PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

BERNARD PERROT

Topologies mixtes dans le cas de structures vectorielles non nécessairement convexes

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1973, tome 10, fascicule 4
, p. 81-92

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1973__10_4_81_0>

II$^{\text{ème}}$ Coll. Anal. Fonct.
(1973, Bordeaux)
p. 359-370

Publications du .
Département de
Mathématiques
Lyon 1973 t. 10-4

TOPOLOGIES MIXTES DANS LE CAS DE STRUCTURES VECTORIELLES NON NECESSAIREMENT CONVEXES

par

Bernard PERROT

---o0o---

INTRODUCTION : Les théories [4] [11] qui généralisent les "two-norm spaces" introduits par A. ALEXIEWICZ et Z. SEMADENI [1][2][3] prennent comme cadre : E un espace vectoriel muni d'une topologie localement convexe séparée u et d'une bornologie convexe β qui donnent le mode de convergence séquentiel γ ; on dit qu'une suite $(x_n)_n$ d'éléments de E converge vers un point x de E au sens de γ si la suite $(x_n)_n$ converge vers x pour la topologie u et si cette suite est bornée pour la bornologie β . On appelle topologie mixte localement convexe et on note m (u, β) la topologie localement convexe la plus fine qui induit la même topologie que u sur les parties de β ; et de même on obtient la topologie mixte vectorielle $m^v(u, \beta)$ (resp : topologie mixte générale, $m^g(u, \beta)$) comme étant la topologie vectorielle (resp : générale) la plus fine qui induit la même topologie que u sur les parties de β .

Si l'on s'intéresse à $m^v(u, \beta)$, il apparait que le cadre naturel dans lequel on peut faire cette étude est le suivant : E un espace vectoriel muni d'une topologie vectorielle u et d'une bornologie β vectorielle (les deux structures u et β ne sont pas nécessairement convexes) qui donnent le mode de convergence séquentiel γ et les topologies mixtes $m^g(u,\beta)$ et $m^v(u,\beta)$. Nous allons montrer que $m^v(u,\beta)$ possède les mêmes propriétés que dans le cas convexe, et que la comparaison avec $m^g(u,\beta)$ se fait de la même manière.

§1 - PROPRIETES GENERALES DE $m^v(u,\beta)$: Nous nous plaçons dans le cadre décrit dans l'introduction où E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni d'une topologie vectorielle u et d'une bornologie vectorielle β. Comme β est vectorielle on peut toujours choisir une base de β formée de parties équilibrées voir [6] ; on notera $A[u]$ la partie A de E munie de la topologie induite par u.

Théorème 1 - Dans les conditions décrites ci-dessus on a :

$$* \quad A[u] \xrightarrow{i_A} E_{m^v(u,\beta)}$$

(1) $m^v(u,\beta)$ est la topologie vectorielle la plus fine rendant uniformément continue les injections canoniques i_A pour toutes parties A de β.

(1') $m^v(u,\beta)$ est la topologie vectorielle la plus fine rendant continue les injections canoniques i_A pour toutes parties A de β.

(1") $m^v(u,\beta)$ est la topologie vectorielle la plus fine rendant continue à l'origine les injections canoniques i_A pour toutes parties A de β

$$* \quad E_{m^v(u,\beta)} \xrightarrow{f_j} F$$

où F est un espace vectoriel topologique quelconque et $(f_j)_{j\in J}$ une famille d'applications linéaires de E dans F.

$m^v(u,\beta)$ est la seule topologie vectorielle possédant la propriété :

(2) $(f_j)_{j\in J}$ équicontinue $\Leftrightarrow$ $(f_j \circ i_A)_{j\in J}$ uniformément équicontinue pour toute partie A de β .

(2') $(f_j)_{j\in J}$ équicontinue $\Leftrightarrow$ $(f_j \circ i_A)_{j\in J}$ équicontinue pour toute partie A de β .

(2'') $(f_j)_{j\in J}$ équicontinue $\Leftrightarrow$ $(f_j \circ i_A)_{j\in J}$ équicontinue à l'origine pour toute partie A de β .

