

ALAIN VILLENEUVE

Une remarque sur le lemme de Borel-Cantelli

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1974, tome 11, fascicule 4
, p. 1-25

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1974__11_4_1_0

© Université de Lyon, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE REMARQUE SUR LE LEMME DE BOREL-CANTELLI

par Alain VILLENEUVE

0 - INTRODUCTION.

Dans ce qui suit, on désignera par (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et par $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'événements de \mathcal{A} .

Pour évaluer $P(\limsup_{n \geq 1} A_n)$, le traditionnel lemme de Borel-Cantelli règle définitivement le cas où $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < +\infty$: $P(\limsup_{n \geq 1} A_n) = 0$; et dans le cas où $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty$, il exige l'indépendance mutuelle des A_n pour conclure que $P(\limsup_{n \geq 1} A_n) = 1$.

R.M. Fischler [5] [6] [7] a donné des extensions de ce lemme dans le cas où la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ est mélangeante. Les différentes démonstrations proposées sont sans rapport avec la démonstration du cas traditionnel et, par ailleurs, Fischler [5] évoque la possibilité d'un point de vue différent à partir de résultats de Sucheston sur les suites 0-1.

Le but de cette note est d'abord de reprendre le point de vue évoqué par Fischler dans [5] pour donner de nouvelles démonstrations des extensions de Fischler et préciser leur lien avec le cas traditionnel, puis d'examiner le cas où la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ est stable pour montrer que le point de vue adopté est assez restrictif ; enfin de donner une extension dans le cas où la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ est mélangeante de Cesáro ou stable de Cesáro. Une possibilité d'extension est proposée en conclusion.

1 - CAS OU LA SUITE $(A_n)_{n \geq 1}$ EST MELANGEANTE.

Si $(B_n)_{n \geq 1}$ est une suite d'événements de \mathcal{A} , pour tout $n \geq 1$, on désigne par 1_{B_n} l'indicatrice de B_n et par $\mathcal{A}(1_{B_n}, 1_{B_{n+1}}, \dots)$ la sous-tribu de \mathcal{A} engendrée par les variables aléatoires $1_{B_n}, 1_{B_{n+1}}, \dots$.

DEFINITION 1. - Une suite $(B_n)_{n \geq 1}$ d'événements de \mathcal{A} est dite 0-1 si la tribu queue $\mathcal{A}_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}(1_{B_n}, 1_{B_{n+1}}, \dots)$ est équivalente à la tribu $\{\emptyset, \Omega\}$, c'est-à-dire si $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$ pour tout $A \in \mathcal{A}_\infty$.

Si l'on envisage une autre probabilité Π sur (Ω, \mathcal{A}) et si l'équivalence avec la tribu $\{\emptyset, \Omega\}$ a lieu selon Π , on parlera de suite Π -(0-1).

La remarque élémentaire qui sert de point de départ est résumée dans le lemme suivant :

LEMME 1. - Si la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ admet une sous-suite $(B_n)_{n \geq 1}$ telle que :

a) $(B_n)_{n \geq 1}$ est une suite 0-1.

b) la suite $(1_{B_n})_{n \geq 1}$ ne converge pas presque sûrement vers 0, alors

$$P(\limsup_{n \geq 1} A_n) = 1.$$

Preuve. - De façon générale $D = \{\omega \in \Omega \mid 1_{B_n}(\omega) \not\rightarrow 0\}$ appartient à la tribu

queue $\mathcal{A}_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}(1_{B_n}, 1_{B_{n+1}}, \dots)$ associée à la suite $(1_{B_n})_{n \geq 1}$, car

$$\bigcap_{\Omega} D = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup_{p=n}^{\infty} \left(\bigcap_{m=p}^{\infty} \{\omega \in \Omega \mid 1_{B_m}(\omega) < \frac{1}{k}\} \right) \right) \text{ pour tout } n \geq 1, \text{ et, puisque la}$$

suite $(B_n)_{n \geq 1}$ est 0-1, $P(D) = 0$ ou $P(D) = 1$.

Puisque la suite $(1_{B_m})_{m \geq 1}$ ne converge pas presque sûrement vers 0,

$P(D) > 0$, donc $P(D) = 1$.

