Publications du Département de mathématiques de Lyon

C. H. Cook
J. Dazord

Sur la topologie mixte de Wiweger

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1974, tome 11, fascicule 3 , p. 1-28
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1974__11_3_1_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1974 t.11.3

SUR LA TOPOLOGIE MIXTE DE WIWEGER

par C.H. COOK - J. DAZORD

Etant données deux topologies vectorielles séparées $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}^*$ sur un espace vectoriel E, définissant deux espaces vectoriels topologiques (evt) notés $E_{\mathcal{T}}$ et $E_{\mathcal{T}^*}$, Wiweger introduit sur E une troisième topologie vectorielle construite à l'aide de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}^*$ et appelée topologie mixte. Lorsque $E_{\mathcal{T}}$ est localement borné, la topologie mixte est la plus fine topologie vectorielle sur E coïncidant avec $\mathcal{T}^*$ sur les ensembles bornés pour $\mathcal{T}$ ([W], p. 51). En se restreignant au cadre des espaces localement convexes (elc), $E_{\mathcal{T}}$ étant donc un espace normé, GARLING note que la topologie mixte est alors un exemple de limite inductive généralisée ([G1]). COOPER a prouvé depuis qu'en supposant seulement que $E_{\mathcal{T}}$ est un espace (DF), on obtient un résultat similaire ([C], prop. 1).

Une première partie de notre travail est consacrée à l'étude des limites inductives généralisées, que l'on aborde ici dans le cadre des structures de convergence ; (pour les notions concernant les structures de convergence, on pourra se référer à [F], [CF1] et [CF2]). On retrouve alors les principales propriétés établies par Wiweger dans le cas des topologies mixtes, l'étude des parties bornées donnant même des résultats plus satisfaisants. Dans une seconde partie, nous étudions la limite inductive généralisée définie sur un espace vectoriel par une topologie localement convexe et une bornologie convexe. Une dernière partie est consacrée à une extension de la notion de topologie stricte.

Etant donnée une structure de convergence vectorielle α (nous dirons en abrégé : une convergence vectorielle α) sur un espace vectoriel E, nous appelons espace à convergence le couple ainsi constitué et nous le notons E_α. On sait qu'on peut alors définir les notions de forme linéaire α-continue et d'ensemble α-borné. Nous adoptons les conventions suivantes : α étant soit une topologie localement convexe, soit une convergence vectorielle sur l'espace vectoriel E, nous notons $Bor(E_\alpha)$ la bornologie des ensembles α-bornés et $(E_\alpha)'$ l'espace des formes linéaires α-continues sur E. Nous désignons par $\mathcal{B}$ une bornologie convexe (resp. vectorielle) sur E et notons $\alpha|_B$ la convergence induite par α sur un ensemble $B \in \mathcal{B}$. Enfin, $\mathcal{T}^*$ désignant une topologie localement convexe séparée (resp. une convergence vectorielle séparée) sur E, S désigne l'espace des formes linéaires sur E dont les restrictions aux ensembles $B \in \mathcal{B}$ sont $\mathcal{T}^*$-continues. Notre étude est en partie motivée par le problème suivant :

<u>Problème</u> : étant données, sur un espace vectoriel E, une topologie localement convexe séparée (resp. une convergence vectorielle séparée) $\mathcal{T}^*$ et une bornologie convexe (resp. vectorielle) $\mathcal{B}$, trouver une topologie localement convexe (resp. une convergence vectorielle) γ sur E vérifiant :

(i) $\gamma|_B = \mathcal{T}^*|_B$ pour tout $B \in \mathcal{B}$;

(ii) $(E_\gamma)' = S$;

(iii) $\mathrm{Bor}(E_\gamma) = \mathcal{B} \cap \mathrm{Bor}(E_{\mathcal{T}^*})$.

Dans la pratique on suppose souvent qu'on a : $\mathcal{B} \subset \mathrm{Bor}(E_{\mathcal{T}^*})$ et la condition (iii) se réduit alors à : $\mathrm{Bor}(E_\gamma) = \mathcal{B}$. On pourra constater qu'une réponse satisfaisante au problème est donnée dans le cadre des convergences vectorielles. Par contre, lorsque $\mathcal{T}^*$ est une topologie localement convexe, on obtient aisément (i) et (ii) mais la condition (iii) présente des difficultés qui sont d'ailleurs inhérentes à l'étude des ensembles bornés d'une limite inductive.

Nous supposons que toutes les topologies ou les convergences considérées sont séparées.

1. - LA CONVERGENCE MIXTE γ.

Dans un premier temps nous supposons que E est un ensemble, $\mathcal{T}^*$ une convergence sur E et $\mathcal{B}$ une bornologie sur E. La convergence mixte γ est ainsi définie : nous dirons qu'un filtre $\mathcal{F}$ sur E converge vers un point x au sens de γ si $\mathcal{F}$ converge vers x au sens de $\mathcal{T}^*$ et si x appartient à un ensemble B commun à $\mathcal{F}$ et $\mathcal{B}$, en abrégé :

$$\mathcal{F} \xrightarrow[\gamma]{} x \iff \mathcal{F} \xrightarrow[\mathcal{T}^*]{} x \quad \text{et} \quad \exists B \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B},\ x \in B.$$

Il est immédiat que la convergence γ est plus fine que $\mathcal{T}^*$ et que si $\mathcal{F}$ est un filtre convergent au sens de γ, $\mathcal{F}$ possède une base constituée d'éléments de $\mathcal{B}$. Si $\mathcal{B}$ est la bornologie la moins fine sur E, on a $\gamma = \mathcal{T}^*$;

si $\mathcal{B}$ est la bornologie discrète, γ est la topologie discrète sur E.

Notons $\mathbb{F}(A)$ l'ensemble des filtres sur une partie non vide A de E. Si A rencontre tout élément d'un filtre $\mathfrak{F}$ sur E, nous notons $\mathfrak{F}_A$ le filtre induit par $\mathfrak{F}$ sur A. Soit i_A l'injection canonique de A dans E et soit $\mathcal{G}$ un filtre sur A ; $i_A(\mathcal{G})$ désigne le filtre image de $\mathcal{G}$ par i_A. D'autre part, étant donnés deux filtres $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}'$ sur E, nous écrivons $\mathfrak{F} \leqslant \mathfrak{F}'$ pour signifier que le filtre $\mathfrak{F}'$ est plus fin que le filtre $\mathfrak{F}$; de même pour deux convergences α et β sur E, l'écriture $\alpha \leqslant \beta$ signifie que β est plus fine que α.

Donnons dès à présent une caractérisation de la convergence γ :

(1.1) PROPOSITION. - *Etant donnés un filtre $\mathfrak{F}$ sur E et un point $x \in E$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) $\mathfrak{F} \xrightarrow[\gamma]{} x$;

(b) il existe un ensemble $B \in \mathcal{B}$ avec $x \in \mathcal{B}$ et un filtre $\mathcal{G}$ sur B vérifiant : $\mathcal{G} \xrightarrow[\mathcal{T}^*|_B]{} x$ et $i_B(\mathcal{G}) \leqslant \mathfrak{F}$.

En d'autres termes on a : $E_\gamma = \varinjlim(B, \mathcal{T}^*|_B)$, *la limite inductive étant prise dans la catégorie des espaces à convergence.*

Preuve. - (a) $\Rightarrow$ (b) : par hypothèse $\mathfrak{F} \xrightarrow[\mathcal{T}^*]{} x$ et il existe $B \in \mathfrak{F} \cap \mathcal{B}$ avec $x \in B$. Puisque $B \in \mathfrak{F}$, on a $\mathfrak{F} = i_B(\mathfrak{F}_B)$. Or : $\mathfrak{F}_B \xrightarrow[\mathcal{T}^*|_B]{} x$, ce qui prouve qu'on a (b) en prenant $\mathcal{G} = \mathfrak{F}_B$.

(b) $\Rightarrow$ (a) ; il suffit de remarquer qu'on a $B \in \mathcal{G}$, donc $B \in \mathfrak{F}$ et d'autre part $i_B(\mathcal{G}) \xrightarrow[\mathcal{T}^*]{} x$.

La proposition qui suit établit que la convergence γ satisfait à la condition (i) mentionnée dans l'introduction :

(1.2) PROPOSITION. - *Les convergences* γ *et* $\mathfrak{T}^*$ *coïncident sur tout ensemble borné* B *de* $\mathfrak{B}$.

