Publications du Département de mathématiques de Lyon

Paul Kree

Utilisation des distributions pour l'étude des équations aux dérivées partielles en dimension infinie

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1973, tome 10, fascicule 4
, p. 93-110
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1973__10_4_93_0>

II$^{\text{ème}}$ Coll. Anal. Fonct.
(1973, Bordeaux)
p. 371- 388

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1973 t. 10-4

Utilisation des distributions pour l'étude des équations aux dérivées partielles en dimension infinie

par Paul KREE

Définition des distributions d'ordre borné avec un e.v.t. Propriétés. Distributions cylindriques avec un e.v.t. Cas particulier des distributions d'ordre borné. Relation entre les distributions d'ordre borné et les distributions cylindriques d'ordre borné : généralisation des théorèmes de Prohorov et de Sazanov-Minlos. Distributions x-cylindriques. Cas particulier des distributions x-cylindriques régulières en t. Application aux équations d'évolution.

L'étude de la théorie des équations aux dérivées partielles (sur des variétés réelles de dimension finie) a conduit à généraliser la notion de fonction (solutions faibles de J.Leray, espaces de S.Sobolev, distributions de L.Schwartz...) et ces généralisations successibes ont entrainé des progrès importants de la théorie des équations aux dérivées partielles.

Il existe déjà des travaux importants relatifs aux équations aux dérivées partielles sur des variétés de dimension infinie, ou tout au moins sur un espace de Hilbert : voir par exemple L.Gross [1] , Dalecky [1] , I.M.Visik [1] , et les nombreux travaux cités dans les bibliographies de ces articles. Il semble aussi que la théorie quantique des champs, et l'électrodynamique quantique (classique ou relativiste) nécessite l'introduction de telles équations.

Il nous semble donc naturel (et important) d'introduire des "solutions généralisées"pour les équations aux dérivées partielles relatives à un espace de dimension infinie. Les classes de "fonctions généralisées" seront définies, (comme en dimension finie) comme duals d'espaces vectoriels de fonctions dérivables, ces espaces étant munis de topologies convenables.

De nombreuses différences apparaissent cependant, relativement au cas de la dimension finie:

a) En dimension finie, une fonction localement intégrable $f(x)$ définit (canoniquement si l'espace est euclidien) la distribution $\varphi \longrightarrow \int f(x)\, \varphi(x)dx$, où dx est une mesure de Lebesgue. Il n'est est plus de même en dimension infinie (il y a pourtant une analogie dans le cas de Hilbert, la mesure de Lebesgue étant remplacée par la mesure gaussienne canonique). En conséquence, en dimension infinie, une solution distribution d'une équation aux dérivées partielles n'est donc pas une solution généralisée, mais une solution (d'un nature nouvelle) de cette équation aux dérivées partielles. De telles solutions sont très utiles cependant, car elles permettent de construire des solutions usuelles : voir par exemple Daletskii [1] .

b) Dans le cas particulier des distributions d'ordre zéro (ou mesure) on sait (voir Gelfand Vilenkin [2]) qu'il intervient deux sortes d'êtres mathématiques : les mesures et les mesures cylindriques, ces dernières étant représentées par certains systèmes projectifs de mesures usuelles sur des espaces de dimension finie. On peut donc s'attendre que cette distinction se prolonge dans le cas plus général des distributions d'ordre quelconque.

c) En dimension finie si $P(x,D)$ est un opérateur différentiel linéaire d'ordre k , il suffit que la fonction $u(x)$ soit k fois continuement dérivable pour que $P(x,D)\, u(x)$ soit défini. Il n'en est plus de même en dimension infinie ; car si par exemple Δ est le laplacien relatif à un espace de Hilbert réel, la fonction $\Delta u(x)$ n'est pas définie si $u : H \longrightarrow \mathbb{R}$ est seulement deux fois dérivable, car l'opérateur linéaire borné associé à la forme bilinéaire $D''u(x)$ n'a pas forcément une trace finie. Pour remédier à ce fait, on peut ou bien supposer que $D''u(x)$ définit un opérateur à trace (voir L.Gross [1]), ou bien définir Δu si u dépend seulement d'un nombre fini de coordonnées (voir I.M.Visik [1]) puis utiliser un passage à la limite convenable.

Nous avions déjà proposé dans P. Krée [1] , des définitions pour les distributions en dimension infinie, et nous avions indiqué quelques applications aux équations aux dérivées partielles. Dans le présent travail, nous modifions ces définitions de façon à éviter des difficultés techniques dues à la considération des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ définies sur un espace vectoriel topologique. Nous parvenons alors à prolonger à ces classes les théorèmes de Prohoroff et Sazanov Minlov relatifs aux probabilités cylindriques. Au paragraphe 4 , on esquisse la définition de distribution "cylindriques" mieux adaptées à l'étude de problèmes d'évolution : on remplace le système projectif usuel d'espaces vectoriels (X_i, s_{ij}) relatif à un e.v.t. X par un nouveau système projectif relatif à $\mathbb{R}_t \times X$. On peut alors utiliser des techniques de désintégration analogues à celles que nous avions utilisées dans Krée [2] . Ces outils premettent d'étudier les problèmes paraboliques ; Cependant l'étude de l'équation de Schrödinger et de l'équation des ondes conduit à de nouvelles difficultés liées au fait que les ordres des distributions du système projectif ne sont pas forcément majorés.

1 - Les distributions d'ordre borné sur un e.v.t.

Nous commençons par définir l'espace $\mathcal{C}_b^k(X)$ des fonctions k fois continuement dérivables sur l'e.v.t.l.e.s. X (nous ne considérons que des espaces vectoriels réels et des fonctions à valeurs réelles). Puis nous définissons le sous espace $\mathcal{C}^k_{cyl\ b}(X)$ de $\mathcal{C}_b^k(X)$, formé par des fonctions cylindriques. En considérant d'abord le cas particulier où $k=0$, on définit une topologie sur $\mathcal{C}^k_{cyl\ b}(X)$ de façon à définir par dualité les distributions bornées d'ordre au plus k. On indique quelques propriétés de ces distributions.

