

G. MAURY

**La condition « intégralement clos », IV, modules de type fini sur un ordre maximal**

*Publications du Département de Mathématiques de Lyon*, 1974, tome 11, fascicule 1, p. 1-22

[http://www.numdam.org/item?id=PDML\\_1974\\_\\_11\\_1\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PDML_1974__11_1_1_0)

© Université de Lyon, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

LA CONDITION "INTEGRALEMENT CLOS", IV,  
 MODULES DE TYPE FINI SUR UN ORDRE MAXIMAL

par G. MAURY

Sauf au paragraphe 3  $R$  désigne un ordre maximal régulier, noethérien de son corps des fractions (pour la définition on pourra se reporter par exemple à ASANO (11), § 1).

Soit  $\mathfrak{p}$  un idéal premier minimal de  $R$  (c'est-à-dire un idéal premier non nul ne contenant strictement aucun idéal premier non nul de  $R$ ). Soit  $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$  la famille des idéaux à gauche de  $R$  contenant un idéal bilatère  $R\mathfrak{s}R$  avec  $\mathfrak{s} \notin \mathfrak{p}$  et soit  $\mathfrak{p} \mathcal{F}$  la famille des idéaux à droite de  $R$  contenant un idéal bilatère  $R\mathfrak{s}R$ ,  $\mathfrak{s} \notin \mathfrak{p}$ . On sait que ces familles sont topologisantes et idempotentes [(1), I, 1]. Conformément aux notations du mémoire [1]  $R_{\mathfrak{p}}$ ,  ${}_{\mathfrak{p}}R$  désignent les localisés de GABRIEL par rapport aux familles  $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$  et  $\mathfrak{p} \mathcal{F}$  (GABRIEL [12]) et [2] (exercices pages 157 et suivantes), HACQUE [3] ; GOLDMAN [9] (sections 1,2,3,4). On sait que l'on a  $R_{\mathfrak{p}} = {}_{\mathfrak{p}}R$  ([1], I, 14).

Dans le premier paragraphe, nous précisons la structure de  $R_{\mathfrak{p}}$  lorsque les familles  $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$  et  $\mathfrak{p} \mathcal{F}$  sont plates au sens de HACQUE ([3] page 106,

définition) . Rappelons qu'une famille  $\mathcal{F}$  topologisante et idempotente d'idéaux à gauche d'un anneau  $\mathcal{O}$  est plate si le foncteur localisation associée commute aux limites inductives. (\*)

Dans le deuxième paragraphe, nous introduisons la famille topologisante et idempotente  $\mathcal{F}_p$  des idéaux à gauche de  $R$  contenant pour tout idéal premier minimal  $\mathfrak{p}$  de  $R$ , un idéal bilatère  $R\mathfrak{s}R$  avec  $\mathfrak{s} \notin \mathfrak{p}$ , et la localisation associée [(2) ou (3) ou (9) ou (12)].

Dans le troisième paragraphe on donne des résultats sur le dual d'un  $R$ -module à gauche dont la plupart ne sont que des lemmes connus qui seront utilisés dans la suite.

Dans le quatrième paragraphe, en supposant que pour tout idéal premier minimal  $\mathfrak{p}$  de  $R$  les familles  $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$  et  $\mathfrak{p}\mathcal{F}$  sont plates (2), on démontre que le bidual  $M^{**}$  d'un  $R$ -module à gauche de type fini  $M$  tel que

$$H_M = \bigcap_{h \in \text{Hom}_R(M, R)} \ker h \text{ soit } \mathcal{F}_p\text{-négligeable, est isomorphe au localisé de}$$

GABRIEL  $T(M)$  pour la localisation de GABRIEL définie par la famille topologisante et idempotente  $\mathcal{F}_p$ . Ce résultat généralise en quelque sorte aux cas non commutatifs le théorème 5,11 de B.R.L. AUSLANDER [(7), page 57] obtenu lorsque  $R$  est un domaine d'intégrité commutatif, noethérien, intégralement clos et lorsque  $M$  est un  $R$ -module de type fini dont le sous-module de torsion est  $\mathcal{F}_p$ -négligeable.

(\*) Un résultat récent de M. CHAMARIE établit que pour tout idéal premier  $\mathfrak{p}$  de  $R$  les familles  $\mathfrak{p}\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$  sont plates [à paraître aux "Communications of Algebra"] .

§ 1. - ETUDE DE  $R_p$  LORSQUE LES FAMILLES  $\mathcal{F}_p$  ET  $p \mathcal{F}$  SONT PLATES (1).

Donnons pour la commodité du lecteur la démonstration suivante due à J. RAYNAUD (5).:

PROPOSITION 1. - Si  $\alpha$  est un idéal premier d'un anneau  $S$ , noethérien à gauche, alors  $\alpha$  est l'unique idéal maximal dans l'ensemble des idéaux bilatères n'appartenant pas à  $\mathcal{F}_\alpha$ . Si de plus  $\mathcal{F}_\alpha$  est une famille plate,  $S_\alpha$  admet un unique idéal bilatère maximal.

DEMONSTRATION. - On a  $\alpha \notin \mathcal{F}_\alpha$  par définition même de  $\mathcal{F}_\alpha$  (rappelons que  $\mathcal{F}_\alpha$  est l'ensemble topologisant et idempotent des idéaux à gauche  $F$  de  $S$  tel que  $F$  contienne un idéal bilatère  $R_sR$  de  $R$  avec  $s \notin \alpha$ ). Si  $\alpha'$  est un idéal bilatère de  $S$  tel que l'on ait  $\alpha' \notin \mathcal{F}_\alpha$ , on peut écrire :  $\forall s \notin \alpha, R_sR \notin \alpha'$  et comme  $\alpha'$  est bilatère on en déduit  $s \notin \alpha'$  donc  $\alpha' \subseteq \alpha$ . Supposons que  $\mathcal{F}_\alpha$  soit plat. Soit  $\mathcal{M}$  un idéal bilatère maximal de  $S_\alpha$ . Alors si  $\psi_S : S \rightarrow S_\alpha$  est l'épimorphisme canonique (plat) associé à  $\mathcal{F}_\alpha$  [(3) th. 3.6 page 110,],  $\psi_S^{-1}(\mathcal{M})$  est un idéal bilatère de  $S$ . Or on sait que,  $\psi_S$  étant un épimorphisme plat, l'on a  $\mathcal{M} = S_\alpha \cdot \psi_S^{-1}(\mathcal{M})$  d'après SILVER [(6), démonstration de la proposition 1,6 ; on note  $x.a = x\psi_S(a), a \in S, x \in S_\alpha$ ] et  $\psi_S^{-1}(\mathcal{M})$  n'est pas contenu dans  $\mathcal{F}_\alpha$  (en effet d'après (3) lemme 3.1 et théorème 3.6,  $\mathcal{F}_\alpha$  est l'ensemble des idéaux à gauche  $F$  de  $S$  tels que  $S_\alpha = S_\alpha \psi_S^{-1}(F) \neq S_\alpha$ ). On a donc  $\psi_S^{-1}(\mathcal{M}) \subseteq \alpha$  et  $\mathcal{M} = S_\alpha \cdot \psi_S^{-1}(\mathcal{M}) \subseteq S_\alpha \cdot \alpha \neq S_\alpha$  (car  $\alpha \notin \mathcal{F}_\alpha$ ). Ainsi  $\mathcal{M}$  est compris dans  $\text{Ann}_{S_\alpha} (S_\alpha / S_\alpha \cdot \alpha)$  et par maximalité de  $\mathcal{M}$ , puisque cet annulateur est idéal bilatère de  $S_\alpha$  distinct de  $S_\alpha$ , on a  $\mathcal{M} = \text{Ann}_{S_\alpha} (S_\alpha / S_\alpha \cdot \alpha)$  d'où l'unicité de  $\mathcal{M}$ .