Preuve. - Déjà on a : $\mathfrak{T}^* \leqslant \gamma$. Soit maintenant $\mathfrak{F}$ un filtre sur B vérifiant $\mathfrak{F} \xrightarrow[\mathfrak{T}^*|_B]{} x$, avec $x \in B$. Alors : $i_B(\mathfrak{F}) \xrightarrow[\mathfrak{T}^*]{} x$ et $B \in i_B(\mathfrak{F})$. Ainsi $i_B(\mathfrak{F}) \xrightarrow[\gamma]{} x$.

Nous supposerons désormais que E est un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), E étant muni d'une convergence vectorielle $\mathfrak{T}^*$ et d'une bornologie vectorielle $\mathfrak{B}$. Notons $\mathbb{V}$ le filtre des voisinages de l'origine dans $\mathbb{K}$. Etant donné un point $x \in E$, $\mathbb{V}.x$ désigne le filtre sur E engendré par les ensembles $V.x = \{\lambda x \; ; \; \lambda \in V\}$ où V décrit $\mathbb{V}$. $\mathfrak{F}$ étant un filtre sur E, on note $\mathbb{V}.\mathfrak{F}$ le filtre engendré par les ensembles $V.F = \{\lambda x \; ; \; \lambda \in V, x \in F\}$ où V décrit $\mathbb{V}$ et F décrit $\mathfrak{F}$. Avec la même définition de la convergence γ que celle donnée plus haut, on établit alors sans peine que γ vérifie les propriétés suivantes :

A) Si $\mathfrak{F} \xrightarrow[\gamma]{} 0$ et si $\mathcal{G} \xrightarrow[\gamma]{} 0$, $\mathfrak{F} + \mathcal{G} \xrightarrow[\gamma]{} 0$;

B) Si $\mathfrak{F} \xrightarrow[\gamma]{} 0$, $\lambda\mathfrak{F} \xrightarrow[\gamma]{} 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$;

C) Si $\mathfrak{F} \xrightarrow[\gamma]{} 0$, $\mathbb{V}.\mathfrak{F} \xrightarrow[\gamma]{} 0$;

D) Pour tout $x \in E$, $\mathbb{V}.x \xrightarrow[\gamma]{} 0$.

Ainsi γ est une convergence sur E compatible avec la structure vectorielle de E ([F], p. 296), autrement dit E_γ est un espace vectoriel à convergence.

Rappelons que S désigne l'espace des formes linéaires sur E dont les restrictions aux ensembles $B\in\mathfrak{B}$ sont continues pour $\mathcal{T}^*$. La proposition suivante, qui résulte immédiatement de la caractérisation de E_γ comme limite inductive des espaces à convergence $(B, \mathcal{T}^*|_B)$, montre que γ satisfait à la condition (ii) de l'introduction :

(1.3) PROPOSITION. - *S est l'ensemble des formes linéaires γ-continues sur* E : $S = (E_\gamma)'$.

La condition (iii) : $\mathrm{Bor}(E_\gamma) = \mathfrak{B}\cap\mathrm{Bor}(E_{\mathcal{T}^*})$ est établie par Wiweger dans le cas où $\mathcal{T}^*$ est une topologie vectorielle sur E et $\mathfrak{B}$ est l'ensemble des bornés d'un espace normé $E_{\mathcal{T}}$ dont la boule unité est fermée pour $\mathcal{T}^*$. Avant d'étudier cette condition, rappelons qu'un ensemble B est dit borné pour la convergence vectorielle α si $\mathbf{V}.i_B(B) \underset{\alpha}{\to} 0$, où $i_B(B)$ désigne le filtre sur E engendré par $\{B\}$ ([CF1], p. 103).

(1.4) PROPOSITION. - $\mathcal{T}^*$ *étant une convergence vectorielle sur* E *et* $\mathfrak{B}$ *une bornologie vectorielle sur* E, *on a :*

$$\mathrm{Bor}(E_\gamma) = \mathfrak{B}\cap\mathrm{Bor}(E_{\mathcal{T}^*}).$$

Preuve. - Soit $A\in\mathrm{Bor}(E_\gamma)$. Alors : $\mathbf{V}.i_A(A) \underset{\gamma}{\to} 0$; donc il existe un ensemble B vérifiant : $B\in\mathfrak{B}\cap\mathbf{V}.i_A(A)$. Soit alors $\varepsilon>0$ tel que : $D_\varepsilon.A\subset B$, où $D_\varepsilon = \{x\in K ; |x| \leqslant \varepsilon\}$. On a : $\varepsilon A\subset D_\varepsilon.A$, donc $A\in\mathfrak{B}$ et l'inclusion : $\mathrm{Bor}(E_\gamma)\subset\mathfrak{B}\cap\mathrm{Bor}(E_{\mathcal{T}^*})$ est démontrée. Considérons maintenant un ensemble $B\in\mathfrak{B}\cap\mathrm{Bor}(E_{\mathcal{T}^*})$. Alors : $\mathbf{V}.i_B(B) \xrightarrow[\mathcal{T}^*]{} 0$ et, puisque $\mathbf{V}.i_B(B)$ contient un élément de $\mathfrak{B}$, nous avons : $\mathbf{V}.i_B(B) \xrightarrow[\gamma]{} 0$. Ainsi $B\in\mathrm{Bor}(E_\gamma)$.

Bien entendu, si on suppose $\mathfrak{B}\subset\mathrm{Bor}(E_{\mathcal{T}^*})$, nous obtenons : $\mathrm{Bor}(E_\gamma) = \mathfrak{B}$.

Les propositions (1.2), (1.3) et (1.4) montrent que la convergence γ est solution du problème posé en introduction. Plus précisément γ est la plus fine convergence vectorielle sur E vérifiant (i), (ii) et (iii) relativement à $\mathcal{T}^*$ et $\mathcal{B}$. Cependant d'autres convergences peuvent satisfaire à ces trois conditions :

Exemple - Rappelons tout d'abord qu'étant donné un elc E, les formes linéaires continues et les ensembles bornés sont les mêmes pour la topologie de E et pour la convergence canoniquement associée à la topologie de E. Soit alors F un espace de Banach de dimension infinie et soit E=F' son dual. On désigne par $\mathcal{T}^*$ la convergence définie sur E par la topologie faible $\sigma(F',F)$ et $\mathcal{T}$ est la convergence définie sur E par la topologie de la convergence compacte sur F. Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des bornés pour $\mathcal{T}^*$. D'après le théorème de complétion de Grothendieck, l'espace S est identique à F. Il est alors immédiat que les convergences $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}^*$ vérifient relativement à $\mathcal{B}$ et $\mathcal{T}^*$ les conditions :

(i) $\mathcal{T}^*|_B = \mathcal{T}|_B$ pour tout $B \in \mathcal{B}$;

(ii) $(E_{\mathcal{T}^*})' = (E_{\mathcal{T}})' = F = S$;

(iii) $\mathrm{Bor}(E_{\mathcal{T}^*}) = \mathrm{Bor}(E_{\mathcal{T}}) = \mathcal{B}$.

Pour tout élément x d'un ensemble E, notons $\dot{x}$ le filtre des parties de E contenant x. $\mathcal{F}$ étant un filtre sur E et H un ensemble d'applications de E dans un ensemble E_1, on note $H(\mathcal{F})$ le filtre sur E_1 engendré par les ensembles $H(F) = \bigcup_{u \in H} u(F)$, quand F décrit $\mathcal{F}$. Considérons maintenant un espace à convergence $(E, \mathcal{T})$ et un espace vectoriel à convergence $(E_1, \mathcal{T}_1)$.

