .

III- SOUS-ESPACE DE $W^{1,p}$ UNIFORMEMENT FERMES, POUR $p > 1$.

<u>PROPOSITION 2</u> .- Tout sous-espace uniformément fermé de $W^{1,p}$ pour $p > 1$, est de dimension finie.

La démonstration est presque identique à celle de la proposition 0, l'équicontinuité de B_H se démontrant par l'inégalité de Hölder: $|f(x+h) - f(x)| \leq \|f'\|_p h^{1/q}$ (il s'agit en fait d'un cas particulier d'un résultat sur les espaces uniformément fermés de fonctions höldéniennes). On voit par le théorème du graphe fermé que l'application $d : H \to L^p : f \rightsquigarrow f'$ est continue; donc il existe une constante K telle que $\|f'\|_p \leq K\|f\|_\infty$ pour toute f de H. Nous allons voir que si K est fixé, la dimensions de H ne peut être arbitrairement grande.

<u>DEFINITION 3 .-</u> Pour $p \geq 1$ et $K \geq 1$ on définit

$$\mathcal{O}_{K,p} = \{f \in W^{1,p} \mid \|f'\|_p < K\|f\|_\infty\} ,$$

puis on pose

$$\varphi(K,p) = \mathrm{Sup}\{\dim(H) \mid H \text{ sous-espace fermé de } C, H \subset \mathcal{O}_{K,p}\}$$

Le nombre $\varphi(K,p)$ est un entier fini ou infini. Il est évident que la fonction $(K,p) \rightsquigarrow \varphi(K,p)$ est croissante en K et décroissante en p.

THEOREME 4 .- Si $p > 1$, on a $\varphi(K,p) < +\infty$

Notons S la sphère unité de C, et si H est un sous-espace de C notons S_H la sphère unité de H. Le théorème 4 résulte du lemme suivant :

LEMME 5 .- Soit R un ensèmble équicontinu de S. Alors on a

$$\operatorname{Sup}\{\dim (H) \mid H \text{ sous-espace fermé de } C, S_H \subset R\} < \infty .$$

Ce lemme dépend du théorème d'Ascoli et de résultats élémentaires sur la prégrasmannienne de l'espace de Banach C. Précisemment la prégrasmannienne $\mathcal{G}$ de C étant l'espace métrique des sous-espaces fermés quelconques de C, le sous-ensemble $\mathcal{G}_n$ de $\mathcal{G}$ formé par les espaces de dimension n est un ouvert de $\mathcal{G}$ (Lemme 1). L'ensemble R étant relativement compact, l'ensemble correspondant R' de $\mathcal{G}$ (formé des H tels que $S_H \subset \overline{R}$) est compact, et inclus dans la réunion des $\mathcal{G}_n$. On conclut par le théorème de Borel-Lebesgue.

COROLLAIRE 6 .- Lorsque $K \to +\infty$, $\varphi(K,p) \to +\infty$ $(p > 1)$.

PROBLEME 7 .- Soit $K \geq 1$. La quantité $O(K) = \lim\limits_{\substack{p \to 1 \\ p > 1}} \varphi(K,p)$ est-elle finie ?

Si oui, peut-on évaluer la borne supérieure des nombres p tels que $\varphi(K,p) = O(K)$?

Sinon, que peut-on dire de la suite $p_n(K)$ définie par la relation: $\varphi(K,p) = n$ si $p \in]p_{n+1}(K), p_n(K)[$?

Une direction possible pour résoudre le problème 7 consiste à essayer d'évaluer numériquement le nombre $\varphi(K,p)$.

On peut obtenir des minorations en étudiant certains sous-espaces particuliers de VBC.

Un exemple : fonctions affines par morceaux.