Or $D = \limsup_{n \geq 1} B_n$, car $1_{B_n}(\Omega) \subseteq \{0,1\}$ pour tout $n \geq 1$, et, puisque

$(B_n)_{n \geq 1}$ est une sous-suite de $(A_n)_{n \geq 1}$, $D = \limsup_{n \geq 1} B_n \subseteq \limsup_{n \geq 1} A_n$; donc

$$P(\limsup_{n \geq 1} A_n) = 1.$$

La forme traditionnelle du lemme de Borel-Cantelli, établie habituellement à partir de la divergence de la série à termes négatifs $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1-P(A_n))$

(divergence qui montre, moyennant l'indépendance mutuelle des A_n , que

$P(\bigcap_{n=p}^{\infty} \Omega A_n) = 0$ pour tout $p \geq 1$, donc que $P(\liminf_{n \geq 1} \int_{\Omega} A_n) = 0$, apparait alors comme une conséquence du lemme 1, tout au moins quand $P(A_n) \rightarrow 0$.

COROLLAIRE 1. (Borel-Cantelli). - Si les événements $A_n (n \geq 1)$ sont mutuellement indépendants et si la série $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ diverge, on a : $P(\limsup_{n \geq 1} A_n) = 1$.

Preuve. - Puisque les événements A_n sont mutuellement indépendants, il résulte de la loi du tout ou rien de Kolmogorov que la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ est 0-1.

La suite $(1_{A_n})_{n \geq 1}$ ne converge pas presque sûrement vers 0. En effet, si $P(A_n) \rightarrow 0$, c'est une conséquence du théorème de la convergence dominée de Lebesgue, car $|1_{A_n}| \leq 1$ pour tout $n \geq 1$.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = 0$, puisque la série $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ diverge, il en est de même de la série $\sum_{n=1}^{\infty} (P(A_n) (1-P(A_n)))$ et, puisque les variables aléatoires

1_{B_n} sont mutuellement indépendantes, il résulte du théorème de Lyapounov (cf. H. Cramer [3] p. 62) que

$$\frac{1_{A_1} + \dots + 1_{A_n} - (P(A_1) + \dots + P(A_n))}{[P(A_1)(1-P(A_1)) + \dots + P(A_n)(1-P(A_n))]^{1/2}}$$

converge en

loi vers une loi de Gauss réduite ; et, en particulier, si $X_n = 1_{A_1} + \dots + 1_{A_n} - (P(A_1) + \dots + P(A_n))$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\{X_n < 0\} = \frac{1}{2}$.

Or, si la suite $(1_{A_n})_{n \geq 1}$ converge presque sûrement vers 0, la série $\sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n}$

converge presque sûrement, car $\prod_{n=1}^{\infty} P(A_n) < 1$ pour tout $n \geq 1$, et, à partir de la divergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$, $X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} -\infty$.

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\{X_n < 0\} = 1$ et une contradiction.

Le lemme 1 permet alors de conclure que $P(\limsup_{n \geq 1} A_n) = 1$.

L'intérêt de cette démonstration, beaucoup moins directe que la démonstration habituelle, est donné par la remarque 1 ci-dessous.

Comme deuxième conséquence, le lemme 1 redonne avec de nouvelles démonstrations les extensions de Fischler aux suites mélangeantes.

DEFINITION 2. - Une suite $(B_n)_{n \geq 1}$ d'événements de \mathcal{A} est dite mélangeante si pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} |P(B_n \cap A) - P(B_n)P(A)| = 0$.
Si, de plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n) = \alpha$ ($0 \leq \alpha \leq 1$), la suite $(B_n)_{n \geq 1}$ est dite mélangeante de densité α .

COROLLAIRE 2 (FISCHLER). - Si la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ est mélangeante et si la suite numérique $(P(A_n))_{n \geq 1}$ ne converge pas vers 0, on a $P(\limsup_{n \geq 1} A_n) = 1$.

Preuve. - Si la suite $(P(A_n))_{n \geq 1}$, à valeurs dans le compact $[0, 1]$, ne converge pas vers 0, la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ admet une sous-suite $(B_n)_{n \geq 1}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n) = \alpha > 0$.