(1.1) espace $\mathcal{C}_b^k(X)$

Soit X un e.v.t.l.e.s. réel. On définit $\mathcal{C}_b^k(X)$ comme l'espace des fonctions $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ admettant des dérivées $D\varphi(x), D^2\varphi(x) \dots D^k\varphi(x)$ dépendant continuement de X. On suppose aussi que pour $j=0,\dots$ ouk , lorsque se décrit X, $D^j\varphi(x)$ décrit un borné de l'ensemble des formes j-linéaires continues : $X x X, \dots, x X \longrightarrow \mathbb{R}$.

$\mathcal{C}_b^k(X) = \{\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ D^j\varphi \text{ borné } ;\ j = 0,1\dots k\}$. [On munit naturellement l'espace vectoriel $\mathcal{C}_b^k(X)$ d'une bornologie : un borné de $\mathcal{C}_b^k(X)$ étant défini par une famille $B_o \dots B_k$, où $B_j (j=0,\dots,k)$ est un ensemble borné d'applications j-linéaires continues : $X x X \dots x X \longrightarrow \mathbb{R}$.

(1.2.) Indiquons quelques raisons qui font que l'utilisation de cet espace n'est pas très commode.

a) Les fonctions k fois continuement dérivables sur un e.v.t.l.e.s. ne sont pas très maniables (construction difficile de partitions de l'unité, d'approximation de fonctions $\mathcal{C}^k$ par des fonctions $\mathcal{C}^{k+1}$ ...

b) Dans le cas où X n'est pas un Banach, il n'y a auxune raison de privilégier les fonctions dont les dérivées sont des applications multilinéaires continues (on peut aussi considérer les fonctions dont les dérivées sont des applications multilinéaires hypocontinues ou même (calcul différentiel de da Silva) les fonctions dont les dérivées sont des applications multilinéaires bornées).

(1.3.) Sous espace vectoriel $\mathcal{C}^k_{cyl\ b}(X)$ de $\mathcal{C}_b^k(X)$

Soit $U = X'$ le dual de X . Soit $(U_i)_{i \in I}$ la famille des sous espaces vectoriels de dimension finie de U . Soit $(U_i^o)_{i \in I}$ la famille des sous espaces fermés de codimension finie de X . Pour tout $i \in I$, on pose $X_i = X/U_i^o$. Si i et j dans I sont tels que $U_j^o \leq U_i^o$, on a une surjection canonique $s_{ij} : X_j \longrightarrow X_i$. De plus pour tout i dans I , on a une surjection canonique $s_i : X \longrightarrow X_i$. On dit qu'une fonction $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est cylindrique si elle est la composée d'une application $s_j : X \longrightarrow X_j$, avec une fonction numérique définie sur X_j (on dit alors que X_j est une base de φ). On définit donc $\mathcal{C}^k_{cyl\ b}(X)$ comme l'ensemble des fonctions $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ qui sont la composée d'une application s_j avec une fonction $\tilde{\varphi}_j$ de $\mathcal{C}^k_b(X_j)$.

$\mathcal{C}^k_{cyl\ b}(X) = \{\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ \exists j \in I \quad \varphi = \tilde{\varphi}_j o s_j\ ,\ \tilde{\varphi}_j \in \mathcal{C}^k_b(X_j)\}$.[On dit que X_j est une vase de φ . Notons que $\mathcal{C}^k_{cyl\ b}(X)$ est une algèbre, car si φ et ψ sont des fonctions cylindriques de bases respectives X_i et X_j, elles admettent aussi une base commune X_k (Si $X_i = X/U^o_i$ et si $X_j = X/U^o_j$, il suffit de prendre $X_k = X/U^o_k$ où U^o_k est le polaire de $U_k = U_i + U_j$.

(1.4.) Examen préliminaire du cas particulier ou $k=0$.

Nous nous proposons de définir une topologie localement convexe sur $\mathcal{C}^k_b(X)$ ou $\mathcal{C}^k_{cyl\ b}(X)$, puis de définir,l'ensemble des distributions bornées sur X d'ordre au plus k comme le dual topologique de l'e.v.t. ainsi construit. Nous examinonsd'abord le cas particulier $k=0$, car nous voulons retrouver alors l'ensemble $\mathcal{M}b(X)$ des mesuresde Radon (bornées) sur X.
On introduit alors $\mathcal{T}_u$, topologie sur $\mathcal{C}^o_b(X)$ correspondant à la norme de la convergence uniforme, et l'on note $B_{\mathcal{U}}(r)$ la boule de $\mathcal{C}^o_b(X)$ où $\|\varphi\|_{\mathcal{U}} \leq r$.
On note $\mathcal{T}_k$ la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes de X . En général, si E est un e.v. et si $\mathcal{T}$ est une topologie localement convexe sur E, on note $(E,\mathcal{T})$ l'espace vectoriel topologique associé à ces deux données. Nous cherchons donc une topologie $\mathcal{T}^o$ sur $E = \mathcal{C}^o_b(X)$ telle que $(E,\mathcal{T}^o) = \mathcal{M}(X)$.

(1.5.) On sait (voir par exemple Fremlin Garling et Haydon [1]).

a) On peut prendre pour $\mathcal{T}^o$ la topologie localement convexe la plus finie sur E qui coïncide avec $\mathcal{T}_k$ sur $B_{\mathcal{U}}(1)$.

b) Si L est un ensemble de forme linéaires sur E, alors L est un ensemble équicontinu de formes linéaires sur d'e.v.t. $(E, \mathcal{T}^o)$ si et seulement si :

i) $\sup_{\ell \in L} \|\ell\|_{\mathcal{U}} < \infty$, ce qui signifie que L est un ensemble équicontinu de formes linéaires sur $(E, \mathcal{T}_{\mathcal{U}})$.

ii) L vérifie uniformément la condition (ε, K) suivante. Pour tout $\varepsilon > o$, il existe un compact K de X telle que pour toute φ de la boule unité de E nulle sur K, et tout ℓ de L on ait $|\ell,(\varphi)| \leq \varepsilon$.