Soit Δ une subdivision de $[0,1]$ en N intervalles consécutifs de longueur $l_1, l_2, \ldots l_n$; notons H_Δ l'espace des fonctions continues, affines sur chaque intervalle de Δ. Pour tout $p \geq 1$, H_Δ est inclus dans $W^{1,p}$, et sa dimension est $N + 1$. Soit $d_{\Delta,p}: H_\Delta \to L^p$

l'application dérivée. Un calcul d'extrémum élémentaire prouve que l'on a $\|d_{\Delta,p}\|$ minimum lorsque $\Delta = \Delta_0$, subdivision correspondant à $l_1 = l_2 = \dots l_n = \frac{1}{N}$. Et on trouve alors $\|d_{\Delta_0,p}\| = C(N,p) = 2N$

Pour qu'il existe un espace H_Δ (de dimension $N+1$) dans $\mathcal{O}_{K,p}$, il faut et il suffit donc que $\|d_{\Delta,p}\| \leqslant K$ pour une subdivision Δ. Pour cela il faut et il suffit que l'on ait $C(N,p) = 2N \leqslant K$, donc que $N \leqslant E\left(\frac{K}{2}\right)$. D'où la

PROPOSITION 8 .- Dès que $K \geqslant 2$, $\varphi(K,p) \geqslant E\left(\frac{K}{2}\right) + 1$.

REMARQUE 9 .- On peut montrer l'inégalité suivante, en utilisant les fonctions trigonométriques:

$$\varphi(K,p) \geqslant 1 + 2E\left(\frac{K}{1 + 4\pi\left[\frac{\Gamma^2\left(\frac{P+1}{2}\right)}{\pi\Gamma(P+1)}\right]^{\frac{1}{P}}}\right)$$

Malheureusement, quelques essais numériques semblent montrer que cette minoration de $\varphi(K,P)$ est inférieure à celle de la proposition 9.

IV- FONCTIONS A VARIATIONS BORNEES DONT LES VARIATIONS SONT DANS UN $L^P(\mu)$, $P > 1$.

PROPOSITION 10 .- Soit H un sous-espace fermé de C. Si H est inclus dans VBC, et si les variations df des fonctions f de H appartiennent toutes à un même espace $L^P(\mu)$, où $P > 1$ et μ appartient à M^+, alors $\dim(H) < +\infty$.

L'hypothèse que nous écrirons en abrégé : $d(H) \subset L^P(\mu)$, signifie que pour toute f de H, il existe φ_f de $L^P(\mu)$, unique, telle que $df = \varphi_f\, d\mu$. Il est facile de voir qu'on peut se ramener au cas où μ est diffuse (ne charge aucun point) car, les fonctions de H sont continues. On peut évidemment supposer μ de masse 1. On voit alors, par le théorème du graphe fermé, que l'application $f \to \varphi_f : H \to L^P(\mu)$, que nous noterons encore d, est continue.

Soit alors $f \in B_H$. On a :

$$|f(x+h)-f(x)| = \left|\int_x^{x+h} df\right| = \left|\int_x^{x+h} \varphi_f d\mu\right| \leq \|\varphi_f\|_P \left[\mu([x,x+h])\right]^{\frac{1}{q}} \leq K\left[\mu([x,x+h])\right]^{\frac{1}{q}}$$

et ceci tend vers 0 quand $h \to 0$, car μ est diffuse. B_H est donc équicontinue, et on achève comme à la proposition 0.

C.Q.F.D.

Dans le cas où $d(H) \subset L^P(\mu)$ (μ diffuse, $\mu \in M_1^+$), on peut étendre le théorème 4.

DEFINITION 11 .- Soit μ diffuse, $\mu \in M_1^+$. On pose, pour $P \geq 1$ et $K \geq 1$:

$$\mathcal{O}_{K,P,\mu} = \left\{ f \in VBC \mid df \in L^P(\mu), \text{ et } \|df\|_{L^P(\mu)} \leq K\|f\|_\infty \right\}.$$

Puis on définit :

$$\varphi(K,P,\mu) = \operatorname{Sup}\left\{ \dim(H) \mid H \text{ sous-espace fermé de } C,\ H \subset \mathcal{O}_{K,P,\mu} \right\}.$$

THEOREME 12 .- Si $P > 1$, on a $\varphi(K,P,\mu) < +\infty$.