Un ensemble H d'applications de E dans E_1 est dit équicontinu - ou, si nécessaire, $(\mathcal{T},\mathcal{T}_1)$-équicontinu - si pour tout $x\in E$ et tout filtre $\mathcal{F}$ sur E vérifiant $\mathcal{F} \xrightarrow[\mathcal{T}]{} x$, on a : $H(\mathcal{F}-\dot{x}) \xrightarrow[\mathcal{T}_1]{} 0$. La caractérisation des ensembles équicontinus pour la convergence mixte γ ne présente alors aucune difficulté :

(1.5) <u>PROPOSITION</u>. - *Soit* H *un ensemble d'applications linéaires de l'espace vectoriel* E *dans un espace vectoriel à convergence* $(E_1, \mathcal{T}_1)$. *Pour que* H *soit* $(\gamma,\mathcal{T}_1)$*-équicontinu, il faut et il suffit que pour tout* $B\in\mathcal{B}$, *la restriction* $H|_B$ *de* H *à* B *soit un ensemble* $(\mathcal{T}^*|_B, \mathcal{T}_1)$*-équicontinu.*

Preuve. - Supposons que la partie H est $(\gamma,\mathcal{T}_1)$-équicontinue. Soit B un ensemble équilibré de $\mathcal{B}$ et soit $x\in B$. Pour tout filtre $\mathcal{G}$ sur B vérifiant : $\mathcal{G} \xrightarrow[\gamma|_B]{} x$, on a : $i_B(\mathcal{G}) \xrightarrow[\gamma]{} x$. Donc : $H(i_B(\mathcal{G})-\dot{x}) \xrightarrow[\mathcal{T}_1]{} 0$. Alors : $(H|_B)(\mathcal{G}-\dot{x}) \xrightarrow[\mathcal{T}_1]{} 0$. Finalement $H|_B$ est $(\mathcal{T}^*|_B, \mathcal{T}_1)$-équicontinu puisqu'on a : $\gamma|_B = \mathcal{T}^*|_B$. Réciproquement, considérons un filtre $\mathcal{F}$ sur E vérifiant $\mathcal{F} \xrightarrow[\gamma]{} x$ et soit $B\in\mathcal{F}\cap\mathcal{B}$ avec $x\in B$. Alors $\mathcal{F}_B \xrightarrow[\mathcal{T}^*|_B]{} x$ et $(H|_B)(\mathcal{F}_B-\dot{x}) = H(\mathcal{F}-\dot{x}) \xrightarrow[\mathcal{T}_1]{} 0$, ce qui termine la preuve.

Les deux propositions qui suivent sont à comparer aux résultats analogues de WIWEGER ([W], 2.2.5, p. 52 et 2.3.1, p. 55). Nous devons auparavant introduire la propriété (P) :

(P) : On dit que la convergence vectorielle $\mathcal{T}$ sur E vérifie la propriété (P) si, pour qu'une application u de E dans un espace vectoriel à convergence $(E_1,\mathcal{T}_1)$ soit $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_1)$-continue, il faut et il suffit que l'application $u|_B$ soit $(\mathcal{T}^*|_B, \mathcal{T}_1)$-continue pour tout $B \in \mathcal{B}$.

On obtient alors immédiatement :

(1.6) PROPOSITION. - *La convergence* γ *est la moins fine convergence vectorielle sur* E *vérifiant (P).*

Nous dirons qu'une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ d'un espace à convergence $E_{\mathcal{T}}$ converge vers x si le filtre de Fréchet associé à (x_n), dont une base est constituée des ensembles $\{x_k \ ; \ k\geq n\}_{n\geq 0}$, converge vers x pour $\mathcal{T}$. Alors :

(1.7) PROPOSITION. - *Etant donnée une suite* (x_n) *de* E, *les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) $x_n \xrightarrow[\gamma]{} x$;

(b) $x_n \xrightarrow[\mathcal{T}^*]{} x$ et $\{x_n\}_{n\geq 0} \in \mathcal{B}$.

2. - LIMITE INDUCTIVE GENERALISEE D'UNE FAMILLE DE DISQUES BORNES D'UN ELC.

On suppose maintenant que $\mathcal{T}^*$ est une topologie localement convexe sur l'espace vectoriel E et que $\mathcal{B}$ est une bornologie convexe sur E. B décrivant une base de disques bornés de $\mathcal{B}$, il s'agit d'étudier la limite inductive généralisée au sens de GARLING ([G1]) des disques $(B, \mathcal{T}^*|_B)$. Nous aurons en particulier à comparer la topologie de cette limite inductive généralisée à la convergence γ introduite plus haut à l'aide de la limite inductive des espaces à convergence $(B, \mathcal{T}^*|_B)$; dans ce dernier cas, $\mathcal{T}^*|_B$ désigne la convergence canoniquement associée à la topologie $\mathcal{T}^*|_B$.

On sait que la limite inductive généralisée des disques $(B, \mathcal{T}^*|_B)$ est l'elc E_τ où τ désigne la plus fine topologie localement convexe sur E vérifiant $\tau|_B = \mathcal{T}^*|_B$. Une telle topologie existe bien. Rappelons-en une construction ([Gl], prop. 2, p. 4). Soit B un disque de $\mathcal{B}$ et soit E_B le sous-espace vectoriel de E engendré par B. Notons τ_B la plus fine des topologies localement convexes $\mathcal{T}'$ sur E_B telles que l'injection canonique $(B, \mathcal{T}^*|_B) \to (E_B, \mathcal{T}')$ soit continue. La famille d'espace $(E_B, \tau_B)_{B\in\mathcal{B}}$ constitue de manière évidente un système inductif d'elc. Nous poserons $E_\tau = \varinjlim_{B\in\mathcal{B}} (E_B, \tau_B)$, la limite inductive étant prise dans la catégorie des elc. Alors, suivant GARLING ([Gl], p. 5-6 et p. 2), nous avons :

(2.1) PROPOSITION (GARLING).:

1. *Les topologies τ et $\mathcal{T}^*$ coïncident sur tout ensemble $B\in\mathcal{B}$ et la topologie τ est la plus fine topologie localement convexe sur* E *ayant cette propriété.*

2. *Pour qu'une application linéaire* u *de* E_τ *dans un elc* F *soit continue, il faut et il suffit que pour tout $B\in\mathcal{B}$ la restriction de* u *à* B *soit continue pour* $\mathcal{T}^*$.

On sait qu'à toute convergence vectorielle α sur un espace vectoriel E on peut associer une topologie localement convexe $\mathcal{T}_\alpha$ qui est la plus fine topologie localement convexe sur E moins fine (en tant que convergence) que α ([F], prop. 10, p. 297). Alors, en désignant toujours par γ la convergence vectorielle limite inductive des convergences $\mathcal{T}^*|_B$, nous avons :

(2.2) LEMME. - *Sur tout borné* B *de* $\mathfrak{B}$, *les topologies localement convexes* $\mathfrak{T}^*$ *et* $\mathfrak{T}_\gamma$ *coïncident.*

Preuve. - On a immédiatement : $\mathfrak{T}^* \leqslant \mathfrak{T}_\gamma \leqslant \gamma$. D'où : $\mathfrak{T}^*|_B \leqslant \mathfrak{T}_\gamma|_B \leqslant \gamma|_B$ pour tout $B \in \mathfrak{B}$. Comme on a : $\gamma|_B = \mathfrak{T}^*|_B$ (1.2), le résultat est acquis.

La proposition suivante est très similaire à un résultat de FISCHER ([F], 21, p. 302) ; on y considère cependant une limite inductive généralisée au lieu d'une limite inductive d'espaces vectoriels :

(2.3) PROPOSITION. - *La topologie limite inductive généralisée* τ *n'est autre que la topologie localement convexe* $\mathfrak{T}_\gamma$ *associée à la convergence vectorielle* γ.

Preuve. - De la continuité des injections : $(B, \mathfrak{T}^*|_B) \to E_\tau$, il résulte qu'on a : $\tau \leqslant \gamma$, donc $\tau \leqslant \mathfrak{T}_\gamma$. On obtient alors le résultat à l'aide de (2.2) et (2.1.1).