(1) en vertu du résultat déjà cité de M. CHAMARIE  $\mathcal{F}_p$  et  $p \mathcal{F}$  sont toujours plats.

THEOREME 2. - Soit  $R$  un ordre maximal régulier, noethérien, de son corps des fractions  $K$  et soit  $\mathfrak{p}$  un idéal premier bilatère minimal de  $R$ . Supposons que les familles  $\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}$  et  $\mathfrak{p}\mathfrak{S}$  sont plates <sup>(1)</sup>. Alors  $R_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p} R$  est un ordre d'ASANO (4) de  $K$ , noethérien, dont l'idéal maximal unique est  $\mathfrak{p} R_{\mathfrak{p}} = R_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}$ . C'est un anneau quasi-local [au sens de MICHLER (4)], héréditaire et c'est un anneau principal.

DEMONSTRATION. - Soit, d'après la proposition 1,  $\mathfrak{M}$  l'idéal bilatère maximal unique de  $R_{\mathfrak{p}}$ . On a  $\mathfrak{M} \subseteq R_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p} \subseteq \overline{R_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}} = \overline{\mathfrak{p} R_{\mathfrak{p}}}$  d'après la démonstration précédente et d'après [(1), I, 17 et I, 23]. Il en résulte que  $\mathfrak{M} = \mathfrak{p} R_{\mathfrak{p}} = R_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p} = \mathfrak{p} R_{\mathfrak{p}}$ . On sait que  $\mathfrak{p} R_{\mathfrak{p}}$  est un  $R_{\mathfrak{p}}$ -idéal clos [(1), I, 16] d'ailleurs seul idéal premier minimal de  $R_{\mathfrak{p}}$  [appliquer (1), I, 21 et I, 23]. En appliquant [(4) ; 2,9] on voit que  $\mathfrak{p} R_{\mathfrak{p}}$  est le radical de JACOBSON de  $R_{\mathfrak{p}}$  qui est donc quasi-local [(4) page 422]. D'après [(4) ; 3,5]  $R_{\mathfrak{p}}$  est héréditaire et d'après [(4) ; 3,4] c'est un anneau principal des deux côtés.

REMARQUE 1. - Si la famille  $\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}$  seule est plate,  $R_{\mathfrak{p}}$  est noethérien à gauche ; on a  $\mathfrak{p} R_{\mathfrak{p}} = R_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}$  et  $R_{\mathfrak{p}}$  est un ordre d'ASANO de  $K$  dont  $\mathfrak{p} R_{\mathfrak{p}}$  est le radical de JACOBSON donc quasi-local.

REMARQUE 2. Donnons des exemples d'ordres maximaux, réguliers, noethériens, sans diviseurs de zéro  $R$ , ordres de leur corps des fractions, pour lesquels, pour tout idéal premier minimal  $\mathfrak{p}$ , les familles  $\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}$  et  $\mathfrak{p}\mathfrak{S}$  sont plates :  
1)  $R$  a tous ses idéaux (à droite, à gauche) bilatères. La platitude de la famille  $\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}\mathfrak{S}$  résulte de [(1), I.5] et de [(3), corollaire 3,7 page 111].

---

(1) D'après le résultat de Chamarie, cette condition est toujours réalisée.

2) R est un ordre d'ASANO (4) : on sait alors d'après le théorème (3.5) de mémoire (4) que R est héréditaire et on applique alors le corollaire (3.7) du mémoire (3).

DEFINITION. - Nous dirons qu'un ordre maximal régulier, noethérien de son corps des fractions est fort si  $\mathcal{F}_p$  et  $\mathcal{F}_p^*$  sont, pour tout idéal premier minimal  $p$  de R, des familles plates. (1)

## § 2. LA FAMILLE $\mathcal{F}_p$ .

Soit R un ordre maximal, régulier, sans diviseurs de zéro, noethérien, de son corps des fractions K. Soit P la famille des idéaux premiers minimaux de R. Conformément à [(1), partie I] considérons la famille  $\mathcal{F}_p$ , topologisante et idempotente, des idéaux à gauche de R contenant pour tout idéal premier  $p$  appartenant à P un idéal  $sR$  avec  $s \notin p$ . Notons T le foncteur localisation associée [(2) ou (3) ou (7) ou (9)] : nous noterons indifféremment  $T(M)$  ou  $M_{\mathcal{F}_p}$  pour le localisé du R-module à gauche M (De même le localisé de M par rapport à la famille  $\mathcal{F}_p$  sera noté  $M_p$  ou  $M_{\mathcal{F}_p}$ ). Notons  $\mathcal{C}$  la sous-catégorie localisante associée [(3) page 97] : c'est la sous-catégorie pleine de la catégorie des R-modules à gauche dont les objets sont les modules  $\mathcal{F}_p$ -négligeables (c'est-à-dire les modules  $M = \mathcal{F}_p(M) = \{x \in M \mid \exists F \in \mathcal{F}_p \text{ avec } Fx = 0\}$ ).  $\mathcal{C}$  est, dans le langage de B/R/L/ AUSLANDER, la "closed dense subcategory" associée à T [(7) pages 1 et 12].

---

(1) d'après le résultat de M. CHAMARIE, tous les ordres maximaux réguliers, noethériens, dans leur corps des fractions sont forts.

Remarquons qu'avec les notations de (1), on a  $R_P = R_{\mathcal{F}_P} = R$  car, d'après la démonstration [(1), I, 26]  $R = R_{P'}$ , où  $P'$  est l'ensemble des idéaux premiers minimaux de  $R$  tels que  $R_{P'} \supseteq R$ . On voit donc que l'on a  $P' = P$ . Soit  $M$  un  $R$ -module à gauche. Posons  $H_M = \bigcap_{h \in \text{Hom}_R(M, R)} \ker h$  et supposons  $H_M = 0$  (par exemple  $M$  est un  $R$ -module à gauche libre ou bien isomorphe à un idéal à gauche de  $R$ ). Remarquons que  $H_M = 0$  entraîne que  $M$  est sans torsion (car  $am = 0$ ,  $m \in M, a \neq 0, a \in R$  implique :  $\forall h \in \text{Hom}_R(M, R)$ ,  $h(am) = ah(m) = 0$  donc  $h(m) = 0$  et  $m \in H_M$  donc  $m = 0$ ). Remarquons que lorsque  $R$  est de plus un ordre d'ASANO, la famille  $\mathcal{F}_P$  se réduit à  $\{R\}$  car si l'idéal bilatère  $\mathcal{U}$  appartient à  $\mathcal{F}_P$ , on a, pour  $\mathcal{U} \neq R$ ,

$$\mathcal{U} = \prod_{i=1}^{i=r} \mathcal{P}_i^{P_i}, \quad \mathcal{P}_i \in P \text{ et } \mathcal{U} \subsetneq \mathcal{P}_i, \quad i=1, \dots, r, \text{ ce qui contredit } \mathcal{U} \in \mathcal{F}_P.$$

Ainsi on a  $\mathcal{U} = R$  et comme tout idéal à gauche appartenant à  $\mathcal{F}_P$  contient un idéal bilatère appartenant à  $\mathcal{F}_P$ , on voit que  $\mathcal{F}_P = \{R\}$ . La famille  $\{R\}$  est plate, comme d'ailleurs toute famille topologisante et idempotente d'idéaux à gauche de  $R$  car  $R$  est héréditaire [d'après (4)]. D'après [(3) théorèmes 2,2 et 3,6]  $T(M), M, R \otimes_R M$  sont isomorphes pour tout  $R$ -module à gauche  $M$ .