Puisque la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ est mélangeante, selon Sucheston [11], la sous-suite $(B_n)_{n \geq 1}$ de $(A_n)_{n \geq 1}$ admet elle-même une sous-suite $(C_n)_{n \geq 1}$ qui est 0-1.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n) = \alpha > 0$, donc aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(C_n) = \alpha > 0$, il résulte du théorème de la convergence dominée de Lebesgue que la suite $(1_{C_n})_{n \geq 1}$ ne converge pas presque sûrement vers 0.

D'où $P(\limsup_{n \geq 1} A_n) = 1$ à partir du lemme 1.

REMARQUE 1- Les deux démonstrations précédentes montrent donc en particulier que la forme traditionnelle du lemme de Borel-Cantelli et la première extension de Fischler ont en fait la même origine : l'existence d'une sous-suite 0-1 qui a de bonnes propriétés. La proposition du paragraphe 2 montrera au contraire qu'il n'en est pas ainsi pour l'extension aux suites stables.

Dans le cas particulier où $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = 0$ (ce qui implique le caractère mélangeant de la suite $(A_n)_{n \geq 1}$), Fischler a d'abord montré que l'on pouvait avoir $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty$ et $0 < P(\limsup_{n \geq 1} A_n) < 1$ [5]; puis, sous l'hypothèse de l'existence d'une décomposition finie de la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ en sous-suites 0-1, que $P(\limsup_{n \geq 1} A_n) = 0$ ou $P(\limsup_{n \geq 1} A_n) = 1$ [7]. Montrons que ce dernier résultat est une conséquence immédiate du lemme 1.

COROLLAIRE 3 (FISCHLER). - Si la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ est telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = 0 \quad (\text{donc mélangeante}),$$

$(A_n)_{n \geq 1}$ a une décomposition finie en sous suites 0-1, on a

$$P(\limsup_{n \geq 1} A_n) = 0 \quad \text{ou} \quad P(\limsup_{n \geq 1} A_n) = 1.$$

Précisons d'abord l'hypothèse de l'existence d'une décomposition finie en sous-suites 0-1 ; à partir du résultat de Sucheston [11] affirmant que toute sous-suite d'une suite mélangeante admet elle-même une sous-suite 0-1, il est toujours possible d'assurer l'existence d'une décomposition d'une suite mélangeante $(A_n)_{n \geq 1}$ en une famille au plus dénombrable de sous-suites $(A_n^j)_{n \geq 1}$ ($j=1,2,\dots$) qui sont toutes 0-1 (chaque A_n appartenant à une et une seule sous-suite $(A_n^j)_{n \geq 1}$) ; dans le cas où la famille de sous-suites est finie, on parlera de décomposition finie de la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ en sous-suites 0-1.

Preuve. - Soit $(A_n^j)_{n \geq 1}$ ($j=1,2,\dots,m$) la décomposition finie de la suite $(A_n)_{n \geq 1}$.

S'il existe $j_0 \in \{1,2,\dots,m\}$ tel que la suite $(A_n^{j_0})_{n \geq 1}$ ne converge pas presque sûrement vers 0, il résulte du lemme 1 que $P(\limsup_{n \geq 1} A_n) = 1$, car $(A_n^{j_0})_{n \geq 1}$ est une sous-suite 0-1.

Si, pour tout $j \in \{1,2,\dots,m\}$, $1_{A_n^j} \xrightarrow{\text{p.s.}} 0$, alors aussi $\sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n^j}$

converge presque sûrement ; et il résulte de la réciproque du théorème

d'associativité des familles sommables à termes ≥ 0 que $\sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n}$ converge presque sûrement ; donc $1_{A_n} \xrightarrow{\text{p.s.}} 0$; et $P(\limsup_{n \geq 1} A_n) = 0$.

REMARQUE 2. - La condition de l'existence d'une décomposition finie en sous-suites 0-1 est nécessaire si $P(\limsup_{n \geq 1} A_n) = 0$ et non nécessaire

si $P(\limsup_{n \geq 1} A_n) = 1$.

Si $P(\limsup_{n \geq 1} A_n) = 0$, $1_{A_n} \xrightarrow{\text{p.s.}} 0$ (cf. preuve du lemme 1) et la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ est 0-1 (cf. Sucheston [11] p. 452).