(1.6.) Remarques

a) $\mathcal{C}^o_{cyl\ b}(X)$ est dense dans E, d'après le théorème de Stone-Weierstrass par conséquent, on peut aussi définir $\mathcal{M}_b(X)$ comme le dual du sous espace vectoriel topologique $\mathcal{C}^o_{cyl\ b}(X)$ de $(E, \mathcal{T}^o)$.

b) On peut définir une topologie localement convexe sur un espace vectoriel A, en dualité séparante avec un espace vectoriel B, par la connaissance des parties équicontinues; un système fondamental de voisinages de l'origine de A étant formé par les polaires des parties équicontinues de B.

Par conséquent, on peut procéder de la manière suivante pour définir simultanémant les distributions (bornées) d'ordre au plus k sur X et une topologie sur $\mathcal{C}^k_{cyl\ b}(X)$.

(1.7.) Définition de $\mathcal{C}'^k_{cyl\ b}(X)$.

Un ensemble équicontinu T de distributions (bornées) d'ordre au plus k sur X est un ensemble T de formes linéaires t sur $\mathcal{C}^k_{cyl_k b}(X)$ telles que :

a) Ces formes sont bornées sur les bornés de $\mathcal{C}^k_{cyl\ b}(X)$.

b) Pour tout $\varepsilon > o$, pour tout borné B de $\mathcal{C}^k_{cyl\ b}(X)$ il existe un compact K de X tel que pour toute φ de B avec $\varphi, D\varphi, \ldots, D^k\varphi$ nuls sur K, on a

$$\forall t \in T \qquad |(t, \varphi)| \leq \varepsilon \quad .$$

L'ensemble de ces formes linéaires est noté $\mathcal{C}'^k_{cyl\ b}(X)$.

(1.8.) Remarques

a) Notons que $\mathcal{C}'^k_{cyl\ b}(X)$ est en dualité séparante avec $\mathcal{C}^k_{cyl\ b}(X)$ car $\mathcal{C}'^k_{cyl\ b}(X)$ contient les combinaisons linéaires finies de masses de Dirac. On munira en général $\mathcal{C}'^k_{cyl\ b}$ de la topologie faible associée à cette dualité, et $\mathcal{C}^k_{cyl\ b}$ de la topologie localement convexe $\mathcal{T}^k$ pour laquelle un système fondamental de voisinages de l'origine est formée par les polaires des ensembles T de la définition. Et naturellement

$\mathcal{C}'^k_{cyl\ b}(X) = (\mathcal{C}^k_{cyl\ b}(X), \mathcal{T}^k)'$.

b) Notons que $\mathcal{E}'^{k}_{cyl\ b}(X)$ est aussi le dual du complété $\widehat{\mathcal{E}}^{k}_{cyl\ b}(X)$ de $\mathcal{E}^{k}_{cyl\ b}(X)$ pour la topologie $\mathcal{T}^{k}$.

(1.9.) Exemples

a) Si X est de dimension finie $\mathcal{E}'^{k}_{cyl\ b}(X)$ est l'ensemble des distributions bornées sur X d'ordre au plus k. En effet

. si ℓ est une forme linéaire continue sur l'espace $\mathcal{E}^{k}_{o}(X)$ des fonctions $\varphi \in \mathcal{E}^{k}(X)$, à support compact, $\mathcal{E}^{k}_{o}(X)$ étant muni de la norme de la convergence uniforme pour $\varphi \ldots D^{k}\varphi$. Alors si ζ est une fonction $\in \mathcal{E}^{k}_{b}(X)$, égale à 1 dans un voisinage de l'origine, pour toute $\varphi \in \mathcal{E}^{k}_{b}(X)$ la suite $\ell(\zeta(\frac{x}{n})\ \varphi(x))$ converge vers une limite, définissant ainsi un prolongement canonique $\tilde{\ell}$ de ℓ à $\mathcal{E}^{k}_{b}(X)$.

. si $\ell' \in \mathcal{E}'^{k}_{cyl\ b}(X)$, posons $\mathcal{T} = \ell' \restriction \mathcal{E}^{k}_{o}(X)$. On peut voir que ℓ' coïncide avec le prolongement canonique $\tilde{\ell}$ de ℓ.

b) Si $k=0$, $\mathcal{E}'^{o}_{cyl\ b}(X)$ coïncide avec l'ensemble des mesures de Radon sur X : ceci résulte de (1.6.a).

(1.10.) Une remarque

Si l'on a une suite $(\varphi_j)_j$ de fonctions cylindriques ayant même base X_i et telle que

. $(\varphi_j)_j$ décrit un borné de $\mathcal{E}^{k}_{cyl\ b}(X)$.

. Pour tout compact K de la base commune X_i, les suites $(\varphi_j)_j$, $(D\varphi_j)_j \ldots (D^{k}\varphi_j)_j$ convergent uniformément sur K. Alors la suite φ_j converge dans $\mathcal{E}^{k}_{cyl\ b}(X)$.

(1.11.) Définition de $\mathcal{E}'_{cyl\ b}(X)$.

a) Pout tout $k \geqslant o$, on a une injection canonique i_k à image dense de $(\mathcal{E}^{k+1}_{cyl\ b}(X), \mathcal{T}^{k+1})$ dans $(\mathcal{E}^{k}_{cyl\ b}(X), \mathcal{T}^{k})$. Ceci résulte de (1.10.) car si $\varphi = \varphi_i o s_i \in \mathcal{E}^{k}_{cyl\ b}(X)$ a pour base X_i, et si ρ^{n}_{ε} est une suite régularisante dans X_i, alors la suite $\varphi^{n} = (\varphi_i \times \rho^{n}) \circ s_i$ converge vers φ dans $(\mathcal{E}^{k}_{cyl\ b}(X), \mathcal{T}^{k})$ lorsque n tend vers l'infini.

b) Par transposition de i_k on obtient donc pour tout k une injection de $\mathcal{E}'^{k}_{cyl\ b}(X)$ dans $\mathcal{E}'^{k+1}_{cyl\ b}(X)$. On peut donc poser $\mathcal{E}'_{cyl\ b}(X) = \bigcup_{k=o}^{\infty} \mathcal{E}'^{k}_{cyl\ b}(X)$.