### § 3. QUELQUES LEMMES SUR LE DUAL D'UN $R$ -MODULE A GAUCHE.

Soit  $M$  un  $R$ -module à gauche,  $R$  désignant ici un anneau non nécessairement commutatif sans autre hypothèse générale. On sait que le dual de  $M$  est le groupe abélien  $\text{Hom}_R(M, R)$  muni d'une structure de  $R$ -module à droite par :

soient  $f : M \rightarrow R$ ,  $a \in R$ ;  $(fa)(x)$ ,  $x \in M$ , est l'élément  $f(x)a \in R$ .

On note ce  $R$ -module à droite  $M^*$ . Le dual d'un  $R$ -module à droite  $P$  est un  $R$ -module à gauche  $P^* = \text{Hom}_R(P, R)$  [ $f : P \rightarrow R$ ,  $a \in R$ ,  $x \in P$ ,  $(af)(x) = af(x)$ ]. Le bidual d'un  $R$ -module à gauche (resp. à droite)  $M$  est le dual du  $R$ -module à droite (resp. à gauche)  $M^*$ . On le note  $M^{**}$  et parfois  $M_R^{**}$  lorsqu'on veut préciser que  $M$  est considéré comme  $R$ -module (d'un côté).

PROPOSITION 3. - [(8), proposition 6,2 page 121] : *Si  $R$  est héréditaire à gauche et noethérien à gauche et si  $M$  est un  $R$ -module à gauche de type fini,  $H_M = \bigcap_{h \in M^*} \ker h$  est un composant direct de  $M$  et  $M/H_M$  est une somme directe de modules isomorphes à des idéaux à gauche de  $R$ .*

LEMME 4. - *Si  $M$  est un  $R$ -module à gauche de type fini,  $M^*$  est un  $R$ -module à droite de type fini lorsque  $R$  est noethérien à droite.*

LEMME 5. - *Si  $M$  est un  $R$ -module à gauche et si  $R$  est sans diviseurs de zéros,  $M^*$  et  $M^{**}$  sont sans torsion.*

PROPOSITION 6. - *Si  $R$  est noethérien, sans diviseurs de zéro, la famille  $\mathcal{R}$  des idéaux à gauche non nuls de  $R$  est topologisante, idempotente et plate. Si  $K$  désigne le corps des fractions de  $R$  et si  $M$  est un  $R$ -module à gauche sans torsion,  $K \otimes_R M$  est isomorphe à une enveloppe injective de  $M$ .*



DEMONSTRATION. - On sait que  $R$  admet un corps des fractions et que  $R$  vérifie la condition de ORE des deux côtés d'après GOLDIE. On sait alors que  $\mathcal{K}$  est une famille topologisante et idempotente [(2) exercice 22 page 162]. Par ailleurs un système cofinal de  $\mathcal{K}$  est constitué par les idéaux libres  $Rr$ ,  $r \neq 0$ ,  $r \in R$ . D'après [(3), corollaire 3,7] la famille  $\mathcal{K}$  est plate. On déduit de [(3) propositions 2,2 et 3,6] que le localisé  $M_{\mathcal{K}}$  de  $M$  est isomorphe à  $K \otimes_R M$ . Puisque  $M$  est sans torsion  $\mathcal{K}(M) = \{x \in M \mid \exists r \in R, rm=0, r \neq 0\} = 0$  et  $M_{\mathcal{K}}$  est l'enveloppe  $\mathcal{K}$ -injective (9) de  $M$  c'est-à-dire l'enveloppe injective de  $M$ .

DEFINITION (rappel). - Soit  $M$  un  $R$ -module à gauche et soit  $M^{xx}$  son bidual.

Soit  $\theta_M$  l'homomorphisme canonique de  $M$  dans  $M^{xx}$  défini par :  $\forall m \in M$ ,  $\forall h \in M$ ,  $\theta_M(m)(h) = h(m)$ ;  $\theta_M$  est un homomorphisme de  $R$ -module à gauche. On dit que  $M$  est réflexif si  $\theta_M$  est un isomorphisme (c'est le cas, par exemple lorsque  $M$  est un  $R$ -module à gauche libre de type fini).

LEMME 7. - Si  $M$  est un  $R$ -module à gauche réflexif, on a  $H_M = \bigcap_{h \in M^*} \ker h = 0$ .

PROPOSITION 8. - Soit  $R$  un anneau noethérien, sans diviseurs de zéro, ordre maximal régulier de son corps des fractions  $K$ . Soit  $N$  un  $R$ -module à gauche de type fini tel que  $N$  soit réflexif et soit  $M$  un  $R$ -module à gauche de type fini, sans torsion, contenant  $N$  comme sous-module, tel que  $M/N$  soit un module de torsion non trivial, alors  $\text{Ann}_R(M/N)$  est un  $c$ -idéal (voir (1), I,6 pour la définition).

DEMONSTRATION : Lorsque  $R$  est commutatif la proposition précédente a été démontrée par M. AUSLANDER et D. BUCHSBAUM (13). Soit  $b_1, \dots, b_t$  des générateurs de  $M$  ; alors  $\mathcal{A} = \text{Ann}_R(M/N) = \{r \in R, r\bar{b} = 0, \forall \bar{b} \in M/N\}$  ; c'est un idéal bilatère de  $R$ . On a  $\mathcal{A} = \bigcap_{i=1}^t \mathcal{A}_i$ , en posant  $\mathcal{A}_i = \text{Ann}_R(R\bar{b}_i) = \{r \in R, rR\bar{b}_i = 0\}$  ;

il suffit de démontrer le théorème lorsque  $M/N$  est engendré par un seul élément  $\bar{b}$  car l'intersection d'un nombre fini de  $\mathcal{A}$ -idéaux est un  $\mathcal{A}$ -idéal.

On suppose donc  $M = N + Rb$ . Observons que si  $h$  appartient à  $N^X$ ,  $\bar{h}$  s'étend en une application  $\bar{h} = 1_K \otimes h$  tel que le diagramme suivant soit commutatif (on note étant donné un  $R$ -module à gauche  $P$ ,  $f_P$  l'application qui à  $x \in P$  fait correspondre  $1 \otimes x$ ,  $f_P$  et  $1_K \otimes h = \bar{h}$  sont des homomorphismes de  $R$ -modules à gauche).