Bien que $\mathfrak{T}_\gamma$ soit la topologie localement convexe associée à la convergence γ, la convergence d'un filtre au sens de $\mathfrak{T}_\gamma$ n'équivaut pas à sa convergence au sens de γ ; autrement dit, la convergence γ n'est pas topologique en général. On sait que si une convergence vectorielle sur E est une topologie, le filtre $\bigcap_{\mathfrak{F} \xrightarrow[\alpha]{} 0} \mathfrak{F}$ engendré par les ensembles $\bigcup_{i \in I} F_i$, avec $F_i \in \mathfrak{F}_i$ et $\mathfrak{F}_i \xrightarrow[\alpha]{} 0$, est le filtre des voisinages de l'origine pour α. Plus précisément, pour que la convergence vectorielle α soit une topologie, il est nécessaire et suffisant que le filtre $\bigcap_{\mathfrak{F} \xrightarrow[\alpha]{} 0} F$ converge vers zéro au sens de α ([CF2]). L'étude du caractère topologique de la convergence γ nécessite un lemme qui n'est d'ailleurs qu'une retranscription d'un résultat de WIWEGER ([W], 2.4.2, p. 56). Nous en donnerons cependant la preuve, celle de Wiweger méritant d'être clarifiée :

(2.4) LEMME (WIWEGER). - *Soit* $E_{\mathcal{T}}$ *un espace localement borné et soit* $\mathcal{T}^*$ *une topologie vectorielle sur* $E_{\mathcal{T}}$ *qui coïncide avec* $\mathcal{T}$ *sur tout ensemble borné de* $E_{\mathcal{T}}$. *Alors* $\mathcal{T}^*$ *est plus fine que* $\mathcal{T}$.

Preuve. - On sait qu'un evt $E_{\mathcal{T}}$ est dit localement borné s'il possède un voisinage de l'origine borné. La topologie de $E_{\mathcal{T}}$ peut alors être définie par une quasi-norme q ([K], p. 159). Soit U la q-boule unité fermée de $E_{\mathcal{T}}$: $U = \{x \in E \; ; \; q(x) \leqslant 1\}$. On sait que les ensembles $(\frac{1}{n} U)_{n \geqslant 1}$ forment un système fondamental de voisinages de l'origine dans $E_{\mathcal{T}}$. Pour établir le résultat, il suffit donc de trouver un voisinage V^* de l'origine pour $\mathcal{T}^*$ vérifiant $V^* \subset U$. Or, par hypothèse, il existe un voisinage V^* pour $\mathcal{T}^*$ tel qu'on ait :

$$(2U) \cap V^* \subset U \qquad (1).$$

Supposons qu'on ait : $V^* \not\subset U$ et soit $x \in V^* \setminus U$. D'après (1) : $x \notin 2U$ et on a : $q(x) > 2$. Soit $\lambda = {}^2/_{q(x)}$. Comme $q(\lambda x) = 2$, on a : $\lambda x \in (2U) \setminus U$. Puisqu'on peut supposer V^* équilibré, on a : $\lambda x \in V^*$. Ainsi : $\lambda x \in (2U) \cap V^* \subset U$, ce qui est absurde.

Nous sommes maintenant en mesure d'établir que la convergence γ n'est qu'exceptionnellement une topologie. Nous élargirons ici nos hypothèses : $\mathcal{T}^*$ est une topologie vectorielle sur E, $\mathcal{B}$ une bornologie vectorielle sur E vérifiant $\mathcal{B} \subset \mathrm{Bor}(E_{\mathcal{T}^*})$.

(2.5) PROPOSITION. - *Soit* $\mathcal{T}^*$ *une topologie vectorielle sur* E *et* $\mathcal{B}$ *une bornologie vectorielle sur* E *vérifiant* $\mathcal{B} \subset \mathrm{Bor}(E_{\mathcal{T}^*})$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) la convergence γ *est topologique ;*

(b) $E_{\mathcal{T}^*}$ *est localement borné et* $\mathcal{B} = \mathrm{Bor}(E_{\mathcal{T}^*})$.

Preuve. - (a) $\Rightarrow$ (b) : soit $\mathcal{V}_\gamma$ le filtre des voisinages de l'origine pour la topologie vectorielle γ. Par définition de la convergence γ, nous avons $\mathcal{V}_\gamma \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$. Ainsi E_γ, c'est-à-dire l'espace vectoriel E muni de la topologie γ, est un evt localement borné puisqu'on a : $\mathcal{B} = \mathrm{Bor}(E_\gamma)$ (prop. (1.4)). Une extension évidente du lemme (2.2) permet d'écrire : $\mathcal{T}^*|_B = \gamma|_B$ pour tout $B \in \mathcal{B}$. Il résulte alors de (2.4) que la topologie $\mathcal{T}^*$ est plus fine que γ, d'où : $\gamma = \mathcal{T}^*$.

(b) $\Rightarrow$ (a) : soit $\mathcal{F}$ un filtre sur E vérifiant : $\mathcal{F} \xrightarrow[\mathcal{T}^*]{} 0$. $E_{\mathcal{T}^*}$ étant localement borné, on en déduit $\mathcal{F} \cap \mathrm{Bor}(E_{\mathcal{T}^*}) \neq \emptyset$, soit : $\mathcal{F} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$. Alors : $\mathcal{F} \xrightarrow[\gamma]{} 0$, ce qui termine la preuve.

Désignons par S l'espace des formes linéaires sur E dont les restrictions aux ensembles $B \in \mathcal{B}$ sont continues pour $\mathcal{T}^*$. La topologie τ vérifie alors (2.1) :

(i) $\tau|_B = \mathcal{T}^*|_B$ pour tout $B \in \mathcal{B}$;

(ii) $(E_\tau)' = S$.

L'étude de la condition (iii), c'est-à-dire l'étude des ensembles bornés d'une limite inductive généralisée présente des difficultés. Cependant :

(2.6) PROPOSITION. - $\mathcal{B} \cap \mathrm{Bor}(E_{\mathcal{T}^*}) \subset \mathrm{Bor}(E_\tau)$.

Preuve. - Soit $B \in \mathcal{B} \cap \mathrm{Bor}(E_{\mathcal{T}^*})$ et soit V un voisinage de l'origine dans E_τ. Il existe un voisinage de l'origine V^* pour $\mathcal{T}^*$ tel que l'on ait : $V^* \cap B \subset V \cap B$ (2.1.1). Soit $\lambda > 1$ vérifiant $B \subset \lambda V^*$. Alors, en supposant B et V^* disqués, on a :

$$B \subset (\lambda V^*) \cap (\lambda B) = \lambda (V^* \cap B) \subset \lambda (V \cap B) \subset \lambda V.$$

WIWEGER établit ([W], 2.4.1, p. 56) que si $\mathcal{B} = \mathrm{Bor}(E_{\mathcal{T}})$, où $\mathcal{T}$ désigne une topologie d'espace normé, et si la boule unité de $E_{\mathcal{T}}$ est fermée pour $\mathcal{T}^*$, on a l'égalité : $\mathcal{B} \cap \mathrm{Bor}(E_{\mathcal{T}^*}) = \mathrm{Bor}(E_\tau)$. De plus, lorsque E est un espace normé et lorsqu'on a $\mathcal{B} = \mathrm{Bor}(E_{\mathcal{T}})$, la topologie limite inductive généralisée définie par $\mathcal{B}$ et $\mathcal{T}^*$ est une topologie mixte au sens de Wiweger. Montrons que l'égalité qui vient d'être donnée peut être mise en défaut dans un cas plus général :

Exemple. - Considérons, sur le dual E=F' d'un elc complet non tonnelé F, la topologie faible $\mathcal{T}^* = \sigma(F',F)$ et la bornologie équicontinue $\mathcal{B}$. Alors : $\mathrm{Bor}(E_\tau) \not\subset \mathcal{B}$. En effet, la topologie τ, c'est-à-dire la plus fine topologie localement convexe qui coïncide sur les ensembles équicontinus de F' avec la topologie faible, n'est autre que la topologie de la convergence compacte sur E ([B], (3.3.6), p. 28 ; [K], (7), p. 271), i.e. $E_\tau = F'_c$. Les bornés de E_τ sont donc les bornés faibles de F', qui ne sont pas tous équicontinus.

Nous supposerons désormais que la bornologie $\mathcal{B}$ est plus fine que la bornologie canonique de $E_{\mathcal{T}^*}$: $\mathcal{B} \subset \mathrm{Bor}(E_{\mathcal{T}^*})$. Désignons alors par $S_{\mathcal{B}}$ l'espace $S = (E_\tau)'$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les ensembles $B \in \mathfrak{B}$. Le théorème de complétion de Grothendieck permet d'écrire :

$$S_{\mathfrak{B}} = [(E_{\mathcal{T}^*})'_{\mathfrak{B}}]\widehat{\ }.$$

Alors :

(2.7) PROPOSITION. - *Supposons que la bornologie $\mathfrak{B}$ admette une base d'ensembles fermés pour $\mathcal{T}^*$. Alors, si l'elc $(E_{\mathcal{T}^*})'_{\mathfrak{B}}$ est infratonnelé, on a : $\mathfrak{B} = \mathrm{Bor}(E_\tau)$.*

Preuve. - Les ensembles bornés de E_τ ont pour polaires dans $S = (E_\tau)'$ les tonneaux de S' pour la dualité (E,S). Comme $\mathfrak{B}$ admet une base d'ensembles fermés pour la topologie faible $\sigma(E,S)$, dire qu'on a : $\mathfrak{B} = \mathrm{Bor}(E_\tau)$, c'est dire que tout tonneau de S pour la dualité (E,S) est un voisinage de l'origine dans $S_{\mathfrak{B}}$. Or un tonneau de S pour la dualité (E,S) est un tonneau de $S_{\mathfrak{B}}$ et ce dernier elc est tonnelé par hypothèse.