(1.12.) Propriétés.

a) Image par une application linéaire faiblement continue $\ell : X \longrightarrow Y$.

Soit $t \in \mathcal{E}'_{cyl}(X)$. Pour toute ψ dans $\mathcal{E}'_{cyl}(Y)$, on pose $\tilde{t}(\psi) = t(\psi \circ \ell)$.

On voit que l'application $t \longrightarrow \tilde{t}$ transforme toute partie équicontinue de

$\mathcal{E}'^{k}_{cyl}(Y)$. Par conséquent l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}^{k}_{cyl\ b}(X) & \xleftarrow{\ \ell'\ } & \mathcal{E}^{k}_{cyl\ b}(Y) \\ \varphi \circ \ell & \longleftarrow & \varphi' \end{array}$$

est continue. L'image $\tilde{t}$ de t par ℓ est le transformé de t par la transposé de ℓ'. En particulier si X est un sous espace vectoriel topologique de Y, $\tilde{t}$ est appelé l'extension de t à Y.

b) Produit par une fonction f' de $\widehat{\mathcal{E}^{k}_{cyl\ b}}(X)$. Pour $t \in \mathcal{E}'^{k}_{cyl\ b}(X)$, on définit ft comme l'image de t par la transposée de

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}^{k}_{cyl\ b}(X) & \longrightarrow & \mathcal{E}^{k}_{cyl\ b}(X) \\ \varphi & \longrightarrow & f.\varphi . \end{array}$$

c) <u>Produit tensoriel</u>

Soient X et Y deux e.v.l.e.s. Alors toute fonction cylindrique sur $X \times Y$ admet une base du type $X_i \times Y_j$ où X_i (resp. Y_j) est un quotient de X (resp. Y) par le polaire d'un sous espace U_i (resp. V_j) de dimension finie de X' (resp. Y').

En utilisant alors (1.10.), on voit que $\mathcal{E}^{k}_{cyl\ b}(X) \boxtimes \mathcal{E}^{k}_{cyl\ b}(Y)$ est dense dans $\mathcal{E}^{k}_{cyl\ b}(X \times Y)$. D'où la possibilité de définir $t_1 \boxtimes t_2$ si $t_1 \in \mathcal{E}'^{k}_{cyl\ b}(X)$ et $t_2 \in \mathcal{E}'^{k}_{cyl\ b}(Y)$.

d) Convolution

Pour t_1 et t_2 dans $\mathcal{E}'^{k}_{cyl\ b}(X)$, on définit $t_1 * t_2$ comme l'image de $t_1 \boxtimes t_2$ par l'application somme : $X \times X \longrightarrow X$.

e) Transformation de Fourier.

Pour $t \in \mathcal{E}'^{k}_{cyl\ b}(X)$ et pour tout $u \in X'$, on pose

$\hat{t}(u) = \int_X t(x)\, e^{-i(u,x)} dx = \left[t(.),\ e^{-i(u,.)} \right]$.

La convolution est associative et $\widehat{t_1 * t_2} = \hat{t}_1 . \hat{t}_2$.

- Distributions cylindriques

Soit X un e.v.t.l.e.s. réel et (X_i, s_{ij}) le système projectif usuel d'espaces vectoriels de dimension finie, associé à X. Une définition naturelle d'une distribution cylindrique d'ordre au plus k est la suivante : c'est un système projectif de distributions bornées d'ordre au plus k, sur les espaces X_i. Autrement dit, pour tout i, on a $d_i \in \mathcal{E}'^k_b(X_i)$ telle que $s_{ij}(d_j) = d_i$, si l'on a une surjection canonique de X_j sur X_i. En effet, pour $k=0$, on peut prendre alors des mesures de probabilité, et l'on retrouve ainsi la notion de probabilité cylindrique. On va cependant prendre une définition plus générale : d'abord on n'impose pas aux d_i d'avoir un ordre uniformément borné (lorsque i varie) ; d'autre part on va généraliser un peu la condition $s_{ij}(d_j) = d_i$, de façon à pouvoir considérer parfois des distributions d_i non bornées.

(2.1.) Définition

$\mathcal{D}\mathcal{E}(X)$ est l'ensemble des systèmes $(d_i, i \in I)$ de distributions sur les espaces vectoriels X_i, les d_i vérifiant les conditions de compatibilité suivante :

(2.2) Pour toute $\zeta \in \mathcal{D}(X_i)$ égale à 1 au voisinage de l'. origine, et tout surjection canonique $s_{ij} : X_j \longrightarrow X_i$ la suite $\ell\,(\zeta(\frac{x}{n})\, d_j(x))$ converge vers d_i dans $\mathcal{D}'(X_i)$.

Sur l'espace vectoriel $\mathcal{D}\mathcal{E}(X)$ on a une topologie naturelle définie par la convergence dans $\mathcal{D}'(X_i)$ pour chaque d_i.

Une distribution cylindrique est dite d'ordre borné si les ordres des distributions d_i sont uniformément bornés.