La démonstration est exactement la même que celle du théorème 4.

On peut aussi, dans ce cas, poser le problème analogue au problème 7.

PROBLEME 13 .- A-t-on $\lim\limits_{P\to 1} \varphi(K,P,\mu) = +\infty$?

V- LE LEMME FONDAMENTAL.

Nous allons maintenant donner le lemme qui est la clé de la solution du problème général. Ce lemme est classique et du à Helly, mais nous incluons une démonstration pour la commodité du lecteur.

LEMME 14 .- Soit H un sous-espace fermé en norme uniforme de VBC. De toute suite de B_H, on peut extraire une sous-suite convergeant simplement partout vers une fonction à variation bornée (peut-être non continue).

DEMONSTRATION .- D'abord le théorème du graphe fermé montre, comme dans la démonstration de la proposition 0, que l'application $d : H \to M : f \to df$ est continue donc qu'il existe $K > 0$ tel que l'on ait ; $\|df\|_M \leq K\|f\|_\infty$.

Nous allons faire la démonstration dans le cas où les fonctions de H ne sont pas toutes nulles en 0(dans ce cas particulier, la démonstration se simplifierait légèrement).

Soit donc $f_n \in B_H$. Soit $\varphi \in H$, telle que $\varphi(0) = 1$. On peut écrire $f_n = f_n - f_n(0)\varphi + f_n(0)\varphi = g_n + f_n(0)\varphi$, où $g_n \in H_o$, et $\|g_n\| \leq 1 + \|\varphi\|_\infty$. Quitte a extraire une première sous-suite, on peut supposer que $f_n(0)$ converge vers une limite λ. Pour tout n, on a $\|dg_n\|_M \leq K(1+\|\varphi\|_\infty) = K'$. Donc on a aussi $\|(dg_n)^+\|_M \leq K'$ et $\|(dg_n)^-\|_M \leq K'$. Posons alors

$$g_n^1(x) = \int_o^x (dg_n)^+ \quad \text{et} \quad g_n^2(x) = \int_o^x (dg_n)^- .$$

Les fonctions $g_n^{(1)}$ et $g_n^{(2)}$ sont croissantes et comprises entre 0 et K'.

Rappelons alors le résultat classique suivant, dont la démonstration utilise deux fois le procédé diagonal :

LEMME 15 .- De toute suite (u_n) de fonctions croissantes sur $[0,1]$, à valeurs dans $[0,K']$, on peut extraire une sous-suite convergeant simplement partout vers une fonction croissante.

Donc, en appliquant ce lemme deux fois, on peut extraire une sous-suite d'entiers (n_p) telle que $g_{n_p}^{(1)} \to g_1$ et $g_{n_p}^{(2)} \to g_2$ simplement partout, g_1 et g_2 étant croissantes.

Alors il est clair que $f_{n_p} \to g_1 - g_2 + \lambda\varphi$ simplement partout, et cette fonction est évidemment à variation bornée.

C.Q.F.D.

On voit déjà, par ce lemme, que la boule unité d'un sous-espace uniformément fermé de VBC jouit déjà d'une propriété proche de la faible compacité.

Nous allons utiliser cette propriété pour montrer que $d(B_H)$ est faiblement relativement compacte dans M (pour $\sigma(M,M')$), par le théorème d'Eberlein. Nous déduirons de cette propriété, par un théorème de Grothendieck, une propriété d'uniforme intégrabilité dans un espace $L^1(\mu)$. Et, cette dernière condition par intégration, nous fournira l'equicontinuité de B_H, c'est à dire le résultat. Même dans le cas où H est inclus dans $W^{1,1}$, il est clair que la méthode de l'inégalité de Hölder, utilisée pour montrer la proposition 2, est inopérante.