* Pour toute partie A de β on note u_A la topologie vectorielle la plus fine sur E_A (sous espace vectoriel de E engendré par A) qui rende continue l'application $A_{[u]} \xrightarrow{j_A} E_A$. Alors pour $A \subset B$ on a $E_A, u_A \xrightarrow{\pi_{BA}} E_B, u_B$ avec π_{BA} continue donc $(E_A, u_A ; \pi_{BA})_{A\in\beta}$ forme un système inductif.

(3) $E_{m^v(u,\beta)}$ est la limite inductive dans la catégorie des espaces vectoriels topologiques du système inductif décrit ci-dessus.

On a évidemment (1'), pour obtenir (1) et (1'') il suffit de voir que si pour toute partie A de β les i_A sont continues à l'origine alors elles sont uniformément continues ; il faut bien remarquer cependant que cela ne provient pas du lemme classique qui dit que si une application linéaire f est continue à l'origine sur un disque A alors elle est uniformément continue sur A car ici on n'impose pas à β d'être convexe alors une base de β est en général équilibrée mais non disquée. Dire que i_A est uniformément continue c'est dire que pour tout voisinage W de l'origine dans E pour $m^v(u,\beta)$ il existe un voisinage V de l'origine dans E pour la topologie u tel que $\forall (x,y) \in A \times A$ et vérifiant $x-y \in V$ on ait $x-y \in W$; ce qui s'obtient en écrivant que i_B est continue à l'origine pour le borné $B = A - A$. D'une manière classique on démontre la propriété (2'') alors la démonstration précédente entraîne (2) et (2') . La démonstration de (3) découle directement des définitions de $m^v(u,\beta)$ et des limites inductives ; cette propriété est analogue à celle démontrée dans le cas convexe par D. J. H. GARLING 2 prop. 2 [5].

La propriété (1") montre que la topologie mixte introduite par T. PRECUPANU dans [10] est la topologie $m^v(u, \beta)$ lorsque la bornologie engendrée par la famille de parties $\mathcal{C}$ qu'il considère, est vectorielle.

Proposition 1 - Les voisinages de l'origine de $m^v(u, \beta)$ sont les parties U qui vérifient les deux propriétés suivantes :

(i) $\forall A \in \beta \quad \exists V$ voisinage de 0 pour u tel que $V \cap A \subset U$

(ii) $\exists (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\begin{cases} U_n \text{ vérifie (i) } \forall n \\ U \supset U_1 + U_1 \ ; \ U_1 \supset U_2 + U_2, \dots \ U_n \supset U_{n+1} + U_{n+1} \end{cases}$

Les parties U qui vérifient (i) et (ii) sont les voisinages de 0 d'une topologie vectorielle qui rend les i_A continues à l'origine donc cette topologie est moins fine que $m^v(u, \beta)$ d'après théorème 1 (1") ; mais tout voisinage de 0 pour $m^v(u, \beta)$ vérifie (i) et (ii) ce qui permet de conclure.

Théorème 2 - Si β est une bornologie à base dénombrable, soit $(B_n)_n$ une base quelconque de β alors les parties de la forme suivante forment un système fondamental de voisinages de 0 pour $m^v(u, \beta)$

(1) $$\bigcup_{n=1}^{\infty} (B_1 \cap V_1 + B_2 \cap V_2 + \dots + B_n \cap V_n)$$

(2) $$V_o \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n + V_n \right)$$

(3) $$\overline{V}_o \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\overline{B}_n + V_n} \right)$$

où les V_n sont des voisinages de 0 pour la topologie u , et l'opération $^{-}$ désigne la fermeture pour u.