(2.3.) Autres points de vue

a) Si les d_i sont des distributions bornées, la distribution cylindrique associée est une forme linéaire sur $\mathcal{E}^{\infty}_{cyl\ b}(X)$ dont la restriction aux fonctions cylindriques admettant une même base, est représentée par une distribution bornée.

b) (D'après G.Choquet) soit $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue bornée. Pour tout $\mathcal{U}_i$ (sous e.v. dim. finie de $\mathcal{U}$) notons d_i la distribution temperée sur $X_i = X/\mathcal{U}_i^o$ dont le T.F. est $f|\mathcal{U}_i$. Alors la condition (2.2.) est satisfaite. Par exemple, on peut prendre f telle que pour tout i, d_i soit à support compact, ou bornée. On dit que f est T.F. de la distribution cylindrique (d_i).

(2.4.) Exemples

a) Probabilité cylindrique.

b) Distribution cylindrique sur un espace de Hilbert X de T.F.

$$f(u) = (1 + \|u\|^2)^{\alpha} \qquad \alpha \text{ réel.}$$

Cette distribution est d'ordre borné.

c) Distribution cylindrique sur un espace de Hilbert X de T.F.

$$f(u) = \frac{\sin(t\|u\|)}{\|u\|} \quad ;$$

cette distribution cylindrique n'est pas d'ordre borné

d) $f(u) = \exp(-i\|u\|^2)$.

(2.5.) Propriétés des distributions cylindriques: produit par fonction cylindrique. Image par une application linéaire continue produit tensoriel, produit de convolution, transformation de Fourier.

- Relation entre distributions d'ordre borné et distributions cylindriques d'ordre borné.

Nous énoncerons d'abord l'analogue par les distributions cylindriques d'ordre borné un théorème analogue à un théorème de Prohoroff donnant une condition nécessaire et suffisante pour qu'une probabilité cylindrique sur un e.v.t. définisse une mesure de Radon. Puis on donne l'analogue du théorème de Sazanov Minlov qui montre que l'image d'une probabilité cylindrique continue par un opérateur de Hilbert Schmidt, est une mesure de Radon : voir Gelfand Vilenkin [4] .

(3.1.) Proposition

Soit X un espace de Banach et soit k une entier positif ou nul fixé. On considère le système projectif usuel (X_i, s_{ij}) d'espaces vectoriels, associé à X .

a) S'il existe une distribution $D \in \mathcal{E}'^k_{cyl\ b}(X)$ alors les distributions $D_j = s_j(D)$ sont telles que

i) $\sup_j \|D_j\|'_k < \infty$.

ii) $\forall \varepsilon$, $\exists$ compact K et X , $\forall i$, $\forall \tilde{\varphi}_i \in \mathcal{E}^k_b(X_i)$ nulle à l'ordre k sur $s_i(K)$ et telle que $\|\tilde{\varphi}_i\|_k \leq 1$, on a $|D_i(\varphi)| \leq \varepsilon$.

b) Réciproquement, si l'on a un système projectif (D_j) de distributions bornées sur les espaces X_j, et si les D_j vérifient les conditions i) et ii) ci-dessus, alors il existe $D \in \mathcal{E}'^k_{cyl\ b}(X)$ telle que $D_j = s_j(D)$ pour tout j.

Preuve

a) Soit D une distribution bornée d'ordre au plus k sur X . On voit alors que la continuité sur $\mathcal{E}^k_{cyl\ b}(X)$ de la forme linéaire associées à D équivaut aux conditions i) et ii) utiliser le fait que $\|s_i\| = 1$.

b) Réciproquement tout système projectif de D_j vérifiant ces deux conditions, définit une forme linéaire sur $\mathcal{E}^k_{cyl\ b}(X)$, continue pour la topologie $\mathcal{T}^k$.

(3.2.) Proposition (analogue du théorème de Sazanov Minlov)

Soit $k \geq 1$. Soient X et Y deux espaces de Hilbert réels. Soit D une distribution cylindrique sur X , d'ordre au plus k et telle que

(3.3) $\forall \varepsilon$ $\exists r > 0$, $\forall \varphi \in \mathcal{E}^k_{cyl\ b}(X)$, $\|\varphi\|_k \leq 1$, le support de φ appartenant à un demi espace disjoint de la boule B_r où $\|x\| \leq r$, alors $|D(\varphi)| < \varepsilon$.

Soit α un opérateur de Hilbert Schmitt de X dans Y . Alors $\alpha(D)$ est une distribution sur Y faible, d'ordre au plus k .

Démonstration

Vue la proposition (3.1.), il suffit de montrer que $E = \alpha(D)$ est telle que

(3.4.) $\forall \varepsilon \quad \exists R > 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{E}^k_{\text{cyl } b}(Y)$ avec $\underline{\psi} \cap B_R = \phi$ et $\|\psi\|_k \leq 1$, on a $|E(\psi)| \leq \varepsilon$

On cherche à prolonger la méthode de raisonnement de Minlos (voir M. Gelfand Vilenkin [2]). L'application α peut s'écrire

$$\alpha = \sum_1^\infty \lambda_n x_n \otimes y_n$$

avec $\sum_n \lambda_n^2 < \infty$, les suites (x_n) et $(y_n)_n$ définissant des systèmes orthonormés de X et de Y respectivement. Donc

$$\alpha(B_r) = \left\{ \sum_1^\infty \alpha_n y_n \quad ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{\lambda_n^2} \leq \frac{1}{r^2} \right. .$$

Divisant chaque λ_n par le nombre r, on voit que l'on peut supposer $r=1$.
Vue l'hypothèse (3.3.), l'image E de D est telle que $|E(\psi)| \leq \varepsilon$, pour toute ψ cylindrique $(\|\psi\|_k \leq 1)$ à support disjoint de $\alpha(B_r)$, admettant une base de dimension 1. On cherche à démontrer (3.4.) Soit $\mathbb{E}^\ell$ la base canonique de ψ (noter que ℓ est arbitrairement grand). Soit π l'opérateur de projection orhtogonale de Y sur $\mathbb{E}^\ell$. Alors $\pi(\alpha(B_r))$ est un ellipsoïde dont les longueurs $\lambda'_1 \dots \lambda'_\ell$ des demi-axes sont telles que $\lambda'_i \leq \lambda_i$ pour $i = 1 \dots \ell$. D'autre part $\pi(\bar{B}_r)$ est la boule $\{x \in \mathbb{E}^\ell ; \|x\| \leq R\}$. Nous voyons donc que l'on aura démontré (3.4.) et la proposition (3.2.) si l'on montre le lemme 2 énoncé quelques pages plus loin : faire dans (3.7.), R suffisamment grand et ε suffisamment petit. Pour montrer le lemme 2, nous utiliserons le lemme suivant :