La preuve que nous venons de donner montre qu'on peut affaiblir les deux hypothèses de la proposition (2.7) en supposant seulement que $\mathfrak{B}$ admet une base d'ensembles fermés pour $\sigma(E,S)$ et que l'elc $S_{\mathfrak{B}} = [(E_{\mathcal{T}^*})'_{\mathfrak{B}}]\widehat{\ }$ est tonnelé. Par ailleurs, il résulte de (2.7) que la condition $\mathfrak{B} = \mathrm{Bor}(E_\tau)$ est vérifiée lorsque la bornologie $\mathfrak{B}$ admet une base dénombrable d'ensembles fermés pour $\mathcal{T}^*$.

(2.8) COROLLAIRE. - *Supposons que la bornologie $\mathfrak{B}$ admette une base constituée de disques faiblement compacts dans $E_{\mathcal{T}^*}$ (ou plus généralement compacts pour $\sigma(E,S)$). Alors, pour qu'on ait $\mathfrak{B} = \mathrm{Bor}(E_\tau)$, il faut et il suffit que l'elc $S_{\mathfrak{B}}$ soit tonnelé.*

Preuve. - Nous avons seulement à prouver que la condition est nécessaire. Or l'identité $(E_\tau)'_\beta = (E_\tau)'_{\mathcal{B}}$ implique que $S_{\mathcal{B}}$ est tonnelé puisque la topologie de $S_{\mathcal{B}}$ est compatible avec la dualité (E,S).

En fait, il n'est pas nécessaire que l'elc $S_{\mathcal{B}}$ soit tonnelé pour obtenir l'identité $\mathcal{B} = \mathrm{Bor}(E_\tau)$. D'une manière plus précise, si l'elc $S_{\mathcal{B}}$ est tonnelé, il en est de même du dual fort $(E_\tau)'_\beta$ et E_τ est un espace distingué ([K], p. 306) :

Exemple. - Si on a : $\mathcal{B} = \mathrm{Bor}(E_{\mathcal{T}^*})$, nécessairement : $\mathcal{B} = \mathrm{Bor}(E_\tau)$. Supposons alors que $E_{\mathcal{T}^*}$ soit un espace de Fréchet non distingué ([K], p. 435). Alors : $(E_{\mathcal{T}^*})'_{\mathcal{B}} = (E_{\mathcal{T}^*})'_\beta$ est un elc complet non tonnelé.

Il résulte de (2.7) que si la bornologie $\mathcal{B}$ admet une base dénombrable d'ensembles fermés pour $\mathcal{T}^*$, l'elc E_τ est distingué.

Nous terminerons cette partie par un résultat qui, lorsque $\mathcal{B} = \mathrm{Bor}(E_\tau)$, a été établi indépendamment par NOUREDDINE ([N], (1.1.7), p. 107). La preuve dans le cas plus général qui nous intéresse, est en fait la même que celle de Noureddine :

(2. 9) <u>PROPOSITION</u>. - *Toute partie précompacte* H *de* $(E_\tau)'_{\mathcal{B}}$ *est équicontinue dans* $(E_\tau)'$.

Preuve. - Notons tout d'abord que l'elc $(E_\tau)'$ est complet et ses précompacts sont relativement compacts. Soit alors $\varepsilon>0$ et soit $B \in \mathcal{B}$. Désignons par B° le polaire de B dans $(E_\tau)'$. Il existe une partie finie F de $(E_\tau)'$ vérifiant :

$$H \subset F + \varepsilon B^\circ.$$

L'ensemble : $V = \varepsilon F^\circ$, où F° est ici le polaire de F dans E est un voisinage faible de l'origine dans E_τ. Or si $x \in V \cap B$ et $x' \in H$, on a : $|\langle x, x' \rangle| \leq 2\varepsilon$. Ainsi l'ensemble $H|_B$ des restrictions des éléments de H à B est équicontinu pour $\sigma(E_\tau, (E_\tau)')$, donc, a fortiori, pour τ et par là même pour $\mathcal{T}^*$.

Etant donné un elc E, désignons par E'_p l'elc obtenu en munissant le dual E' de la topologie de la convergence uniforme sur les ensembles précompacts de E. On sait ([DJ], déf. (3.1), p. 47) que E est dit p-infratonnelé si tout ensemble précompact de E'_p est équicontinu. On obtient alors immédiatement :

(2.10) COROLLAIRE 1. - *Supposons que la bornologie $\mathcal{B}$ soit plus fine que la bornologie précompacte de $E_{\mathcal{T}^*}$. Alors l'elc E_τ est p-infratonnelé.*

(2.11) COROLLAIRE 2. - *Soit $\mathcal{B}$ une bornologie convexe plus fine que la bornologie canonique d'un elc E. Alors E est p-infratonnelé pour la topologie localement convexe la plus fine qui coïncide sur les ensembles $B \in \mathcal{B}$ avec la topologie faible de E.*

A propos du dernier corollaire, on notera que si $E_{\mathcal{T}}$ est un espace normé de dimension infinie et si τ désigne la topologie localement convexe la plus fine qui coïncide sur les ensembles bornés de $E_{\mathcal{T}}$ avec la topologie faible $\sigma(E_{\mathcal{T}}, (E_{\mathcal{T}})')$, E_τ est un espace p-infratonnelé qui n'a pas la topologie de Mackey. Dans le même ordre d'idées, ROELCKE établit que si l'on considère sur un espace normé $E_{\mathcal{T}}$ une topologie localement convexe non normable $\mathcal{T}^*$ moins fine que $\mathcal{T}$, l'espace vectoriel E n'est pas infratonnelé pour la topologie mixte définie par $\mathcal{B} = \mathrm{Bor}(E_{\mathcal{T}})$ et par $\mathcal{T}^*$ ([R], cor. 2, p. 79).

La preuve de la proposition (2.9) montre qu'on peut préciser le résultat :

(2.12) PROPOSITION. - *Sur* E, *la topologie de la convergence compacte sur* $S_{\mathcal{B}}$ *n'est autre que la topologie* $\mathcal{T}_o$ *qui est la plus fine topologie localement convexe coïncidant sur les ensembles* $B \in \mathcal{B}$ *avec la topologie faible* $\sigma(E,S)$.

Preuve. - Déjà nous avons $(E_{\mathcal{T}_o})' = S$ car une forme linéaire faiblement continue sur les ensembles bornés de E_τ est un élément de $(E_\tau)'$. D'autre part, une partie compacte de $S_{\mathcal{B}}$ est, d'après la preuve de (2.9), faiblement équicontinue sur chaque borné de E_τ, donc équicontinue dans $(E_{\mathcal{T}_o})'$. Il reste maintenant à prouver qu'une partie équicontinue de $(E_{\mathcal{T}_o})'$ est précompacte dans $S_{\mathcal{B}}$. Or tout ensemble $B \in \mathcal{B}$ est précompact pour $\mathcal{T}_o$ et le résultat est acquis grâce au théorème de précompacité réciproque de GROTHENDIECK ([K], p. 266).

3. - UNE GENERALISATION DE LA TOPOLOGIE STRICTE.