Les parties de la forme (1) vérifient (i) et (ii) de la proposition 1 ; réciproquement soit U vérifiant (i) et (ii) alors on a $U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n \subset U \ \forall_n$ mais d'après (i) il existe une suite $(V_n)_n$ de voisinages de 0 de u tels que $B_n \cap V_n \subset U_n$ donc la partie

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (B_1 \cap V_1 + \ldots + B_n \cap V_n) \subset U .$$

On vérifie aisément que les parties de la forme (2) donnent un système fondamental de voisinages de 0 pour une topologie vectorielle qui coïncide avec u sur les bornés de β, réciproquement il faut montrer qu'une telle partie contient une partie du type (1) ce qui se fait d'une manière analogue à 2.3 p. 53, 54 dans [12], on fera jouer aux B_n le rôle que jouent les n U et la convexité n'intervient pas.

Pour obtenir (3) il suffit de voir qu'une partie $V_o \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n + V_n)$ contient une partie de la forme (3) ; en effet u étant vectorielle soit U_o un voisinage de 0 de u tel que $\overline{U}_o \subset V_o$ et soit pour tout n un voisinage U_n de l'origine pour u tel que $U_n + U_n + U_n \subset V_n$ alors $\overline{\overline{B}_n + U_n} \subset$

$((B_n + U_n) + U_n) + U_n \subset B_n + V_n$ donc

$$\overline{U}_o \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\overline{B}_n + U_n}) \subset V_o \cap(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n + V_n)$$

Le théorème 2 est l'analogue du lemme 1 p. 58 [11] dans le cas des structures convexes.

<u>Corollaire</u> : Si β est à base dénombrable, $m^v(u, \beta)$ admet un système fondamental de voisinages de l'origine fermés pour u

On en déduit aussi que $m^v(u, \beta) = m^v(u, \overline{\beta})$ où $\overline{\beta}$ désigne la bornologie engendrée par les fermetures pour u des parties de β ; mais ce résultat important s'obtient directement sans aucune hypothèse de dénombrabilité sur β .

<u>Théorème 3</u> - $m^v(u, \beta) = m^v(u, \bar{\beta})$

C'est l'analogue du théorème 1 [5] dans le cas convexe, mais la démonstration ne peut se faire de la même manière que dans [5] où on utilise de manière essentielle les semi-normes qui définissent une topologie localement convexe. $\beta \subset \bar{\beta}$ ce qui entraîne $m^v(u, \beta)$ plus fine que $m^v(u, \bar{\beta})$ montrons la réciproque :

$$\begin{tikzcd}
E_{m^v(u,\bar{\beta})} \arrow[r, "i"] & E_{m^v(u,\beta)} \\
\bar{A}[u] \arrow[u, "j_{\bar{A}}"] \arrow[ur, "i \circ j_{\bar{A}}"'] &
\end{tikzcd}$$

d'après le théorème 1 partie (2") i est continue si et seulement si $i \circ j_{\bar{A}}$ est continue à l'origine pour toute partie $\bar{A}$ de $\bar{\beta}$

$$i \circ j_{\bar{A}}\big|_A : A[u] \xrightarrow{i_A} E_{m^v(u,\beta)}$$

mais d'après (1) du théorème (1) i_A est uniformément continue pour toute partie A de β donc il existe un prolongement par continuité $\tilde{i}_A$ de $\bar{A}[u]$ dans $\widehat{E_{m^v(u,\beta)}}$ le complété de $E_{m^v(u,\beta)}$. Il suffit de montrer maintenant que $\tilde{i}_A = i \circ j_{\bar{A}}$; soit $x \in \bar{A}$, on appelle B le borné $A \cup \{x\}$ de β . $B[u] \xrightarrow{i_B} E_{m^v(u,\beta)}$ i_B et $\tilde{i}_A$ sont continues sur $B[u]$ elles coïncident sur A qui est dense donc elles sont égales au point x donc $\tilde{i}(x) = i_B(x) = x = i \circ j_{\bar{A}}(x)$.

Pour une topologie vectorielle t quelconque on notera $\mathbb{B}t$ conformément à [6] la bornologie canonique associée à la topologie t .