(3.5.) <u>Lemme</u>

Soit $a(t) \in \mathcal{E}^\infty(\mathbb{R})$, telle que $0 \leq a(t) \leq 1$, égale à 1 pour $t \geq 2$ et 0 pour $t \leq 1$. Soit Σ^n la sphère unité de $\mathbb{E}^n$. A tout $\theta \in \Sigma^n$, et à tout $R > 1$ on associe la fonction suivante sur $\mathbb{E}^n$:

$$x \longmapsto \zeta^n_{R,\theta}(x) = a(R^{-1}\, \vec{x} \cdot \vec{\theta}).$$

On note ζ^n_R la moyenne de ces fonctions par rapport à la mesure σ^n (de masse totale 1) invariante de Σ^n.

$$\zeta^n_R(x) = \int_{\theta \in \Sigma^n} a(R^{-1}\, \vec{x} \cdot \vec{\theta})\, d\sigma^n(\theta).$$

Alors les ζ^n_R sont des fonctions radiales sur $\mathbb{E}^n$ qui vérifient les majorations suivantes pour $\rho = \|x\| \geq 2R\sqrt{n}$ et $R > 1$.

a) $\exists C > 0$, $\frac{1}{\zeta^n_R} \leq C$.

b) toutes les dérivées de ζ^n_R d'un ordre donné sont uniformément majoréees (lorsque n varie).

Preuve

Dans $\mathbb{E}^n$, l'aire de la portion de la sphère où $\|x\| = r$ vue d'un point y tel que $\|y\| = \rho$, est :

$$A^n_{r,\rho} = \frac{\int_{2\sqrt{n}/\rho}^{\sqrt{n}} (1-\frac{t^2}{n})^{\frac{n-3}{2}} dt}{2\int_0^{\sqrt{n}} (1-\frac{t^2}{n})^{\frac{n-3}{2}} dt} ;$$

$$\text{d'où } \zeta^n_R(\rho) = \begin{cases} 0 \text{ si } \rho < R \\ \dfrac{\int_{R/\rho}^{1} a(\frac{\rho y}{R})\,(1-y^2)^{\frac{n-3}{2}}\, dy}{2\int_0^1 (1-y^2)^{\frac{n-3}{2}}\, dy} \end{cases} ;$$

On cherche à montrer que $(\zeta^n_R)^{-1}$ est majoré ainsi que ces dérivées pour $\|x\| = \rho > 2R\sqrt{n}$. Or le changement de variable $y = \frac{t}{\sqrt{n}}$ donne

$$Z^n_R(\rho) = \begin{cases} 0 \text{ si } \rho < R \\ \dfrac{\int_{\frac{R\sqrt{n}}{\rho}}^{\sqrt{n}} a(\frac{\rho}{R}\frac{t}{\sqrt{n}})(1-\frac{t^2}{n^2})^{\frac{n-3}{2}} dt}{2\int_0^{\sqrt{n}} (1-\frac{t^2}{n^2})^{\frac{n-3}{2}} dt} & \text{si } \rho > R \end{cases} .$$

Or ce dernier dénominateur tend vers $2\int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ alors que pour $\rho > 2R\sqrt{n}$, le numérateur tend vers une quandité non nulle (si $n \to \infty$). Donc $(\zeta^n_R)^{-1}$ est majoré indépendamment de n pour $\|x\| > 2R\sqrt{n}$. Il suffit alors de montrer que pour tout k (et $\rho \geqslant 2R\sqrt{n}$) on a

$$\left|\left(\frac{d}{d\rho}\right)^k \zeta^n_R(\rho)\right| \leq C_k$$

$$\text{On a } \left(\frac{d}{d\rho}\right)^k \zeta^n_R(\rho) = \begin{cases} 0 \text{ si } \rho < R \\ \dfrac{\int_{\frac{R\sqrt{n}}{\rho}}^{\sqrt{n}} a^{(k)}(\frac{\rho t}{R\sqrt{n}})(\frac{t}{R\sqrt{n}})^k (1-\frac{t^2}{n^2})^{\frac{n-3}{2}} dt}{2\int_0^{\sqrt{n}} (1-\frac{t^2}{n^2})^{\frac{n-3}{2}} dt}, & \text{si } \rho > R \end{cases} .$$

Comme $(\frac{t}{R\sqrt{n}})^k \leq (\frac{\sqrt{n}}{R\sqrt{n}})^k = R^{-k}$, on voit que les dérivées de $\zeta^n_R(\rho)$ deviennent très petites lorsque R augmente (la majoration étant indépendante de n).

Pour majorer I , on utilise le fait que $\theta \in \Sigma_2^n$, la fonction $Z^n_{Rn^{-1/2},\theta} \cdot \psi \cdot (Z^n_{Rn^{-1/2}})^{-1}$ a un support contenu dans un demi espace qui ne coupe pas Q , et décrit un borné de $\mathcal{C}_b^k(\mathbb{E}^n)$. D'où

$$|II| \leq |\Sigma_2^n| \cdot C\varepsilon = 1 \cdot C\varepsilon .$$

4 - Distributions cylindriques :

Le paragraphe qui suit est motivé par l'étude des équations aux dérivées partielles du type chaleur, ondes, ou Schrödinger sur le produit d'une droite $\mathbb{R}_t$ (point générique noté t) et d'un espace de Hilbert réel X (point générique x).