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{h} & R \\ f_N \downarrow & & \downarrow f_R \\ K \otimes_R N & \xrightarrow{\bar{h}} & K \otimes_R R = K \end{array}$$

Si  $x$  appartient à  $K \otimes_R N$  est tel que  $\bar{h}(x) = 0$ , pour tout  $h$  appartenant à  $N^X$ , démontrons que

l'on a  $x = 0$  : d'abord  $K \otimes_R N$  est l'enve-

loppe injective  $\widehat{N}$  de  $N$  car  $N$  est sans torsion (proposition 6);  $f_N$  et  $f_R$  sont des monomorphismes car  $N$  et  $R$  sont sans torsion (lemme 5) [le morphisme

canonique  $\psi_N : N \rightarrow N_{\mathcal{A}}$  est un monomorphisme et l'on a  $f_N = \psi_N$  à un isomorphisme multiplicatif près [(9) page 28, th. 4,3, (3)  $\Rightarrow$  (4) ou (3); 2,2(C)] .

Convenons de confondre  $f_N(N)$  et  $N$ ,  $f_R(R)$  et  $R$ . Soit  $x \neq 0$ , il existe  $t \neq 0$  tel que  $tx \in N$  et  $tx \neq 0$ . Si l'on a  $\bar{h}(x) = h(tx) = 0$  pour tout  $h$  appartenant à  $N^X$ , on a  $tx \in H_N$  donc  $tx = 0$  (lemme 7) contrairement à  $tx \neq 0$ . On a donc  $x=0$ .

Démontrons :  $r \in \text{Ann}_R(M/N) \Leftrightarrow \bar{f}(rRb) = h(rRb) \in R, \forall h \in N^X$ . En effet on a :  $r \in \text{Ann}_R(M/N) \Rightarrow rRb \in N$  et  $\bar{h}(rRb) = h(rRb) \in R$ . Réciproquement si  $\bar{h}(rRb)$  appartient à  $R$  pour tout  $h, h \in N^X$ , posons  $b' = \lambda b, \lambda \in R$ , on a  $\bar{h}(rb') \in R$  ;

l'application  $u : h \longmapsto \bar{h}(rb')$  est un élément de  $N^{xx} = N$ . Il existe donc  $a_b, \in N$  tel que  $\theta_N(a_b,)(h) = u(h) = \bar{h}(rb') = h(a_b, ) = \bar{h}(a_b, )$  et  $\bar{h}(a_b, -rb') = 0, \forall h \in N^x$  donc  $rb' \in N$ , d'après la remarque précédente et  $rRb \in N$  donc  $rR\bar{b} = 0$  et  $r \in \text{Ann}_R(M/N)$ .

Puisque  $N^x$  est de type fini (lemme 4) engendré par  $h_1, \dots, h_n$  on peut écrire  $\text{Ann}_R(M/N) = \{r, r \in R \mid \bar{h}_i(rRb) \in Rn, \forall i, i=1, \dots, n\}$ . Posons  $\bar{h}_i(b) = u_i v^{-1}$  (on peut prendre le même élément  $v$  car  $R$  vérifie la condition de ORE par rapport à  $R - \{0\}$ ). On a, pour  $i = 1, \dots, n, rRu_i v^{-1} \subseteq R$  et  $rRu_i \subseteq Rv$ . Posons  $\alpha'_i = Rv, Ru_i = \{t \in R \mid tRu_i \subseteq Rv\}$ ;  $\alpha'_i$  est le plus grand idéal bilatère de  $R$  contenu dans  $Rvu_i^{-1}$  (si  $u_i = 0$ , on a  $R = \alpha'_i$ ). Or  $Rvu_i^{-1}$  est un  $R$ -idéal à gauche maximal dans sa classe modulo l'équivalence d'ARTIN, donc  $\alpha'_i \subseteq Rvu_i^{-1}$  entraîne  $\alpha'_i \subseteq \bar{\alpha}'_i \subseteq Rvu_i^{-1}$ , en notant  $\bar{\alpha}'_i$  le  $c$ -idéal de la classe de  $\alpha'_i$  modulo l'équivalence d'ARTIN (pour plus de précisions se reporter à (14) chapitre III sections 2 et 3). On a donc  $\alpha'_i = \bar{\alpha}'_i$  et  $\alpha'_i$  est un  $c$ -idéal donc aussi  $\alpha = \bigcap_{i=1}^n \alpha'_i = \text{Ann}_R(M/N)$ ; Comme  $\alpha$  est distinct de  $R$ , il admet comme idéaux premiers associés des idéaux premiers minimaux de  $R$  contenant  $\alpha$ , car  $\alpha$  est bilatère.

PROPOSITION 9. - Soit  $M$  un  $R$ -module à gauche tel que  $H_M = 0$ . Soit  $\mathfrak{p}$  un idéal premier de  $R$ . Supposons l'anneau  $R$  noethérien à gauche, sans diviseurs de zéro et la famille  $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$  associée à  $\mathfrak{p}$  plate<sup>(1)</sup>. On a alors

$$H_{M_{\mathfrak{p}}} = \bigcap_{\tau \in (M_{\mathfrak{p}})^x} \ker \tau = 0 \text{ en notant } (M_{\mathfrak{p}})^x_{R_{\mathfrak{p}}} = \text{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}^{\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}}, R_{\mathfrak{p}}).$$

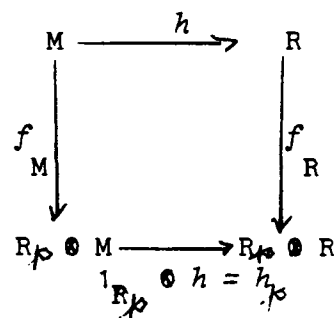
(1) D'après le résultat déjà cité de Chamarie, cette condition est toujours réalisée.

DEMONSTRATION. - On sait que  $R_{\mathfrak{p}} \otimes_R M$  est isomorphe à  $M_{\mathfrak{p}}$  et  $f_M : M \rightarrow R_{\mathfrak{p}} \otimes_R M$  défini à la proposition 8) est un monomorphisme : on a en effet

$\mathfrak{t}_{\mathfrak{p}}(M) = \{x \in M \mid \exists F \in \mathfrak{p} \text{ tel que } Fx = 0\} = 0$  car  $H_M = 0$  entraîne que  $M$  est sans torsion (voir paragraphe 2) ; le morphisme canonique  $\psi_M : M \rightarrow M_{\mathfrak{p}}$  est alors un monomorphisme et  $f_M = u \cdot \psi_M$ , où  $u$  est un isomorphisme [ (9) page 28 th. 3,4 (3)  $\Rightarrow$  (4) ou (3) 2,2 (c) ] est aussi un monomorphisme.

Posons  $H' = H_{M_{\mathfrak{p}}}$  et  $f_M^{-1}(H') = M'$ . On a le diagramme commutatif suivant :

soit  $m' \in M'$ ,  $h_{\mathfrak{p}} f_M(m') = 0$  (car  $f_M(m') \in H'$ )  
 et  $0 = f_R h(m')$  donc  $h(m') = 0$  (car  $f_R$  est un monomorphisme) et ceci entraîne  $m' \in H_M$  donc  $M' = 0$  puisque l'on a  $H_M = 0$ . On sait alors, d'après SILVER [ (6), démonstration du lemme



1,4] , que l'on a  $H' = R_{\mathfrak{p}} \otimes_R f_M^{-1}(H')$  et  $M' = f_M^{-1}(H') = 0$  entraîne  $H' = 0$ .

PROPOSITION 10. - Soit  $R$  un anneau noethérien à gauche et sans diviseurs de zéro. Soit  $\mathfrak{p}$  un idéal premier de  $R$  tel que  $\mathfrak{t}_{\mathfrak{p}}$  est une famille plate <sup>(1)</sup>. Alors si  $M$  est un  $R$ -module à gauche sans torsion,  $M_{\mathfrak{p}}$  en tant que  $R_{\mathfrak{p}}$ -module à gauche est sans torsion et est de type fini, lorsque  $M$  est de type fini.