Dans le cas où $P(\limsup_{n \geq 1} A_n) = 1$, le caractère non nécessaire de l'existence d'une décomposition finie apparaît sur un exemple emprunté à Fischler [5] et légèrement adapté ici :

$\Omega = [0, 1[$; \mathcal{A} est la tribu des boréliens de Ω ; P est la mesure de Borel sur \mathcal{A} ;

Si $(A_n)_{n \geq 1}$ est la suite définie par :

$$A_1 = [0, \frac{1}{2} [, A_2 = [\frac{1}{2}, 1[, \dots, A_n = [\frac{j}{2^m}, \frac{j+1}{2^m} [,$$

où $n = 2^m + j$ est l'unique décomposition de $n \geq 1$ telle que $m \in \mathbb{N}$ et $0 \leq j < 2^m$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^m} = 0$.

Et $P(\limsup_{n \geq 1} A_n) = 1$, car, pour tout $m > 0$,

$\left\{ \left[\frac{j}{2^m}, \frac{j+1}{2^m} \right] \right\}_{j=0,1,\dots,2^m-1}$ constitue un recouvrement

de $\Omega = [0, 1[$.

Il n'existe aucune décomposition finie de la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ en sous-suites 0-1.

En effet, soit $(B_n)_{n \geq 1}$ la sous-suite de $(A_n)_{n \geq 1}$ définie par $(B_n)_{n \geq 1} = \{A_n \in \mathcal{A} / A_n \subseteq [0, \frac{1}{2}[\}$.

Un raisonnement analogue à celui concernant la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ permet d'affirmer que $P(\limsup_{n \geq 1} B_n) = \frac{1}{2}$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n) = 0$, il résulte du corollaire 3 qu'il n'existe aucune décomposition finie de la suite $(B_n)_{n \geq 1}$ en sous-suites 0-1.

D'où le résultat car, si $(A_n)_{n \geq 1}$ admet une décomposition finie en sous-suites 0-1, cette décomposition détermine canoniquement une décomposition finie de la suite $(B_n)_{n \geq 1}$ en sous-suites 0-1 (puisque toute sous-suite d'une suite 0-1 est elle-même 0-1).

REMARQUE 3. - Même dans le cas d'une suite $(A_n)_{n \geq 1}$ 0-1 (ce qui est une hypothèse plus forte que le caractère mélangeant (cf. Sucheston [11])), la divergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ ne suffit pas pour assurer que

$P(\limsup_{n \geq 1} A_n) = 1$. En effet, soit (Ω, \mathcal{A}, P) l'espace probabilisé introduit dans la remarque 2 et $A_n = [0, \frac{1}{n}[$ pour tout $n \geq 1$.

La suite $(A_n)_{n \geq 1}$ est 0-1 car $1_{A_n} \xrightarrow{P.S.} 0$ (cf. Sucheston [11] p.452).

En outre $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge et, puisque $1_{A_n} \xrightarrow{P.S.} 0$,

$$P(\limsup_{n \geq 1} A_n) = 0.$$

Il faut noter que le résultat précédent ne dépend pas du tout de la "rapidité" de la divergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$, mais provient d'une "localisation" des événements A_n . Une certaine condition de "dispersion" des événements A_n permet de donner une forme plus analytique du lemme 1.

LEMME 2. - Si la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ admet une sous-suite $(B_n)_{n \geq 1}$ telle que $(B_n)_{n \geq 1}$ est une suite 0-1 et il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n \cap A) = +\infty$, pour tout $A \in \mathcal{A}$ tel que $P(A) > 1 - \varepsilon$, on a $P(\limsup_{n \geq 1} A_n) = 1$.

Preuve . (ab absurdo).-

Supposons que $P(\limsup_{n \geq 1} A_n) < 1$; puisque $(B_n)_{n \geq 1}$ est une sous-suite 0-1 de $(A_n)_{n \geq 1}$ on a aussi $P(\limsup_{n \geq 1} B_n) < 1$, donc $P(\limsup_{n \geq 1} B_n) = 0$.

Puisque $P(\limsup_{n \geq 1} B_n) = 0$, $1_{B_n} \xrightarrow{P.S.} 0$ et, puisque, pour tout $n \geq 1$, $1_{B_n}(\Omega) \in \{0, 1\}$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} 1_{B_n}$ converge presque sûrement.