Proposition 2 - Si $\beta \subset \mathbb{B}u$ alors $\beta \subset \mathbb{B}\, m^V(u,\beta)$

Soit A un borné de β et soit U un voisinage de 0 de $m^V(u,\beta)$, alors il existe V un voisinage de 0 de u tel que $V \cap A \subset U$ mais $\beta \subset \mathbb{B}u$ entraîne qu'il existe un réel $0 < \lambda \leq 1$ tel que $\lambda A \subset V$ donc $\lambda A \subset V \cap A \subset U$ et A est borné pour $m^V(u,\beta)$; évidemment on s'est limité pour faire la démonstration aux bornés équilibrés de β .

Théorème 4 - (1) Si $\beta \subset \mathbb{B}u$ et β à base dénombrable alors :

$$\mathbb{B}\, m^V(u,\beta) = \overline{\beta}$$

(2) Si $\beta \subset \mathbb{B}u$ et si β est la bornologie canonique d'une topologie vectorielle τ qui admet un système fondamental de voisinages de 0 fermés pour u alors :

$$\mathbb{B}\, m^V(u,\beta) = \beta$$

La preuve est analogue à celle du théorème 1.1 [12] qui concerne le cas convexe, mais la convexité n'intervient pas fondamentalement, il suffit essentiellement de remplacer les parties de la forme $\bigcap_{n=1}^{\infty} (nV + U)$ par $\bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{V + V + \ldots + V}_{n \text{ fois}} + U$ pour voir qu'on obtient des voisinages de 0 pour $m^V(u,\beta)$.

Proposition 3 - (1) Si β est à base dénombrable les suites qui convergent pour $\gamma(u,\overline{\beta})$ sont exactement les suites qui convergent pour $m^V(u,\beta)$, c'est-à-dire que $m^V(u,\beta)$ topologise le mode de convergence séquentiel $\gamma(u,\overline{\beta})$.

(2) Si β est la bornologie canonique d'une topologie vectorielle τ qui admet un système fondamental de voisinages de 0

fermés pour u alors $m^v(u, \beta)$ topologise le mode de convergence séquentiel $\gamma(u, \beta)$.

Une suite $(x_n)_n$ qui converge pour $\gamma(u, \beta)$ ou $\gamma(u, \overline{\beta})$ est bornée pour $\overline{\beta}$ or $m^v(u, \beta) = m^v(u, \overline{\beta})$ coïncide avec u sur les parties bornées de $\overline{\beta}$ donc $(x_n)_n$ converge pour $m^v(u, \beta)$. La réciproque provient du fait que dans les conditions (1) (resp : (2)) on a $\mathbb{B}\, m^v(u, \beta) \subset \overline{\beta}$ (resp : β) d'après le théorème 4 ; en effet la condition $\beta \subset \mathbb{B}\, u$ n'intervient que pour obtenir $\overline{\beta} \subset \mathbb{B}\, m^v(u, \beta)$.

§ 2 - COMPARAISON DE $m^v(u, \beta)$ et $m^g(u, \beta)$

Le mode de convergence séquentiel $\gamma(u, \beta)$ (noté γ lorsqu'aucune confusion n'est à craindre) fait de E un espace de type L au sens de [7]. Alors d'une manière standard on appelle partie γ-fermée toute partie de E qui contient les limites de ses suites convergentes pour γ ; et la topologie de la γ-fermeture est la topologie obtenue en prenant comme famille de parties fermées la famille des parties γ-fermées. Cette topologie est invariante par homothétie et translation il suffit donc de connaître un système fondamental de voisinages de l'origine, on peut en obtenir une construction effective, par la méthode des "chaînes cohérentes" exposée dans [8] où u et β sont convexes, mais la convexité n'intervient pas pour ces considérations sur la topologie de la γ-fermeture.

<u>Proposition 4</u> - Si u est métrisable (ou plus généralement si les restrictions de u aux parties d'une base de β sont séquentielles) alors la topologie $m^g(u, \beta)$ et la topologie de la γ-fermeture coïncident.