DEMONSTRATION. - Soit  $\mathcal{O}$  la famille des idéaux à gauche non nuls de  $R$  ;  $\mathcal{O}$  contient  $\mathfrak{t}_{\mathfrak{p}}$ . Soit  $\psi_R : R \rightarrow R_{\mathfrak{p}}$  l'épimorphisme plat canonique. Soit  $\mathcal{G}$  la famille image de  $\mathcal{O}$  par  $\psi_R$  (c'est l'ensemble des idéaux à gauche non nuls de  $R_{\mathfrak{p}}$ ). On a d'après J. RAYNAUD (5) :

$$\mathcal{G}(M_{\mathfrak{p}}) = \mathcal{G}(R_{\mathfrak{p}} \otimes_R M) = R_{\mathfrak{p}} \otimes_R \mathcal{O}(M) = 0$$

Si  $M$  est de type fini, on a  $M_{\mathfrak{p}} \cong R_{\mathfrak{p}} \otimes_R M = \left\{ \sum_{i=1}^{i=N} x_i \otimes m_i \right\} = \left\{ \sum_{i=1}^{i=N} \sum_{j=1}^{j=p} x_i \lambda_{ij} e_j \right\}$

et  $M_{\mathfrak{p}}$  est engendré par les éléments  $1 \otimes e_j$ ,  $j = 1, \dots, p$ , en tant que  $R_{\mathfrak{p}}$ -module à gauche,  $e_1, \dots, e_p$  formant un système de générateurs de  $M$ .

PROPOSITION 11. - Soit  $R$  un ordre maximal, régulier, noethérien, sans diviseurs de zéro, de son corps des fractions  $K$ . Soit  $\mathfrak{p}$  un idéal premier de  $R$  tel que les familles  $\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}$  et  $\mathfrak{B}_{\mathfrak{p}}$  soient plates <sup>(1)</sup>; pour tout  $R$ -module à droite de type fini, on a :

$$R_{\mathfrak{p}} \otimes \text{Hom}_R(M, R) \cong \text{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}(M \otimes R_{\mathfrak{p}}, R_{\mathfrak{p}}).$$

DEMONSTRATION. - On sait que  $R_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}R$  [(1), I, 14] est plat en tant que  $R$ -module à droite et d'ailleurs aussi en tant que  $R$ -module à gauche (3).

On utilise le théorème de BOURBAKI [(2) page 38, proposition 10] .

"Soient  $A$  et  $B$  deux anneaux,  $E$  un  $A$ -module à droite,  $F$  un  $B$ -module à droite,  $G$  un  $B$ - $A$ -bimodule. Soit  $\gamma$  l'homomorphisme canonique de  $Z$ -modules :

$$\gamma : F \otimes_B \text{Hom}_A^d(E, G) \longrightarrow \text{Hom}_A^d(E, F \otimes_B G),$$

tel que pour  $y \in F$ ,  $u \in \text{Hom}_A^d(E, G)$ ,  $\gamma(y \otimes u)$  soit l'application linéaire  $x \mapsto y \otimes u(x)$ . Supposons que  $F$  soit plat et que  $E$  soit de présentation finie, alors l'homomorphisme  $\gamma$  est bijectif."

Faisons  $A = B = R$ ,  $F = R_{\mathfrak{p}}$ ,  $E = M$ ,  $G = R$ ;  $R_{\mathfrak{p}}$  est plat comme  $R$ -module à droite,  $M$  est de type fini sur un anneau noethérien donc est de présentation finie [(2) page 36 lemme 8] . On a donc :

$$R_{\mathfrak{p}} \otimes_R \text{Hom}_R^d(M, R) \cong \text{Hom}_R^d(M, R_{\mathfrak{p}} \otimes_R R) \cong \text{Hom}_R^d \left[ M, \text{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}^d(R_{\mathfrak{p}}, R_{\mathfrak{p}}) \right].$$

On utilise alors ce qui suit [(10), 3-ème édition, page 106)] : Soit  $E$  un  $A$ -module à droite, soit  $F$  un  $A$ - $B$ -bimodule, soit  $G$  un  $B$ -module à droite. Soit  $h'$  l'application de  $E$  dans  $\text{Hom}_B(F, G)$  définie par  $[h'(x)](y) = h(xy)$  pour  $x \in E, y \in F$ . L'application  $h \mapsto h'$  est un isomorphisme  $\gamma$  de  $Z$ -modules :

$$\gamma : \text{Hom}_B^d(E \otimes_A F, G) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_A^d[E, \text{Hom}_B(F, G)]$$

on applique ce qui précède en faisant :  $A = R, B = R_{\mathcal{P}}$ ,  $E = M, F = G = R_{\mathcal{P}}$ .

$$\text{On obtient : } \text{Hom}_R^d[M, \text{Hom}_{R_{\mathcal{P}}}^d(R_{\mathcal{P}}, R_{\mathcal{P}})] \cong \text{Hom}_{R_{\mathcal{P}}}^d(M \otimes_R R_{\mathcal{P}}, R_{\mathcal{P}}) \cong R_{\mathcal{P}} \otimes_R \text{Hom}_R^d(M, R).$$

Précisons les isomorphismes : à  $k \otimes u, k \in R, u \in \text{Hom}_R^d(M, R)$  on fait donc correspondre l'application  $\gamma(k \otimes u)$  qui à  $x \in M$  fait correspondre  $k \otimes u(x) \in R_{\mathcal{P}} \otimes_R R$  que l'on identifie à  $R_{\mathcal{P}}$ . On fait donc correspondre  $ku(x) \in R_{\mathcal{P}}$  et on identifie  $R_{\mathcal{P}}$  à  $\text{Hom}_{R_{\mathcal{P}}}^d(R_{\mathcal{P}}, R_{\mathcal{P}})$  c'est-à-dire que l'on fait correspondre l'application notée encore  $ku(x)$  qui à  $l \in R_{\mathcal{P}}$  fait correspondre l'élément  $ku(x)l$ . A cette application on fait correspondre l'application  $h$  de  $R_{\mathcal{P}}$ -modules à droite de  $M \otimes_R R_{\mathcal{P}}$  dans  $R_{\mathcal{P}}$  telle que pour  $x \in M, y \in R_{\mathcal{P}}$ :

$$[ku(x)](y) = ku(x)y = h(x \otimes y),$$

donc on associe par un isomorphisme noté  $\tau$  à  $k \otimes u, k \in R_{\mathcal{P}}, u \in \text{Hom}_R^d(M, R)$  l'application  $h \in \text{Hom}_R^d(M \otimes_R R_{\mathcal{P}}, R_{\mathcal{P}})$  telle que :  $\forall x \in M, \forall y \in R_{\mathcal{P}}, ku(x)y = h(x \otimes y)$ .  
 À  $k'(k \otimes u), k' \in R_{\mathcal{P}}$ , c'est-à-dire à  $k'k \otimes u$ , on associe  $\bar{h}$  tel que :  $\forall x \in M, \forall y \in R_{\mathcal{P}} ; k'ku(x)y = \bar{h}(x \otimes y) = k'h(x \otimes y)$  et  $\bar{h} = k'h$ .