Alors, si $X = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{B_n}$ et si, pour tout $k \geq 1$, $C_k = \{X < k\}$ puisque $\lim_{k \rightarrow +\infty} P(C_k) = 1$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier k_0 tel que $P(C_{k_0}) > 1 - \varepsilon$.

En outre $\int_{C_{k_0}} X dP \leq k_0$ et il résulte de la propriété de Beppo-Lévi appliquée à la suite croissante $\left\{ \sum_{n=1}^m 1_{B_n} \cap C_{k_0} \right\}_{m \geq 1}$ que :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n \cap C_{k_0}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int 1_{B_n} \cap C_{k_0} dP \right) = \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} 1_{B_n} \cap C_{k_0} \right) dP \\ &= \int_{C_{k_0}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} 1_{B_n} \right) dP = \int_{C_{k_0}} X dP \leq k_0 \end{aligned}$$

D'où la contradiction car $\epsilon > 0$ est quelconque.

REMARQUE 4. - Le lemme 2 est plus général que le corollaire 2. En effet, si $(A_n)_{n \geq 1}$ est une suite mélangeante telle que la suite numérique $(P(A_n))_{n \geq 1}$ ne converge pas vers 0, la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ admet une sous-suite 0-1 $(B_n)_{n \geq 1}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n) = \alpha > 0$ (cf. preuve du corollaire 2) et, en particulier, il existe un entier $N \geq 1$ tel que $P(B_n) > \frac{\alpha}{2}$ pour $n > N$.

Alors, si $\epsilon = \frac{\alpha}{4}$, pour tout $A \in \mathcal{A}$ tel que $P(A) > 1 - \epsilon$, on a

$$P(B_n \cap A) = P(B_n) - P(B_n \cap C_{\Omega} A) \geq \frac{\alpha}{4} > 0, \text{ quel que soit } n > N.$$

D'où la divergence de $\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n \cap A)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$ tel que $P(A) > 1 - \epsilon$

et les hypothèses du lemme 2.

REMARQUE 5. - Le lemme 2 donne un critère pour toute suite $(A_n)_{n \geq 1}$

"extraite" d'une chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ dont la tribu queue est

équivalente à $\{\emptyset, \Omega\}$ ("extraite" au sens : $A_n \in \mathcal{A}(X_n)$ tribu engendrée par X_n pour tout $n \geq 1$) ; c'est le cas, par exemple, pour une chaîne de Markov ergodique (cf. Revesz [10]) ou pour une chaîne de Markov récurrente dont l'ensemble des états est dénombrable, qui a des probabilités de transition stationnaires et telle que $P\{X_0=i\} = i$ pour un certain état i (cf. Blackwell et Freedman [2]).

2. - CAS OÙ LA SUITE $(A_n)_{n \geq 1}$ EST STABLE.

La notion de suite stable introduite et étudiée sous son aspect fonctionnel par Renyi [9] généralise d'une certaine façon la notion de suite mélangeante.

DEFINITION 3. - Une suite $(B_n)_{n \geq 1}$ d'événements de \mathcal{A} est dite stable si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n \cap A) = Q(A) \text{ existe pour tout } A \in \mathcal{A}.$$

L'application $Q : A \mapsto Q(A)$, de \mathcal{A} dans $[0, 1]$ définit une mesure bornée et absolument continue par rapport à P (cf. Renyi [9]) ; si α désigne la densité de Q par rapport à P , on dit que la suite $(B_n)_{n \geq 1}$ est stable de densité locale α ($0 < \alpha \leq 1$).

Dans le cas où la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ est stable, Fischler [6], en utilisant une propriété de semi-ergodicité d'une suite stable, a donné une première approche de $P(\limsup A_n)$. Nous donnons ci-dessous une nouvelle

preuve de ce résultat en le faisant apparaître comme une conséquence directe de l'aspect fonctionnel développé par Renyi.

THEOREME 1 (FISCHLER). - Si la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ est stable de densité locale α , on a : $P(\limsup_{n \geq 1} A_n) \geq P\{\alpha > 0\}$.