VI- SOUS-ESPACES UNIFORMEMENT FERMES DE VBC.

THEOREME 16 .- Soit H un sous-espace uniformément fermé de VBC. Alors $\dim(H) < +\infty$.

DEMONSTRATION. Soit df_n une suite de $d(B_H)$. D'après le lemme 14 il existe une sous-suite f_{n_p} qui converge partout simplement vers une fonction f à variation bornée. Soit $\ell \in M'$. L'application $f \to <\ell,df>$ est continue sur H. Donc par le théorème de Hahn-Banach, il existe une mesure μ_ℓ de M telle que pour toute f de H on ait $<\ell,df> = \int f d\mu_\ell$

On a alors $<\ell,df_{n_p}> = \int f_{n_p} d\mu_\ell$, et cette quantité converge vers $\int f d\mu_\ell = \alpha$ d'après le théorème de Lebesgue. Donc la suite $<\ell,df_{n_p}>$ est de Cauchy pour toute ℓ de M', ce qui exprime que df_{n_p} est une suite de Cauchy faible dans M.

Or, on sait que M est séquentiellement faiblement complet. Donc df_{n_p} converge faiblement vers une mesure.

Donc, de toute suite df_n de $d(B_H)$, on a pu extraire une sous-suite df_{n_p} faiblement convergente. Il résulte alors du théorème d'Eberlein [2] que $d(B_H)$ est faiblement relativement compact dans M (pour $\sigma(M,M')$) puisqu'il est borné (car d est continue).

Un théorème de Grothendieck [2] affirme qu'il existe alors une mesure μ de M^+ telle que $d(B_H) \subset L^1(\mu)$, avec $d(B_H)$ faiblement relativement compacte dans $L^1(\mu)$ (pour $\sigma(L^1(\mu), L^\infty(\mu))$).

Toute mesure df de $d(B_H)$ s'écrit donc $df = \varphi_f d\mu$, où φ_f est dans $L^1(\mu)$, et l'ensemble des φ_f est faiblement relativement compacte dans $L^1(\mu)$. Il résulte du critère de Dunford et Pettis [2] que l'ensem-des φ_f est uniformément intégrable dans $L^1(\mu)$.

Soit alors f dans B_H. On a :

$$|f(x+h) - f(x)| = \left|\int_x^{x+h} df\right| = \left|\int_x^{x+h} \varphi_f d\mu\right| \leq \int_x^{x+h} |\varphi_f| d\mu$$

et cette dernière quantité est majorée par ε si $\mu([x,x+h]) < \varepsilon$ uniformément pour f dans B_H.

Si $\mu(\{x\}) = 0$, alors $\mu([x,x+h]) < y$ par $|h| < h_o$, et les fonctions de B_H sont équicontinues au point x. Si pour tout x, $\mu(\{x\}) = 0$, on peut alors conclure par les théorèmes d'Ascoli et de Riez.

Donc tout revient à montrer qu'on peut choisir μ diffuse. Or ceci se démontre facilement : on écrit $\mu = \mu_c + \mu_d$, où μ_d est la partie discrète de μ. Et il résulte aisément du fait que les mesures df sont diffuses, que les fonctions φ_f appartiennent à $L^1(\mu_c)$ et que l'ensemble de ces fonctions y est faiblement relativement compact.

C.Q.F.D.

Bien entendu on retrouve ainsi les propositions 2 et 10 .

Voici une application du théorème 16 aux sous-espaces fermés de $L^1([0,1])$.

<u>COROLLAIRE 17</u> .- Soit E un sous-espace fermé de L^1, de dimension infinie Alors le sous-espace H de $W^{1,1}$, formé des fonctions

$$f(x) = \int_o^x g(t)dt \quad ,$$

où g appartient à E, n'est pas fermé en norme uniforme, et son adhérence n'est pas incluse dans $W^{1,1}$.