REMARQUE 1. - Si  $\mathcal{P} = 0$  on a  $R_{\mathcal{P}} = K$ , corps des fractions de  $R$ ; et on peut appliquer ce qui précède.

REMARQUE 2 : On a de même un isomorphisme  $\tau'$  de  $R_{\mathcal{P}}$ -modules à droite entre  $\text{Hom}_{R_{\mathcal{P}}}^g(R_{\mathcal{P}} \otimes M^x, R_{\mathcal{P}})$  et  $\text{Hom}_R(M^x, R) \otimes R_{\mathcal{P}} = M^{xx} \otimes R_{\mathcal{P}}$ , qui à  $\theta \otimes k \in M^{xx} \otimes R_{\mathcal{P}}$  fait correspondre  $h : R_{\mathcal{P}} \otimes M^x \rightarrow R$  tel que :

$$h(y \otimes x) = y\theta(x)k, \quad \forall x \in M^x, \forall y \in R_{\mathcal{P}}.$$

PROPOSITION 12. - Avec les hypothèses de la proposition 11,  $\theta_M \otimes 1_K$  :

$$M \otimes_R K \longrightarrow M^{xx} \otimes_R K \text{ est un isomorphisme de } K\text{-modules à droite.}$$

DEMONSTRATION. - Le fait que  $\theta_M \otimes 1_K$  est un homomorphisme de  $K$ -modules à droite est facile à démontrer. A  $m \otimes 1$  de  $M \otimes_R K$  faisons correspondre  $\theta_M(m) \otimes 1$  auquel nous faisons correspondre par l'isomorphisme  $\tau'$  (remarque 2)  $h : K \otimes^x M \rightarrow K$  tel que :  $\forall x \in M^x, \forall y \in K, h(y \otimes x) = y\theta_M(m)(x)$ . A  $h$  faisons correspondre  $\bar{u} \in (M \otimes_R K)_K^{xx}$  défini par :

$$\forall \bar{x} \in \text{Hom}_K(M \otimes_R K, K), \quad \bar{u}(\bar{x}) = h\tau^{-1}(\bar{x}),$$

$\tau$  désignant l'isomorphisme défini à la proposition 11 de  $K \otimes \text{Hom}_R(M, R)$  sur  $\text{Hom}_K(M \otimes_R K, K)$ . On a, pour  $\bar{x} = \tau^{-1}(\bar{x}) = k \otimes u, k \in K, u \in M^x$  :  $\bar{x}(x \otimes k') = ku(x)k', \forall x \in M, \forall k' \in K$ .

A  $\bar{u}$  on fait correspondre  $\theta_{M \otimes_R K}^{-1}(\bar{u})$  qui a  $\bar{u} \in (M \otimes_R K)_K^{xx}$  fait correspondre

l'élément  $\sum m_i \otimes k_i \in M \otimes_R K$  tel que :  $\theta_{M \otimes_R K}(\sum m_i \otimes k_i) = \bar{u}$ . Remarquons que  $\theta_{M \otimes_R K}$  est un isomorphisme car  $M \otimes_R K$  considéré comme  $K$ -module à droite,

est libre, de type fini donc réflexif. On a :

$$(I) \quad \forall \bar{x} \in \text{Hom}_K(M \otimes_R K, K), \quad \bar{u}(\bar{x}) = \bar{x}(\sum m_i \otimes k_i) = \sum ku(m_i)k_i.$$

or  $\bar{u}(\bar{x}) = h(\bar{x}) = h(k \otimes u) = k\theta_M(m)(u) : ku(m)$ .

On satisfait donc à (I) en prenant  $\sum m_i \otimes k_i = m \otimes 1$  et d'après l'unicité de l'élément  $\sum m_i \otimes k_i$  satisfaisant à (I), provenant du fait que  $\theta_M \otimes 1_K$  est un isomorphisme, on doit prendre  $\sum m_i \otimes k_i = m \otimes 1$ . On a la succession d'éléments :

$$m \otimes 1 \xrightarrow{\theta_M \otimes 1_K} \theta_M(m) \otimes 1 \xrightarrow{h} \bar{u} \xrightarrow{\theta_M^{-1} \otimes 1_K} \theta_M^{-1}(\bar{u}) = m \otimes 1.$$

On passe de l'un à l'autre par un isomorphisme de  $K$ -modules à droite (sauf peut-être pour  $\theta_M \otimes 1_K$ ). Mais l'on peut écrire  $u \cdot (\theta_M \otimes 1_K) = 1_{M \otimes_R K}$  et par suite  $\theta_M \otimes 1_K$  est aussi un isomorphisme.

REMARQUE. - Si  $M \otimes_R R_{\mathcal{P}}$  est un  $R_{\mathcal{P}}$ -module libre de type fini (à droite) la même démonstration prouve que  $\theta_M \otimes 1_{R_{\mathcal{P}}}$  est un isomorphisme de  $R_{\mathcal{P}}$ -modules à droite.

PROPOSITION 14. - Si  $M$  est un  $R$ -module à gauche de type fini, le noyau de  $\theta_M$  est  $t(M) = \{m \in M \mid \exists r \in R \text{ tel que } rm = 0, r \neq 0\}$ , sous les mêmes hypothèses pour  $R$  qu'à la proposition 11.

DEMONSTRATION. - L'homomorphisme canonique  $f_M : M \rightarrow M \otimes_R K$  est, on l'a vu, égal à  $\psi_M : M \rightarrow M_{\mathcal{O}}$  à un isomorphisme multiplicatif près. Mais  $\psi$  a pour noyau  $t(M)$  donc aussi  $f_M$ . Le diagramme suivant est commutatif :

D'après la proposition 13 (ou son homologue pour un module à gauche  $M$ )

$1_K \otimes \theta_M$  est un isomorphisme, le noyau de  $f_M$  est le noyau de  $\theta_M$  car :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\theta_M} & M^{**} \\ f_M \downarrow & & \downarrow f_M^{**} \\ K \otimes M & \xrightarrow{1_K \otimes \theta_M} & K \otimes M^{**} \end{array}$$



$$(1_K \otimes \theta_M) f_M(m) = 0 = f_{M^{xx}} \theta_M(m) \iff \theta_M(m) = 0.$$

Le noyau de  $\theta_M$  est donc  $t(M)$ .

§ 4. - MODULES DE TYPE FINI SUR CERTAINS ORDRES MAXIMAUX.

Dans ce paragraphe  $R$  est un ordre maximal, régulier, noethérien, fort (définition donnée à la fin du paragraphe 1) de son corps des fractions  $K$  (1).

PROPOSITION 15. - Si  $M$  est un  $R$ -module à gauche de type fini, la conoyau  $B_M$  de  $\theta_M$  est un module de torsion,  $R$  désignant un ordre maximal, régulier, noethérien, fort (1), de son corps des fractions  $K$ .

DEMONSTRATION. - Soit  $B_M$  le conoyau de  $\theta_M$ . On a la suite exacte :

$$M \xrightarrow{\theta_M} M^{xx} \rightarrow B_M \rightarrow 0$$

On a la suite exacte :  $K \otimes_R M \xrightarrow{1_K \otimes \theta_M} K \otimes_R M^{xx} \rightarrow K \otimes_R B_M \rightarrow 0$ . Mais

$1_K \otimes \theta_M$  étant un isomorphisme, on a  $K \otimes_R B_M = 0$  et ceci entraîne que  $B_M$

est un module de torsion (car  $K \otimes_R B_M$  est isomorphe à l'enveloppe injective de  $B_M/t(B_M)$ ).