(4.1.) Le système projectif d'espaces vectoriels associés à $\mathbb{R}_t x X$.

C'est le système projectif des espaces vectoriels $\mathbb{R}_t x X_i$, relativement aux applications linéaires Id_t x sij , où (X_i, sij) est le système projectif usuel associé à l'espace vectoriel topologique X .

(4.2.) Définition

Une distribution x cylindrique sur $\mathbb{R}_t$ x X régulière est définie par la donnée d'une fonction continue

$$[0, +\infty[\longrightarrow \mathcal{D}\mathcal{C}(X)$$
$$t \longmapsto f(t,.) ,$$

La distribution F est ainsi définie. Pour tout X_i et toute fonction $\tilde{\varphi}(t,\tilde{x}) \in \mathcal{C}_b^k(\mathbb{R}_t \times X_i)$, posant $\varphi = \tilde{\varphi} \circ (Id_t \times s_i)$

$$\boxed{(F,\varphi) = \int_0^\infty dt\ (f(t,.), \tilde{\varphi}(t,.))} \tag{4.3.}$$

On écrira également (par convention)

$$F = \int_0^\infty (\delta_t \otimes f(t,.))dt . \tag{4.4.}$$

et l'on dira aussi que F admet la désintégration $t \longmapsto f(t,.)$ par rapport à t, ce langage étant emprunté à la théorie de l'intégration.

(4.5.) Quelques remarques

a) La donnée d'une telle distribution équivaut à la donnée d'un système projectif $f_i(t,.)$ de sitributions bornés relativement au système projectif $(X_i$, si) les applications $t \longmapsto f_i(t,.)$ étant continues de $[0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathcal{C}'_b(X_i)$,

b) La donnée de F entraine la donnée pour tout i , d'une distribution bornée $f_i(t,x)$ sur R x X_i , nulle pour t 0. Ces distributions sont régulières en t .

c) On peut définir la transformée de Fourier partielle $\hat{f}(t,\ )$ de f comme étant la fonction

$$(t\ ;\xi) \qquad \hat{f}(t,\xi) = (f(t,\bullet),\ \exp - i\xi\bullet)\ .$$

On peut aussi définir la transformée de Fourier Laplace

$$(u+iv\ ;\xi) \longmapsto \int_0^{\infty} \hat{f}(t,\xi)\ \exp(-it\ (u+iv))\ dt\ .$$

d) Soit α une application linéaire continue de X dans Y. On peut définir l'image de F (admettant la désintégration (4.4.)) par $Id_t \times \alpha$ comme étant la distribution y cylindrique sur $\mathbb{R}_t \times Y$, régulière en t admettant la désintégration

$$\int_0^{\infty} \left[\delta_t \boxtimes \alpha(f(t,.))\right]\ dt\ .$$

e) En procédant comme dans Krée [2], on peut même définir l'image de F par une application

$$\mathbb{R}_t \times X \longrightarrow R_t \times Y$$

$$(t\ ;\ x) \longmapsto t,\ \alpha_t(x)\ ,$$

où pour tout t, α_t est une application linéraire continue $X \longrightarrow Y$,

f) <u>Produit de convolution</u>

Soient F et G deux distributions x cylindriques sur $\mathbb{R}_t \times X$, régulières en t, avec

$$F = \int_0^{\infty} \delta_t \boxtimes f(t,.)dt \quad \text{et} \quad G = \int_0^{\infty} \delta_t \boxtimes g(t,.)\ dt$$

On forme $h(t,o) = \int_0^t f(t-u,o) * g(u,o)\ du$ si $t \geqslant 0$. On voit que la fonction h définit une application continue de $[0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathcal{D}\mathcal{E}'(X)$.

On pose $H = \int_0^{\infty} \delta_t \boxtimes h(t,o)\ dt$ et $H = F * G$ ce produit de convolution est associatif et commutatif.

<u>Application à l'équation de la chaleur</u>:

Ce qui précède permet d'exposer certaines constructions de Dalecki [1] et de A.Pietseh [1]. On considère l'opérateur de la chaleur $\partial_t - \Delta$ sur $\mathbb{R}_t \times X$, où X est un espace de Hilbert réel. On rappelle que pour tout n, la solution élémentaire $E^n(t,x)$ de $\delta_t - \Delta$ sur $R_t \times \mathbb{E}^n$ s'écrit

$$E^n(t,x) = \begin{cases} 0 \text{ si } & t < 0 \\ (4\pi t)^{-n/2} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right) \text{ si } & t > 0 \end{cases}$$

Cette fonction positive est localement intégrable, mais elle n'est pas intégrable Il n'y a donc pas d'espoir d'associer à la donnée des E^n, une mesure cylindrique sur $\mathbb{R}_t \times X$. Cependant on peut écrire

$$E^n = \int_0^{\infty} \delta_t \boxtimes g_{2tId}(x_1 \dots x_n)\ dt$$

où $g_{2t\,Id}$ désigne la loi gaussienne sur $\mathbb{E}^n$ de moyenne nulle et d'opérateur de variance 2t Id. D'où l'idée d'introduire sur $\mathbb{R}_t \times X$ la distribution x-cylindrique, régulière en t :

$$E = \int_0^{\infty} \delta_t \otimes g_{2t\,Id(X)}\, dt \quad ,$$

où $g_T(x)$ désigne la loi gaussienne sur X , de moyenne nulle et d'opérateur de variance T . Et l'on voit qu'en ~~a~~ un sens convenable, E est une solution élémentaire de l'opérateur $\delta_t - \Delta$.