Désignons par T un espace topologique complètement régulier et par $C^\infty(T)$ l'algèbre de Banach des fonctions réelles continues et bornées sur T. On sait que l'espace $M_b(T)$ des mesures de Radon bornées sur T s'identifie à l'espace des formes linéaires sur $C^\infty(T)$ continues sur la boule unité de $C^\infty(T)$ pour la topologie de la convergence compacte sur T ([B2], prop. 12, p. 65). En d'autres termes, l'espace $M_b(T)$ est l'espace dual de $C^\infty(T)$ pour la topologie localement convexe la plus fine qui coïncide sur les ensembles bornés de $C^\infty(T)$ avec la topologie de la convergence compacte sur T. Il s'agit là d'une topologie mixte généralement appelée topologie stricte. Nous nous proposons de reprendre cette étude en envisageant une topologie mixte plus générale : $\mathfrak{S}$ désignant maintenant une bornologie quelconque sur T et $C^\infty_{\mathfrak{S}}(T)$ l'espace $C^\infty(T)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les ensembles $A \in \mathfrak{S}$, nous noterons $C^\infty_{\mathfrak{S},\gamma}(T)$ l'elc obtenu en mettant sur $C^\infty(T)$ la topologie localement convexe la plus fine qui coïncide sur les ensembles bornés de $C^\infty(T)$ avec la topologie de $C^\infty_{\mathfrak{S}}(T)$.

L'étude des parties bornées de l'elc $C^\infty_{\mathfrak{S},\gamma}(T)$ se révèle particulièrement simple :

(3.1) <u>PROPOSITION</u>. - *Pour toute bornologie $\mathfrak{S}$ sur l'espace* T, *on a :*

$$\mathrm{Bor}(C^\infty_{\mathfrak{S},\gamma}(T)) = \mathrm{Bor}(C^\infty(T)).$$

Preuve. - Il est immédiat que la boule unité Δ de l'espace de Banach $C^\infty(T)$ est fermée pour la topologie de la convergence simple sur T. A fortiori, Δ est une partie fermée de l'elc $C^\infty_{\mathfrak{S}}(T)$. Le résultat cherché provient alors d'un théorème de WIWEGER mentionné plus haut ([W], 2.4.1, p. 56).

Soit βT le compactifié de Stone-Čech de T et soit $\overline{A}^\beta$ l'adhérence dans βT d'un ensemble $A \in \mathfrak{S}$. Lorsque A décrit $\mathfrak{S}$, les ensembles $\overline{A}^\beta$ constituent une base de compactologie sur l'ensemble $T_{\mathfrak{S}} = \bigcup_{A \in \mathfrak{S}} \overline{A}^\beta$. Nous noterons encore $T_{\mathfrak{S}}$ cet espace compactologique qui joue le même rôle pour la bornologie $\mathfrak{S}$ que l'espace T" de BUCHWALTER pour la bornologie canonique de T ([B4], p. 66). Rappelons ([G2], déf. (1.1.1), p. 3 et [B2], déf. 3, p. 9) qu'une prémesure μ sur un espace compactologique $(\mathfrak{X},\mathfrak{K})$ est un élément μ de la limite projective $\varprojlim_{K\in\mathcal{K}} M(K)$ où $M(K)$ désigne l'espace des mesures de Radon sur le compact $K \in \mathcal{K}$. La prémesure μ est dite bornée si $|\mu|^{\bullet}(1_{\mathfrak{X}}) < +\infty$.

La proposition qui suit est tout à fait analogue à la caractérisation du dual $(C_b(T))'$ qu'on peut trouver dans [B3] ; la preuve s'étend sans difficulté du cas de la bornologie canonique de T à celui d'une bornologie quelconque sur T. Un énoncé semblable est donné dans [G3] lorsque la bornologie $\mathfrak{S}$ est celle des parties σ-compactes de T :

(3.2) PROPOSITION. - *L'espace dual* $(C^{\infty}_{\mathfrak{S}}(T))'$ *s'identifie à l'espace des prémesures à support compact sur l'espace compactologique* $T_{\mathfrak{S}}$.

Ainsi un élément $\mu \in (C^{\infty}_{\mathfrak{S}}(T))'$ s'identifie à une mesure de Radon $\check{\mu}$ sur βT dont le support est contenu dans un ensemble $\overline{A}^{\beta}$, $A \in \mathfrak{S}$. On a évidemment : $(C^{\infty}_{\mathfrak{S}}(T))' \subset (C^{\infty}_{\mathfrak{S},\gamma}(T))' \subset (C^{\infty}(T))'$, ce dernier espace étant celui des mesures de Radon sur βT. L'étude du dual $(C^{\infty}_{\mathfrak{S},\gamma}(T))'$ requiert tout d'abord un lemme :

(3.3) LEMME. - *L'espace dual* $(C^{\infty}_{\mathfrak{S},\gamma}(T))'$ *est engendré par son cône positif.*

Preuve. - Etant donné un élément $\mu \in (C^{\infty}_{\mathfrak{S},\gamma}(T))'$, notons $\check{\mu}$ la mesure de Radon sur βT associée à μ définie par : $\check{\mu}(f^{\beta}) = \mu(f)$ où f^{β} désigne le prolongement continu canonique à βT de la fonction $f \in C^{\infty}(T)$. La mesure positive $\check{\mu}^{+}$ sur βT définit une forme linéaire μ^{+} sur $C^{\infty}(T)$. Il s'agit de montrer qu'on a : $\mu^{+} \in (C^{\infty}_{\mathfrak{S},\gamma}(T))'$. Soit Δ la boule unité de $C^{\infty}(T)$ et soit $V(A,\eta) = \{f \in C^{\infty}(T) \ ; \ \|f\|_A \leq \eta\}$ un voisinage fondamental de l'origine dans $C^{\infty}_{\mathfrak{S}}(T)$ avec $A \in \mathfrak{S}$ et $\|f\|_A = \sup_{x\in A} |f(x)|$. Etant donné $\varepsilon>0$ il existe un voisinage $V(A,\eta)$ tel qu'on ait : $|\mu(f)| \leqslant \varepsilon$ pour toute fonction $f \in V(A,\eta) \cap \Delta$. Soit $g \in C^{\infty}(T)$ vérifiant : $0 \leqslant g \leqslant |f|$; on a $g \in V(A,\eta) \cap \Delta$ et par conséquent : $\mu^{+}(|f|) = \sup\limits_{0 \leqslant g \leqslant |f|} \mu(g) \leqslant \varepsilon$. D'où $|\mu^{+}(f)| \leqslant \varepsilon$.

La caractérisation que nous avons rappelée de l'espace $M_b(T)$ des mesures de Radon bornées sur un espace topologique complètement régulier T se généralise alors ainsi :

(3.4) <u>PROPOSITION</u>. - *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) $\mu \in (C^{\infty}_{\mathfrak{S},\gamma}(T))'$;

(b) $\mu \in (C^{\infty}(T))'$ *et pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $A \in \mathfrak{S}$ *vérifiant* $|\check{\mu}|(\beta T \setminus \overline{A}^{\beta}) \leqslant \varepsilon$. *Autrement dit l'espace dual* $(C^{\infty}_{\mathfrak{S},\gamma}(T))'$ *s'identifie à l'espace des prémesures bornées sur l'espace compactologique* $T_{\mathfrak{S}}$.

Preuve. - Grâce à (3.3), on peut supposer que la mesure $\check{\mu}$ associée à $\mu \in (C^{\infty}_{\mathfrak{S},\gamma}(T))'$ est positive.

(a) $\Rightarrow$ (b) : supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $A \in \mathfrak{S}$ on ait : $\check{\mu}(\beta T \setminus \overline{A}^{\beta}) > \varepsilon$. Montrons que la forme linéaire μ n'est pas continue sur Δ pour la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence sur T. Etant donné $A \in \mathfrak{S}$, il existe un compact $K \subset \beta T \setminus \overline{A}^{\beta}$ tel que : $\check{\mu}(K) > \frac{\varepsilon}{2}$. Soit alors f^{β} une fonction continue sur βT telle que $f^{\beta}(x) = 1$ si $x \in K$ et $f^{\beta}(x) = 0$ si $x \in \overline{A}^{\beta}$, avec $0 \leqslant f^{\beta}(x) \leqslant 1$, $x \in \beta T$. Alors : $f = f^{\beta}|_{T}$ vérifie : $f \in V(A,\eta) \cap \Delta$ et : $|\mu(f)| = |\check{\mu}(f^{\beta})| \geqslant \check{\mu}(K) > \frac{\varepsilon}{2}$.