PROPOSITION 16. - Avec les mêmes hypothèses sur  $M$  et  $R$  qu'à la proposition 15,  $M$  étant tel que  $H_M$  appartienne à  $\mathcal{L}$  (voir la définition de  $H_M$  au paragraphe 2), alors  $B_M$  appartient aussi à  $\mathcal{L}$ .

DEMONSTRATION : On a la suite exacte :

$$R_p \otimes_R M \xrightarrow{1 \otimes \theta_M} R_p \otimes_R M^{xx} \rightarrow R_p \otimes_R B_M \rightarrow 0$$

(1) d'après le résultat récent de Chamarie tout ordre maximal régulier noethérien de son corps des fractions est fort.

On a vu (proposition 11 où l'on fait  $M = M^*$ ) que  $R_{\mathcal{P}} \otimes_R M^{**}$  est isomorphe à  $(R_{\mathcal{P}} \otimes_R M)^{**}$ , bidual de  $R_{\mathcal{P}} \otimes_R M$ , considéré comme  $R$ -module à gauche. D'après le théorème 2,  $R_{\mathcal{P}}$  est un anneau principal. D'après la proposition 10,  $R_{\mathcal{P}} \otimes_R M$  est de type fini et par hypothèse  $R_{\mathcal{P}} \otimes_R H_M$  est nul donc  $H_M$  est  $\mathcal{P}$ -négligeable.

Démontrons qu'il en résulte que  $T' = H_{M_{\mathcal{P}}}$  est nul.

Posons  $f_M^{-1}(T') = M'$ ; en considérant le diagramme commutatif ci-contre on peut écrire pour  $m' \in M'$  :  $(f_R \cdot h)(m') = 1 \otimes h(m') =$

$(h_{\mathcal{P}} \cdot f_M)(m') = 0$  (car  $f_M(m') \in T'$ ; on pose

$h_{\mathcal{P}} = 1_{R_{\mathcal{P}}} \otimes h$ ). Comme  $f_R$  est un monomorphisme,

$h(m') = 0$  et  $m' \in H_M$ . Ceci prouve que  $M'$

est  $\mathcal{P}$ -négligeable. D'après [(6), démon-

stration du lemme 1.4] on peut écrire

$T' = R_{\mathcal{P}} \otimes_R f_M^{-1}(T') = R_{\mathcal{P}} \otimes_R M'$ . Or  $\mathcal{P}$  étant plate,  $R_{\mathcal{P}} \otimes_R M'$  est isomorphe

à  $M'_{\mathcal{P}}$  qui est nul puisque  $M'$  est  $\mathcal{P}$ -négligeable.

Le module  $M_{\mathcal{P}}$ , isomorphe à  $R_{\mathcal{P}} \otimes_R M$ , considéré comme  $R_{\mathcal{P}}$ -module à gauche est de type fini, d'après la proposition 3 et le fait que  $R_{\mathcal{P}}$  est principal, on déduit que  $M_{\mathcal{P}}$  est un  $R_{\mathcal{P}}$ -module à gauche libre de type fini. D'après la remarque qui suit la proposition 12.  $1_{R_{\mathcal{P}}} \otimes \theta_M$  est un isomorphisme, de sorte que  $R_{\mathcal{P}} \otimes_R B_M$  est nul pour tout idéal premier minimal  $\mathcal{P}$  de  $R$ . On en déduit  $B_M \in \mathcal{C}$ .

PROPOSITION 17. - Si  $M$  et  $R$  vérifient les mêmes hypothèses qu'à la proposition 16,  $T(\theta_M) : T(M) \rightarrow T(M^{**})$  est un isomorphisme.

DEMONSTRATION. - On considère le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & t(M) & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\theta_M} & M^{**} & \longrightarrow & B_M & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \searrow \sigma & & \nearrow i & & & & \\
 & & & & & & M/t(M) & & & & 
 \end{array}$$

où la ligne est exacte et où  $\sigma$  est un épimorphisme et  $i$  un monomorphisme (le noyau de  $\theta_M$  est  $t(M)$ , proposition 14). Il est facile de vérifier que  $t(M)$  est un sous-module de  $H_M$  donc que  $t(M)$  appartient à  $\mathcal{E}$  s'il en est ainsi pour  $H_M$ . Il résulte alors de [ (7); 1,6 ] et de sa démonstration que  $T(\sigma)$  est un isomorphisme. De la suite exacte

$$0 \longrightarrow M/t(M) \xrightarrow{i} M^{**} \longrightarrow B_M \longrightarrow 0$$

résulte de l'exactitude de la suite (car  $B_M \in \mathcal{E}$ , proposition 16) :

$$0 \longrightarrow T(M/t(M)) \xrightarrow{T(i)} T(M^{**}) \longrightarrow 0$$

et par suite  $T(i)$  est un isomorphisme, de sorte que  $T(\theta_M) = T(\sigma \cdot i)$  est un isomorphisme de  $R$ -modules à gauche.

PROPOSITION 18. - Si  $R$  vérifie les mêmes hypothèses qu'à la proposition

15 et si  $M$  est un  $R$ -module à gauche de type fini, alors  $\theta_{M^{**}} : M^{**} \rightarrow M^{***}$  est un isomorphisme.

DEMONSTRATION. - On a la suite exacte  $M \xrightarrow{\theta_M} M^{**} \rightarrow B_M \rightarrow 0$  donc la suite exacte  $0 \rightarrow \text{Hom}_R(B_M, R) \rightarrow \text{Hom}_R(M^{**}, R) \xrightarrow{\theta'_M} \text{Hom}_R(M, R)$ . On sait

(proposition 15) que  $B_M$  est un  $R$ -module à gauche de torsion donc  $\text{Hom}_R(B_M, R) = 0$

et  $\theta'_M$  est un monomorphisme. Puisque  $M^x$  est de type fini (lemme 4) et sans torsion (lemme 5), alors  $\theta_{M^x}$  est un monomorphisme (proposition 14).

Montrons que  $\theta'_M \theta_{M^x}$  est l'identité dans  $M^x$  c'est-à-dire que l'on a

$$\theta'_M \theta_{M^x}(f) = f, \quad \forall f \in M^x, \text{ ou encore que l'on a, } \forall m \in M, \quad \forall f \in M^x, [\theta'_M \theta_{M^x}(f)](m) = f(m).$$

$$\text{On a } [\theta'_M \theta_{M^x}(f)](m) = [\theta_{M^x}(f)] \theta'_M(m) = \theta_{M^x}(m)(f) = f(m). \text{ Ainsi } \theta'_M \theta_{M^x} \text{ est}$$

l'identité dans  $M^x$  donc  $\theta'_M$  étant un monomorphisme est un isomorphisme et  $\theta_{M^x}$  en est un également.

PROPOSITION 19. Si  $R$  vérifie les mêmes hypothèses qu'à la proposition 15 et si  $M$  est un  $R$ -module à gauche de type fini, le conoyau de l'application canonique  $f_{M^{xx}} : M^{xx} \rightarrow K \otimes_R M^{xx}$  est  $\mathcal{L}$ -libre (c'est-à-dire que le seul sous-module de ce conoyau appartenant à  $\mathcal{L}$  est nul).