Pourtant, la boule unité de E peut être faiblement compacte, puisqu'il existe des sous-espaces fermés de L^1 de dimension infinie qui sont réflexifs (car, par exemple, inclus dans L^2 ; cf.[3]).

Si H est un sous-espace uniformément fermé de VBC, l'application $d : H \to M$ est continue, donc il existe K tel que pour toute f de H on ait :

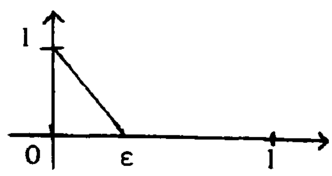
$$\|df\|_M \leqslant K\|f\|_\infty .$$

Et l'existence de cette constante K est la clé du lemme 14 et, finalement, de l'équicontinuité de B_H. Néanmoins, dans la démonstration du théorème 16, la structure vectorielle de H intervient fondamentalement pour affirmer que la forme linéaire $f \rightsquigarrow \langle \ell, df \rangle$ est bornée, donc continue, donc se prolonge en une mesure. Si on se pose alors le problème d'étendre le théorème 4 (ou le théorème 12), on est amené à définir, par exemple, l'ensemble suivant :

$$\mathcal{O}_{K,1} = \left\{ f \in W^{1,1} \mid \|f'\|_1 \leqslant K\|f\|_\infty \right\} .$$

Mais $\mathcal{O}_{K,1}$ n'est plus un espace vectoriel, et ne pouvant donc lui appliquer le raisonnement précedent, on ne pourra plus conclure que l'ensemble $U_{K,1} = \mathcal{O}_{K,1} \cap S$ est relativement compact dans S, c.à.d. équicontinu. Et d'ailleurs ceci est faux, comme le prouve l'exemple suivant :

EXEMPLE 18 .- On considère les fonctions f_ε de graphe ci-contre. Il est clair que les f_ε appartiennent à $U_{1,1}$, pourtant elles ne sont manifestement pas équicontinues.



Le problème suivant reste donc ouvert :

PROBLEME 19 .- Définissant $\varphi(K,1)$ par

$$\varphi(K,1) = \mathrm{Sup}\left\{\dim(H) \mid H \subset \mathcal{O}_{K,1},\ H \text{ fermé dans } C\right\},$$

a-t-on $\varphi(K,1) < +\infty$?

On peut poser le même problème en remplaçant $\mathcal{O}_{K,1}$ par l'ensemble

$\mathcal{V}_K = \{f \in VBC \mid \|df\|_M \leqslant K\|f\|_\infty\}$.On a néanmoins un résultat partiel (valable aussi pour $\mathcal{O}_{K,p}$, $P \geqslant 1$).

PROPOSITION 20 .- Soit $K \geqslant 1$. Soit $\mathcal{H}_K$ l'ensemble des sous-espaces fermés de C inclus dans $\mathcal{V}_K$. Alors $\mathcal{H}_K$ possède des éléments maximaux pour l'inclusion, et tout H de $\mathcal{H}_K$ est contenu dans l'un d'eux.

Cela résulte de ce que si H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{V}_K$, $\overline{H}$ est encore inclus dans $\mathcal{V}_K$(utiliser un raisonnement d'uniforme continuité, valable aussi dans $\mathcal{O}_{K,p}$, pour prolonger l'application d).

VII - GENERALISATIONS ?

Bien entendu,le théorème 16 subsiste pour des fonctions continues à variation bornée à valeurs vectorielles dans $\mathbb{R}^n$. Mais il devient évidemment faux, comme le montre l'exemple des fonctions constantes, pour des fonctions à valeurs dans un espace normé E de dimension infinie.D'ailleurs l'équicontinuité de la boule unité d'un sous-espace H uniformément fermé de $C([0,1],E)$, formé de fonctions à variation bornée, n'implique nullement la compacité en norme de cette boule B (car la réunion des $f([0,1])$, pour f dans B, n'est pas relativement compacte dans E).