On rappelle qu'on dit qu'une topologie est séquentielle si toute partie séquentiellement fermée est fermée ; la démonstration de la proposition 4 se fait en montrant que les deux topologies ont les mêmes parties fermées.

La proposition 4 donne une interprétation originale de la topologie $m^g(u, \beta)$ qui dans [8] nous permet de montrer par un exemple que $m^g(u, \beta)$ est strictement plus fine que $m^v(u, \beta)$ même dans des cas très particuliers tels que les "two-norm spaces" où u et β proviennent de normes.

Théorème 5 - u étant métrisable si β admet une base dénombrable formée de parties compactes pour u alors $m^g(u, \beta) = m^v(u, \beta)$.

Ce théorème dans le cas convexe est donné dans [11] et découle du théorème de Banach-Dieudonné qui fait intervenir la dualité, il faut donc donner ici une autre démonstration. Soit (B_n) une base de β formée de parties compactes pour u et soit U un voisinage de 0 ouvert pour $m^g(u, \beta)$ alors il existe V_1 un voisinage de 0 fermé pour u tel que $U \supset B_1 \cap V_1$ car sur B_1 les topologies u et $m^g(u, \beta)$ coïncident ; on fait un raisonnement par récurrence : soit $V_1, V_2 \dots V_k$ tels que

$B_1 \cap V_1 + B_2 \cap V_2 + \dots + B_k \cap V_k \subset U$ et montrons qu'il existe un voisinage de 0 fermé pour u V_{k+1} tel que $B_1 \cap V_1 + \dots + B_k \cap V_k + B_{k+1} \cap V_{k+1} \subset U$.

u étant métrisable soit $(W_n)_n$ un système fondamental de voisinages de 0, si on ne pouvait trouver le voisinage V_{k+1} cherché alors

$B_1 \cap V_1 + B_2 \cap V_2 + \dots + B_k \cap V_k + B_{k+1} \cap W_n$ serait non contenu dans U

pour tout n, il existerait une suite $(x_n + y_n)_n$ telle que

$x_n \in B_1 \cap V_1 + \dots + B_k \cap V_k$; $y_n \in B_{k+1} \cap W_{k+1}$ et $x_n + y_n \notin U$ pour tout n. La partie $B_1 \cap V_1 + \dots + B_k \cap V_k$ étant compacte pour u il existe une sous suite $(x_{n_r})_r$ qui converge vers un de ses points x ; la suite $(y_n)_n$ converge en 0 pour u ; donc la sous suite $(x_{n_r} + y_{n_r})_r$ converge vers x pour u ; mais cette suite appartient à $B_1 + B_2 + \dots + B_{k+1}$ qui est bornée pour β, sur un telle partie les topologies u et $m^g(u, \beta)$ coïncident donc la suite $(x_{n_r} + y_{n_r})_r$ de points qui n'appartiennent pas à U converge vers x appartenant à U pour $m^g(u, \beta)$ ce qui est en contradiction avec le fait que U soit ouvert pour $m^g(u, \beta)$. Alors on peut former la partie $\bigcup_{n=1}^{\infty} (B_1 \cap V_1 + \ldots + B_n \cap V_n)$ qui est contenue dans U ce qui achève la démonstration d'après (1) du théorème 2.

<u>Proposition 5</u> - u étant métrisable, si β admet une base dénombrable formée de parties fermées pour u ou si β est la bornologie canonique d'une topologie vectorielle qui admet un système fondamental de voisinages de 0 fermés pour u alors on a équivablement :

(a) $m^g(u, \beta) = m^v(u, \beta)$

(b) $m^v(u, \beta)$ est une topologie séquentielle.