(b) $\Rightarrow$ (a) : reprenons la preuve de BOURBAKI ([B2], prop. 12, p. 65). Etant donné $\varepsilon > 0$, considérons un ensemble $A \in \mathfrak{S}$ vérifiant $\check{\mu}(\beta T \setminus \overline{A}^{\beta}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ et un réel $\eta > 0$ tel que : $\eta\check{\mu}(\overline{A}^{\beta}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Alors, on a pour toute fonction

$f \in V(A,\eta) \cap \Delta$:

$$|\mu(f)| = \left|\int_{\beta T} f^\beta d\check{\mu}\right| \leq \int_{\beta T \setminus \overline{A}^\beta} |f^\beta|\, d\check{\mu} + \int_{\overline{A}^\beta} |f^\beta|\, d\check{\mu} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \eta\check{\mu}(\overline{A}^\beta) \leq \varepsilon.$$

Désignons par $M_b(T_{\mathfrak{S}})$ l'espace des prémesures bornées sur l'espace compactologique $T_{\mathfrak{S}}$, c'est-à-dire l'espace dual $(C^\infty_{\mathfrak{S},\gamma}(T))'$. La norme de la masse totale est définie sur $M_b(T_{\mathfrak{S}})$ par : $\|\mu\| = |\check{\mu}|(\beta T) = |\check{\mu}|(T_{\mathfrak{S}})$. On a alors immédiatement avec (3.1) :

(3.5) <u>COROLLAIRE</u>. - *Muni de la norme de la masse totale, l'espace* $M_b(T_{\mathfrak{S}})$ *est un sous-espace fermé de l'espace de Banach* $M(\beta T)$ *des mesures de Radon sur* βT.

La notion de partie de Prokhorov de l'espace des mesures bornées sur un espace compactologique $T_{\mathfrak{S}}$ est un extension de la définition classique :

(3.6) <u>DEFINITION</u>. - *Une partie* H *de* $M_b(T_{\mathfrak{S}})$ *est appelée partie de Prokhorov si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

(P1) H *est bornée dans* $M_b(T_{\mathfrak{S}})$ *pour la norme de la masse totale ;*

(P2) pour tout $\varepsilon>0$, *il existe* $A \in \mathfrak{S}$ *tel qu'on ait :*

$$\sup_{\mu\in H} |\check{\mu}(\beta T \setminus \overline{A}^\beta)| \leq \varepsilon.$$

La proposition qui suit est alors une généralisation naturelle d'un résultat bien connu ([S], th. 5.1, p. 322 ; [B1], prop. 5, p. 77) :

(3.7) <u>PROPOSITION</u>. - *Pour qu une partie* H *du dual* $(C^\infty_{\mathfrak{S},\gamma}(T))'$ *soit équicontinue, il faut et il suffit que* H *soit une partie de Prokhorov de* $M_b(T_{\mathfrak{S}})$.

Preuve. - Soit H une partie de Prokhorov de $M_b(T_{\mathfrak{S}})$ et soit B un ensemble borné de $C^\infty(T)$. Notons C(B) l'espace des fonctions réelles sur B continues pour la topologie induite par $C^\infty_{\mathfrak{S}}(T)$. Nous devons montrer que l'ensemble H_B des restrictions à B des éléments de H est une partie équicontinue de C(B). Soit $V(A,\eta)$ un voisinage de l'origine dans $C^\infty_{\mathfrak{S}}(T)$. Posons : $V = V(A,\eta) \cap B$. On a alors :

$$\operatorname*{Sup}_{\mu\in H}\ \operatorname*{Sup}_{f\in V} |\check{\mu}(f^\beta)| \leqslant \operatorname*{Sup}_{\mu\in H}\ \operatorname*{Sup}_{f\in B} \int_{\beta T\setminus \overline{A}^\beta} |f^\beta|d\check{\mu}| + \operatorname*{Sup}_{\mu\in H}\ \operatorname*{Sup}_{f\in V(A,\eta)} \int_{\overline{A}^\beta} |f^\beta|d|\check{\mu}|$$

Posons : $M_B = \operatorname*{Sup}_{f\in B} \|f^\beta\|$, $M_H = \operatorname*{Sup}_{\mu\in H} |\check{\mu}|(\beta T)$.

On a :

$$\operatorname*{Sup}_{f\in H}\ \operatorname*{Sup}_{f\in V} |\check{\mu}(f^\beta)| \leqslant M_B . \operatorname*{Sup}_{\mu\in H} |\check{\mu}(\beta T\setminus \overline{A}^\beta) + \eta M_H .$$

Ainsi, étant donné $\varepsilon>0$, en choisissant convenablement A grâce à (P2) et $\eta>0$ vérifiant : $\eta M_H \leqslant \varepsilon$, on obtient : $\operatorname*{Sup}_{f\in H}\ \operatorname*{Sup}_{f\in B} |\check{\mu}(f^\beta)| \leqslant 2\varepsilon$.

Pour la réciproque, remarquons qu'une partie équicontinue H de $(C^\infty_{\mathfrak{S},\gamma}(T))'$ est fortement bornée, donc vérifie la condition (P1). Soit alors $\varepsilon>0$. Par équicontinuité, pour la topologie induite par $C^\infty_{\mathfrak{S}}(T)$, de l'ensemble H des restrictions des éléments de H à Δ, on obtient, en choisissant convenablement $A\in\mathfrak{S}$ et $\eta>0$, $|\mu(f)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ pour toute fonction $f\in V(A,\eta) \cap \Delta$. Soit alors $g\in C^\infty(T)$ vérifiant $0\leqslant g\leqslant |f|$. On a : $|\mu(g)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, d'où $\mu^+(|f|) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. De la même manière : $\mu^-(|f|) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, donc : $|\mu|(|f|) \leqslant \varepsilon$. Considérons un compact K vérifiant : $K \subset \beta T\setminus \overline{A}^\beta$. Il existe une fonction $f^\beta \in C(\beta T)$ telle qu'on ait : $f^\beta(x) = 1$ si $x\in K$ et $f^\beta(x) = 0$ si $x\in \overline{A}^\beta$ avec $0 \leqslant f^\beta(x) \leqslant 1$ pour tout $x\in\beta T$. Alors la fonction $f = f^\beta|_T$ appartient à

$V(A,\eta)\cap\Delta$. Ainsi : $|\check{\mu}|(K) \leqslant |\check{\mu}|(f^{\beta}) = |\mu|(f) \leqslant \varepsilon$. Soit finalement :
$|\check{\mu}|(\beta T)\setminus \overline{A}^{\beta}) = \mathrm{Sup}\,\{|\check{\mu}|(K)\ ;\ K \subset \beta T\setminus \overline{A}^{\beta}\} \leqslant \varepsilon$.

Nous appellerons topologie étroite sur $M_b(T_{\mathfrak{S}})$ la topologie faible $\sigma(M_b(T_{\mathfrak{S}}),C^{\infty}(T))$. Lorsque $\mathfrak{S}$ désigne la bornologie engendrée sur T par les parties compactes, l'étude de conditions suffisantes portant sur T pour que les parties étroitement compactes du cône positif : $M_b(T_{\mathfrak{S}})^{+} = M_b(T)^{+}$ soient des parties de Prokhorov est classique ; il en est ainsi lorsque T est localement compact ou polonais ([B2], th. 2, p. 64). La preuve dans le cas où T est polonais utilise seulement le fait qu'un tel espace est intersection d'une suite décroissante d'espaces localement compacts.

Rappelons que deux parties X et Y d'un espace complètement régulier T sont dites normalement séparées s'il existe une fonction continue $f : T \to \mathbb{R}$ telle que l'on ait $f(x) = 1$ pour tout $x\in X$ et $f(y) = 0$ pour tout $y\in Y$. On obtient alors la proposition suivante qui nous a été indiquée par Z. Frolik :

(3.8) PROPOSITION (FROLIK). - *Supposons que la bornologie $\mathfrak{S}$ sur T vérifie la condition : (C) pour tout $A\in\mathfrak{S}$, il existe $B\in\mathfrak{S}$ tel que les ensembles A et $(T\setminus B)$ soient normalement séparés.*
Alors toute partie étroitement compacte du cône positif $M_b(T_{\mathfrak{S}})^{+}$ est une partie de Prokhorov.