DEMONSTRATION. - On a déjà remarqué que  $f_{M^{xx}}$  est égal à un isomorphisme près à  $\psi_{M^{xx}}$  application canonique de  $M^{xx}$  dans  $M_{\mathcal{L}}^{xx}$ . Puisque  $M^{xx}$  est sans torsion,  $\psi_{M^{xx}}$  donc  $f_{M^{xx}}$  est un homomorphisme. Soit  $D$  son conoyau. On a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow M^{xx} \xrightarrow{f_{M^{xx}}} K \otimes_R M^{xx} \xrightarrow{\phi} D \longrightarrow 0$$

Si  $D$  possède un  $\mathcal{L}$ -sous-module (c'est-à-dire un sous-module appartenant à  $\mathcal{L}$ ) non nul, il admet un  $\mathcal{L}$ -sous-module non nul de type fini  $D'$ . Nous avons la suite exacte :

$$0 \longrightarrow M^{xx} \xrightarrow{f_{M^{xx}}} \phi^{-1}(D') \xrightarrow{\phi} D' \longrightarrow 0$$

d'où la suite exacte :

$$0 \longrightarrow K \otimes_R M^{xx} \longrightarrow K \otimes_{RR} \mathcal{C}^{-1}(D') \longrightarrow K \otimes_R D' \longrightarrow 0.$$

Puisque  $D'$  est dans  $\mathcal{C}$ , c'est un module de torsion et l'on a  $K \otimes_R D' = 0$ .

Remarquons que l'image par  $f_{M^{xx}}$  de  $M^{xx}$  est  $\text{Ker}\phi = \phi^{-1}(0) \subseteq \phi^{-1}(D')$  et

$$K \otimes_R M^{xx} \xrightarrow{K \otimes f_{M^{xx}}} K \otimes_R \phi^{-1}(D')$$

est un isomorphisme. De plus  $\phi^{-1}(D')$  est sans torsion car  $K \otimes_R M^{xx}$  l'est ; de la proposition 18 on déduit que  $M^{xx}$  est réflexif.

Notons  $\mathcal{A}(D')$  l'annulateur du  $R$ -module à gauche  $D'$ . Si  $D'$  est non nul on peut appliquer la proposition 8 et conclure que  $\mathcal{A}(D')$  est un  $\mathcal{C}$ -idéal de  $R$  donc contenu dans au moins un idéal premier minimal.

Mais pour cet idéal  $\mathfrak{p}$  on aurait  $D'_{\mathfrak{p}} \neq 0$  ce qui ne peut être puisque  $D'$  appartient à  $\mathcal{C}$ . Ainsi l'on a  $D' = 0$  et  $D$  est  $\mathcal{C}$ -libre.

PROPOSITION 20. - Gardons les mêmes hypothèses qu'à la proposition 19

pour  $M$  et  $R$ , l'homomorphisme canonique  $\tau_{M^{xx}} : M^{xx} \rightarrow T(M^{xx})$  [(7) page 16]

est un isomorphisme.

DEMONSTRATION. - Puisque  $M^{xx}$  est sans torsion, il est  $\mathcal{C}$ -libre. Ainsi l'enveloppe injective de  $M^{xx}$  est  $K \otimes_R M^{xx}$  (proposition 6) et  $K \otimes_R M^{xx}/M^{xx} = D$  est  $\mathcal{C}$ -libre. On sait que  $T(M^{xx})$  est l'image inversée par  $\phi$  (voir proposition précédente et sa démonstration pour la définition de  $\phi$ ) du plus grand  $\mathcal{C}$ - sous-module de  $D$  [(7) page 16]. Ainsi  $T(M^{xx}) = \phi^{-1}(0) = M^{xx}$ . La définition de  $\tau_{M^{xx}}$  montre alors que  $\tau_{M^{xx}}$  est l'identité dans  $M^{xx}$ .

THEOREME 21. - Avec les mêmes hypothèses sur  $M$  et  $R$  qu'à la proposition

précédente et si de plus  $H_M$  appartient à  $\mathcal{C}$ , alors il existe un isomorphisme  $\eta_M : T(M) \rightarrow M^{xx}$  tel que :  $\eta_M \cdot \tau_M = \theta_M$

DEMONSTRATION. - D'après la proposition 17 on a  $T(\theta_M) : T(M) \rightarrow T(M^{**})$  est un isomorphisme. Considérons :  $\tau_{M^{**}}^{-1} \cdot T(\theta_M) : T(M) \rightarrow M^{**}$  (on a vu à la proposition 20 que  $\tau_{M^{**}}$  est un isomorphisme). Nous allons montrer que  $\tau_{M^{**}}^{-1} \cdot T(\theta_M) \tau_M = \theta_M$ . Mais par définition  $\tau_M$  [(7) page 5] le diagramme suivant est commutatif :

et l'on obtient bien ce que l'on veut.

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{\tau_M} & T(M) \\
 \theta_M \downarrow & & \downarrow T(\theta_M) \\
 M^{**} & \xrightarrow{\tau_{M^{**}}} & T(M^{**})
 \end{array}$$

BIBLIOGRAPHIE. -

- [1] G. MAURY, *La condition intégralement clos dans quelques structures algébriques II*. Bulletin de la Soc. Math. de France, 98(1970), fasc. 4 p. 369-399.
- [2] N. BOURBAKI, *Algèbre commutative, Modules plats*, page 157, exercices 16 et suivants.
- [3] M. HACQUE, *Localisations exactes, Localisations plates*. Publ. Dep. Math. Fac. Sc. Lyon 1969, 6 fasc. 2, p. 97-117.
- [4] O.G. MICHLER, *Asano orders*, Proc. London Math. Soc. (3), 19 (1969) p. 421-443.
- [5] J. RAYNAUD, *C.R. Acad. Sc. Paris*, 271, 65-68 (15 juillet 1970).
- [6] SILVER, *Non commutative localizations and applications*, J. of Algebra, 7, 1967, p. 44-67.
- [7] B.R.L. AUSLANDER, *Finitely generated reflexive modules over integrally closed noetherian domains*, Thesis University of Michigan. University Microfilms, Inc. Ann Arbor, Michigan.
- [8] H. BASS, *Algebraic K-theory*, W.A. Benjamin, Inc, New-york.
- [9] O. GOLDMAN, *Rings and Moduls of quotients*, J. of Algebra, 13, 10-47, 1969.

- [10] N. BOURBAKI, VI. *ALGÈBRE*, 3ème édition, Algèbre linéaire chapitre 2.
- [11] ASANO, *Zur Arithmetic in Schieftringen I*. Osaka Math. Journal Vol. 1, n° 2, July 1949, p. 98 et suivantes.
- [12] P. GABRIEL, *Des catégories abéliennes*, Bulletin Soc. Math. de France, 90, (1962), p. 323)348.
- [13] M. AUSLANDER et D. BUSCHBAUM, *Unique factorisation in regular local rings*. Proc. Nat. Acad. Sci. Vol. 45, n° 5, May 1959, p. 733-734.
- [14] G. MAURY, *La condition intégralement clos dans quelques structures algébriques*. Ann. Sc. Ecole Normale Sup. 3ème série, 78, 1961, p. 31-100.
- 

Guy MAURY

Professeur

Département de Mathématiques

Université Claude Bernard

43, bd du 11 novembre 1918

69621 - VILLEURBANNE