Dans cette proposition 5 comme dans la suivante on pourrait généraliser un peu en remplaçant : "u métrisable" par : "β admet une base telle que les restrictions de u aux parties de cette base sont séquentielles".
La topologie $m^g(u, \beta)$ est séquentielle car elle est égale à la topologie de la γ-fermeture d'après la proposition 4, d'autre part les suites qui convergent pour la topologie de la γ-fermeture, sont les suites telles que : de toutes sous-suites, on puisse extraire une sous-suite qui converge pour γ d'après le théorème de Kisynski p. 209 dans [7] ; avec les conditions de la proposition 5 ce sont les suites qui convergent pour γ donc pour $m^v(u, \beta)$ d'après la proposition 3 ; alors $m^g(u, \beta)$ et $m^v(u, \beta)$ ont donc les mêmes suites convergentes, ce qui permet de conclure.

<u>Proposition 6</u> - u étant métrisable et β à base dénombrable contenue dans $\mathbb{B}$ u s'il existe une partie de β telle que sa fermeture pour u

n'appartienne plus à β alors $m^g(u,\beta)$ est strictement plus fine que $m^v(u,\beta)$.

Soit (B_n) une base de β et A une partie de β telle que $\bar{A}$ ne soit plus bornée pour β alors $\bar{A} \not\subset n\ B_n\ \forall_n$, donc il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de $\bar{A}$ telle que $\left(\frac{x_n}{n}\right)_n$ ne soit pas bornée pour β, ce qui entraîne que la suite $\left(\frac{x_n}{n}\right)_n$ ne converge pas pour $\gamma(u,\beta)$ donc pour $m^g(u,\beta)$ d'après le début de la démonstration de la proposition 5 ; mais $\bar{A}$ est bornée pour u la suite $\left(\frac{x_n}{n}\right)_n$ converge donc pour u, étant bornée pour $\bar{\beta}$ elle converge pour $\gamma(u,\bar{\beta})$ donc pour $m^v(u,\bar{\beta}) = m^v(u,\beta)$ d'après la proposition 3 et le théorème 3 ; ce qui achève la démonstration.

Les résultats du paragraphe 2 forment la base de la conférence donnée aux journées d'analyse fonctionnelle de Bordeaux où notre but était essentiellement d'obtenir un espace bi-normé dans lequel $m^g(u,\beta) \supsetneq m^v(u,\beta)$; pour simplifier la présentation nous avions imposé à u et β d'être des structures convexes, alors dès que β est à base dénombrable l'étude se ramène à $m(u,\beta)$ car $m(u,\beta) = m^v(u,\beta)$ [8].

---o0o---

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALEXIEWICZ A. and SEMADENI Z. - Linear functionals on the two-norm spaces [Studia Math. 17 (1958) 121-140].

[2] ALEXIEWICZ A. and SEMADENI Z. - The two-norm spaces and their conjugate spaces [Studia. Math. 18 (1959) 275-293].

[3] ALEXIEWICZ A. and SEMADENI Z. - Some properties of the two-norm spaces and a characterization of reflexivity of Banach spaces [Studia Math. 19 (1960) 115-132].

[4] ARIMA S. and ORIHARA M. - Generalization of the mixed topology [Yokohama Math. Journal 12 (1964) 63-68].

[5] GARLING DJH. - A generalized form of inductive limit topology for vector spaces [Proc. London. Math. Soc. 3.14 (1964) 1-28].

[6] HOGBE-NLEND H. - Théorie des bornologies et applications [Lecture Notes in Mathematics n° 213].

[7] KISYNSKI J. - Convergence de type L [Colloquium Mathematicum Vol. 7 fasc. 2 (1960) 205-211].

[8] PERROT B. - Sur la comparaison entre différentes topologies mixtes dans les espaces bi-normés [à paraître].

[9] PERSSON A. - A generalization of two-norm spaces [Arkiv for Mathematik 5 (1963) 27-36].

[10] PRECUPANU T. - Remarques sur les topologies mixtes [Ann. Str. Univ. "All I Cuza" Iaso Sect I. a. Mat. 13 (1967) 277-284].

[11] ROELCKE W. - On the finest locally convex topology agreeing with a given topology on a sequence of absolutely convex sets [Math. Annalen 198 (1972) 57-80].

[12] WIWEGER A. - Linear spaces with mixed topology [Studia. Math. 20 (1961) 47-68].

---o0o---