Preuve. - Selon une méthode employée par VARADARAJAN ([V], p. 224), nous établirons tout d'abord la continuité de l'application bilinéaire :

$$\begin{array}{ccc} (f,\mu) & \to & \int f d\mu \\ \Delta_{\mathfrak{S}} \times M_b(T_{\mathfrak{S}})^+ & \to & \mathbb{R} \end{array}$$

où $\Delta_{\mathfrak{S}}$ désigne la boule unité de $C^\infty(T)$ muni de la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence sur T et $M_b(T_{\mathfrak{S}})^+$ le cône positif de $M_b(T_{\mathfrak{S}})$ muni de la topologie étroite.

Etant donnée la mesure $\mu \in M_b(T_{\mathfrak{S}})^+$, considérons une suite généralisée (μ_α) de $M_b(T_{\mathfrak{S}})^+$ qui converge étroitement vers μ et une suite généralisée (f_i) de $\Delta_{\mathfrak{S}}$ qui converge vers zéro. Soit $\varepsilon>0$, soit $A \in \mathfrak{S}$ vérifiant : $\mu(\beta T \setminus \overline{A}^\beta) \leqslant \varepsilon$ et soit B un ensemble de $\mathfrak{S}$ tel que A et $(T \setminus B)$ soient normalement séparés. Il existe alors une fonction $f \in \Delta$ telle que l'on ait : $f(x) = 0$ si $x \in A$, $f(x) = 1$ si $x \in T \setminus B$ et $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in T$. Nous avons donc :

$$\check{\mu}(\beta T \setminus \overline{B}^\beta) \leqslant \check{\mu}(f^\beta) \leqslant \check{\mu}(\beta T \setminus \overline{A}^\beta) \leqslant \varepsilon.$$

Comme (μ_α) converge étroitement vers μ, il existe α_0 tel qu'on ait pour tout $\alpha \geqslant \alpha_0$: $0 \leqslant \mu_\alpha(f) \leqslant \mu(f) + \varepsilon = \check{\mu}(f^\beta) + \varepsilon \leqslant 2\varepsilon$. Or on peut écrire :

$$0 \leqslant |\mu_\alpha(f_i)| \leqslant \int_{\beta T} |f_i^\beta| d\check{\mu}_\alpha \leqslant \int_{\beta T \setminus \overline{B}^\beta} |f_i^\beta| \, d\check{\mu}_\alpha + \int_{\overline{B}^\beta} |f_i^\beta| \, d\check{\mu}_\alpha \, .$$

Le premier terme se majore aisément puisque $f_i \in \Delta$:

$$0 \leqslant \int_{\beta T \setminus \overline{B}^\beta} |f_i^\beta| \, d\check{\mu}_\alpha \leqslant \check{\mu}_\alpha(\beta T \setminus \overline{B}^\beta) \leqslant \check{\mu}_\alpha(f^\beta) = \mu_\alpha(f) \leqslant 2\varepsilon.$$

D'autre part il existe i_0 tel que pour tout $i \geqslant i_0$, on ait : $\|f_i^\beta\|_{\overline{B}^\beta} \leqslant \varepsilon$. On a donc à partir d'un certain rang (i_1, α_1) :

$$0 \leqslant \int_{\overline{B}^\beta} |f_i^\beta| d\check{\mu}_\alpha \leqslant \varepsilon \, \check{\mu}_\alpha(\overline{B}^\beta) \leqslant \varepsilon \mu_\alpha(T) \leqslant \varepsilon(\mu(T)+\varepsilon).$$

Nous avons ainsi établi la continuité de l'application bilinéaire : $(f,\mu) \longrightarrow \int f d\mu$ sur l'espace $\Delta_{\mathfrak{S}} \times M_b(T\ \ )^+$.

On termine alors la preuve de la même façon que Varadarajan. Soit H une partie étroitement compacte du cône positif $M_b(T_{\mathfrak{S}})^+$. D'après ce qui précède, pour tout $\varepsilon > o$ et tout élément $\mu \in H$, il existe un voisinage ouvert V_μ de μ dans $M_b(T_{\mathfrak{S}})^+$ et un voisinage U_μ de l'origine dans $\Delta_{\mathfrak{S}}$ tels que l'on ait : $\sup_{\nu \in V\ \ ,f \in U_\mu} |\nu(f)| \leqslant \varepsilon$. Par compacité de H, on extrait du recouvrement ouvert (V_μ) de H le recouvrement fini $\{V_{\mu_i}\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. En considérant le voisinage de l'origine dans $\Delta_{\mathfrak{S}}$: $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{\mu_i}$, on obtient :

$\sup_{\mu \in H, f \in U_o} |\mu(f)| \leqslant \varepsilon$, ce qui achève la preuve.

Il faut noter que la condition (C) de la proposition (3.8) n'est pas nécessaire. En effet, elle implique que toute partie $A \in \mathfrak{S}$, et en particulier tout point $x \in T$, admet un voisinage B qui est un élément de $\mathfrak{S}$. Ainsi tout point de T admet un système fondamental de voisinages constitué d'éléments de $\mathfrak{S}$. Lorsque $\mathfrak{S}$ est la bornologie engendrée sur T par les parties compactes, la condition (C) implique que T est localement compact. Or, dans ce cas, la conclusion du théorème reste valable gi T est un espace polonais. D'une façon générale, si l'on désigne par $cT_{\mathfrak{S}}$ l'espace de Kelley obtenu en munissant $T_{\mathfrak{S}}$ de la topologie la plus fine coïncidant sur les ensembles $\bar{A}^{\beta}$ avec leur topologie compacte ([B4], p. 20) il est clair que la condition (C) implique que $cT_{\mathfrak{S}}$ est un espace localement compact.

BIBLIOGRAPHIE

[B1] A. BADRIKIAN, *Séminaire sur les fonctions aléatoires linéaires et les mesures cylindriques*, Lecture Notes 139, Springer, Berlin, (1970).

[B2] N. BOURBAKI, *Intégration*, Ch. 9, Hermann, Paris, (1969).

[B3] H. BUCHWALTER, *Les bornés d'un espace topologique complètement régulier*, Séminaire Choquet, Paris, Exp. 14, (1970), p. 115.

[B4] H. BUCHWALTER, *Topologies et compactologies*, Publ. Dép. Math. Lyon, 6-2, (1970), p. 1-74.

[C] J.B. COOPER, *The strict topology and spaces with mixed topologies*, Proc. Amer. Math. Soc., 30, (1971), p. 583-592.

[CF1] C.H. COOK-H.R. FISCHER, *On equicontinuity and continuous convergence*, Math. Ann., 159, (1965), p. 94-104.

[CF2] C.H. COOK-H.R. FISCHER, *Regular convergence spaces*, Math. Ann., 174, (1967), p. 1-7.

[DJ] J. DAZORD-M. JOURLIN, *Sur quelques classes d'espaces localement convexes*, Publ. Dép. Math. Lyon, 8-2, (1971), p. 39-69.

[F] H.R. FISCHER, *Limesräume*, Math. Ann., 137, (1959), p. 269-303

[G1] D.J.H. GARLING, *A generalized form of inductive-limit topology for vector spaces*, Proc. London Math. Soc., (3), 14, (1964), p. 1-28.

[G2] A. GOLDMAN, *Intégration sur les espaces compactologiques*, Thèse de spécialité, Lyon (1972).

[G3] D. GULICK, *The σ-compact-open topology and its relatives*, Math. Scand., 30, (1972), p. 159-176.

[K] G. KÖTHE, *Topological vector spaces I*, Springer, Berlin, (1969).

[N] K. NOUREDDINE, *Nouvelles classes d'espaces localement convexes*, Publ. Dép. Math. Lyon, 10-3, (1973), p. 105-123.

[R] W. ROELCKE, *On the finest locally convex agreeing with a given topology on a sequence of absolutely convex sets*, Math. Ann., 198, (1972), p. 57-80.

[S] F.D. SENTILLES, *Bounded continuous functions on a completely regular space*, Trans. Amer. Math. Soc., 168, (1972), p. 311-336.

[V] V.S. VARADARAJAN, *Measures on topological spaces*, Amer. Math. Soc. Translations, 48, (1965), p. 161-228.

[W] A. WIWEGER, *Linear spaces with mixed topology*, Studia Math., 20, (1961), p. 47-68.

Manuscrit remis le 8 mars 1974.

J. DAZORD
Département de Mathématiques
Université Claude Bernard
43, bd du 11 novembre 1918
69621 - VILLEURBANNE

C.H. COOK
Department of Mathematics
University of Maryland
COLLEGE PARK
MD, 20742
U.S.A.