La généralisation éventuelle serait alors la

CONJECTURE 20 .- Soit E un espace normé (ou de Banach) et H un sous-espace uniformément fermé de $C([0,1],E)$, formé de fonctions à variation bornée. Alors la boule unité de B de H est équicontinue.

Voici en tout cas un résultat plus faible :

PROPOSITION 21 .

Sous les hypothèses de la conjecture 20, soit E' le dual de E, muni de la norme duale. Alors la famille des applications
$\varphi_f : [0,1] \times E' \to \mathbb{R} : (t,\ell) \rightsquigarrow \varphi_f(t,\ell) = < \ell, f(t) >$,
indexée par les éléments f de B, est équicontinue.

Si $\ell \in E'$, on montre par le théorème du graphe fermé que, les fonctions $\ell of : [0,1] \to \mathbb{R}$ appartenant de façon évidente à VBC pour f dans H, l'application $f \rightsquigarrow d(\ell of) : H \to M$ est continue. Il en résulte que $d(\ell oB)$ est borné dans M. De plus, on montre comme au lemme 14 que toute suite (f_n) de B admet une sous-suite (f_{n_p}) telle que ℓof_{n_p} converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction à variation bornée. On en déduit, comme dans la démonstration du théorème 16, que $d(\ell oB)$ est $\sigma(M,M')$ relativement compact , puis que la famille $(\ell of)_{f \in B}$ est équicontinue sur $[0,1]$.

Soit alors $(t_o,\ell_o) \in [0,1] \times E'$. Si (t,ℓ) est un point variable de $[0,1] \times E'$, on a l'inégalité

$$|\varphi_f(t,\ell) - \varphi_f(t_o,\ell_o)| \leqslant | < \ell_o, f(t) - f(t_o) > | + | < \ell - \ell_o, f(t) > | .$$

Le deuxième terme du second membre est majoré par $\|\ell-\ell_o\| . \|f(t)\|$, lui-même majoré par $\|\ell-\ell_o\|$. Le premier terme est majoré par $\frac{\varepsilon}{2}$ si $|t-t_o| < \eta$, ceci uniformément pour f dans B, d'après ce qui précède. Donc, si $|t-t_o| < \eta$ et $\|\ell-\ell_o\| < \frac{\varepsilon}{2}$, on a bien, pour tout f de B, $|\varphi_f(t,\ell) - \varphi_f(t_o,\ell_o)| < \varepsilon$.

Par ailleurs, depuis les travaux exposés ci-dessus, Pajor a montré le résultat suivant, qui étend le théorème 16 au cas des fonctions définies sur un ensemble totalement ordonné quelconque :

THEOREME 22 .- Soit X un ensemble totalement ordonné, et H un espace vectoriel uniformément fermé de fonctions numériques à variation bornée sur X; alors H est de dimension finie.

Sa méthode consiste à plonger X dans [0,1] et à se ramener au théorème 16.

BIBLIOGRAPHIE

[0] N. BOURBAKI : Topologie générale, Ch.9, exercices; Hermann, Paris.

[1] A. DOUADY : Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné; exposés au Séminaire Leray, 1965-66, Collège de France, Paris.

[2] A. GROTHENDIECK : Espaces vectoriels topologiques; Sao Paulo.

[3] A. GROTHENDIECK : Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type C(K), Canad.J. of Math., t.5, 1953, p.129-173.

[4] G. MOKOBODZKI et M. ROGALSKI Sur les espaces uniformément fermés de fonctions à variation bornée; C.R. Acad. Sc., Paris, t.274(1972), p. 1225-1228.

[5] F. RIESZ et B.Sz.-NAGY Leçons d'Analyse fonctionnelle; Publication de l'Acad. Sc. de Hongrie