On voit alors que pour $h \in \mathcal{E}^o_{cyl\ b}(X)$, alors

$$(t\ ;\ x) \longmapsto u(t,x) = \int_X h(x-y)\ g_{2t\,Id}(y)$$

est solution du problème de Cauchy

$$\left| \begin{array}{l} (\delta_t - \Delta)\ b(t,X) = 0 \quad \text{si} \quad t>0 \\ \qquad\qquad u(0,x) = h(x) \end{array} \right.$$

Mais si (voir Pietsch [1] Daleeki [1]) l'on veut étudier le problème de Cauchy pour une fonciton h plus générale , on peut remplacer $\partial_t - \Delta$ par son image $\partial_t - \alpha\Delta\alpha'$ par $Id_t \times \alpha$, où α est un opérateur de Hilbert Schmitt. Alors le nouvel opérateur admet la solution élémentaire

$$\tilde{E} = \int_0^{\infty} \delta_t \otimes \alpha(g_{2t\,Id})\ dt = \int_0^{\infty} \delta_t \otimes g_{\alpha\alpha'}\ dt \quad .$$

Cette solution élémentaire est une mesure sur $\mathbb{R}_t \times Y$. On peut donc définir pour $h \in \mathcal{E}^o_b(Y)$ la fonction

$$(t,y) \longmapsto \tilde{u}(t,y) = \int_{z \in Y} h(y-z)\, d_{g_{\alpha\alpha'}}(z) \quad .$$

Cette fonction a été étudiée en détail par Dalecki [1]. Dans Pietsch [1], est examiné le cas plus général d'opérateurs à coefficients variables.

<u>Opérateur $\partial_{tt} - \Delta_x$ sur $\mathbb{R}_t \times H$</u>

Formellement, on cherche une $E(t,x)$ sur $\mathbb{R} \times H$, nulle pour $t<0$, et telle que

$$\partial_{tt} E - \Delta E = \delta_o(t,x) \quad .$$

Une transformation de Fourier partielle donne

$$\grave{E}(t,\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t<0 \\ \dfrac{\sin(t\|\xi\|)}{\|\xi\|} & \text{si} \quad t>0 \quad . \end{cases}$$

D'où l'idée de considérer

$$F = \int_0^\infty \delta_t \otimes f_t \, dt \quad ,$$

où f_t est la distribution cylindrique sur H , de transformée de Fourier

$$\widehat{f_t}(\xi) = \frac{\sin(t\|\xi\|)}{\|\xi\|} \quad ,$$

Malheureusement (voir Gelfand Silov [1]), si $H = \mathbb{R}^n$, f_t est d'ordre augmentant avec n . (Cependant f_t est portée par la boule où $\|x\| \leq t$).

<u>Opérateur de Schrödinger $i^{-1}\partial_t - \Delta_x$ avec $\mathbb{R}_t \times H_x$</u>

Par le même procédé, on trouve une solution élémentaire

$$E = \int_0^\infty \delta_t \otimes f_t \, dt$$

avec $\widehat{f_t}(\xi) = \exp(-it\|\xi\|^2)$.

Donc f_t est la distribution cylindirque intervenant dans la définition des intégrales de Feynman : voir C.M. de Witt [1] .

<u>Quelques problèmes</u>

a) Description de $\widehat{\mathcal{E}}^k_{cyl\ b}(X)$.

b) Relation entre la topologie localement convexe la moins fine sur $\mathcal{E}^k_{cyl\ b}(X)$ rendant convergentes les suites qui convergent au sens de I.M. Visik [1] , et la topologie $\mathcal{C}^k$ introduite dans cet article.

c) Etude détaillée de l'équation de Schrödinger.

d) Problèmes de partition de l'unité dans l'espace $\mathcal{E}^k_{cyl\ b}(X)$. Définition du support d'une distribution.

e) Théorème de Paley Wiener pour les distributions nulles en dehors d'un borné. Etude des équations de convolution.

f) Etude détaillée de la distribution cylindrique de Feynman.

g) Relativement aux mesures, le théorème de Sazanov n'est en fait qu'un cas particulier d'un théorème de Kwapien-Schwartz (voir séminaire à l'Ecole Polytechnique 1969-70) relatif aux applications p-sommantes et p-radonifiantes. Peut-on étendre aux distributions les théorèmes de Kwapien-Schwartz ?

h) Généralisation du théorème de Sazanov-Minlov à des distributions (cylindriques) bornées d'ordre non borné.

BIBLIOGRAPHIE

A.BADRIKIAN

[1] Lecture notes N° 129 - (1970) - Springer Verlag Berlin.C.M. de Witt.

Cecil B. de WITT.

[1] Feynman's Path. Integral,
Comm. math. phys. 18, 47-67 (1072).

YU L.DALESKII

[1] Opérateurs elliptiques en dimension infinie, et équations paraboliques correspondantes. Uspekhi Mat Nank 22 : 4 (136).(1967). 3-54
= Russian Math. Surveys 22 : 4 (1967), 1-53.

L.GROSS

[1] Potential theory on Hilbert space. Journ. of Funct. analysis 1. 123-181 (1967

D.H. FREMLIN, D.J.H. GARLING and R.G. HAYDON

[1] Bounded measures on topological spaces. Proc. Lond. Mat. Soc. (3). 25 (1972) 115-136.

M.I. VISHIK.

[1] Le parametrix d'un opérateur elliptique, avec un nombre infini de variables
= Russian Math. Surveys.

I.M. GELFAND et N.Ya VILENKIN

[1] Tome I du traité relatif aux fonctions généralisées :

[2] (Fizmatgiz Moscou 1961 = Dunod-Paris tome IV du même traité.

M. ANN. PIECH

[1] A fundamental solution of parabolic équations on Hilbert space Journ. of Funet. analysis 3 (1969), 85-114.

P.KREE

[1] Courants et courants cylindriques sur des variétés de dimension infinie. Actes édités (1973) par Birkhauser (Bale, Suisse) d'un séminaire de théorie d'approximation (Oberwollfach Aout 1971)

[2] Equation aux dérivées partielles à coefficients aléatoires. Istituto nazionale di Alta Mathematica Symposia Mathematica. Volume VII (1971) p. 515-546.

M. P. KREE
Université de PARIS VI
Mathématiques
Quai Saint Bernard
75005 PARIS