Preuve. - Puisque la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ est stable de densité locale α , la suite des indicatrices 1_{A_n} converge faiblement vers α dans l'espace $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ muni de sa structure habituelle d'espace hilbertien :

$\langle X, Y \rangle = E(XY) = \int_{\Omega} XY \, dP$ pour tout couple (X, Y) d'éléments de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ (cf. Renyi [9]).

Il résulte alors d'un théorème de Banach et Saks [1] qu'il existe une sous-suite $(B_n)_{n \geq 1}$ de $(A_n)_{n \geq 1}$ telle que

$$X_n = \frac{1_{B_n} + \dots + 1_{B_n}}{n}$$

converge en moyenne quadratique vers α .

Alors, de façon générale, il existe une sous-suite $(Y_n)_{n \geq 1}$ de $(X_n)_{n \geq 1}$ telle que $Y_n \xrightarrow{P.s.} \alpha$.

On a alors $\{\alpha > 0\} \subseteq \limsup_{n \geq 1} B_n$ car si $\omega \in \liminf_{n \geq 1} C_{\Omega} B_n$, on a

$\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega) = 0$, donc aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} Y_n(\omega) = \alpha(\omega) = 0$.

REMARQUE 6. - En particulier, si la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ est stable de densité locale α et si $P\{\alpha=0\} = 0$, on a $P(\limsup_{n \geq 1} A_n) = 1$; ceci donne en particulier une nouvelle démonstration du corollaire 2 de 1, car toute suite mélangeante de densité $\alpha > 0$ est une suite stable de densité locale constante α .

REMARQUE 7.- Il résulte d'une propriété de compacité faible dans les espaces de Hilbert que toute suite $(A_n)_{n \geq 1}$ d'événements de \mathcal{U} admet une sous-suite stable (cf. Renyi [9]). Il est donc toujours possible d'assurer l'existence d'une décomposition d'une suite $(A_n)_{n \geq 1}$ quelconque en une famille au plus dénombrable de sous-suites stables $(A_n^j)_{n \geq 1}$ ($j=1,2,\dots$) de densité locales respectives α_j ($j=1,2,\dots$) (chaque A_n appartenant à une et une seule sous-suite $(A_n^j)_{n \geq 1}$). On a alors le résultat suivant :

COROLLAIRE. - Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite quelconque d'événements de \mathcal{U} . Si

$(A_n)_{n \geq 1}$ admet une décomposition $(A_n^j)_{n \geq 1}$ ($j=1,2,\dots$) en sous-suites stables de densités locales respectives α_j ($j=1,2,\dots$) vérifiant

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} \{\alpha_j=0\}\right) = 0, \text{ on a } P(\limsup_{n \geq 1} A_n) = 1$$

Le lemme 1 peut être adapté au cas des suites stables de la façon suivante ($P(A/C)$ désignant la probabilité conditionnelle de A par rapport à C) :

LEMME 3. - Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite stable de densité locale α telle que

$$0 < P(C) < 1 \quad (C = \{\alpha = 0\}).$$

Si $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \cap C) < +\infty$, on a $P(\limsup_{n \geq 1} A_n) = P\{\alpha > 0\}$;

Si la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ admet une sous-suite $(B_n)_{n \geq 1}$ telle que

$(B_n)_{n \geq 1}$ soit une suite $P(\cdot / C) - (0-1)$ et que $(B_n)_{n \geq 1}$ ne converge

pas $P(\cdot / C)$ presque sûrement vers 0, alors $P(\limsup_{n \geq 1} A_n) = 1$.

Preuve. - De façon générale, si $\bar{C} = C \cap C$, on a :

$$P(\limsup_{n \geq 1} A_n) = P(\limsup_{n \geq 1} A_n \cap C) + P(\limsup_{n \geq 1} (A_n \cap \bar{C})).$$

$$\text{On a } P(\limsup_{n \geq 1} (A_n \cap \bar{C})) = P(\bar{C}).$$

Pour tout $A \in \mathcal{A}$, puisque la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ est stable de densité locale α , on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} P((A_n \cap \bar{C}) \cap A) = Q(\bar{C} \cap A) = \int_{\bar{C} \cap A} \alpha dP = \int_A \alpha dP$; car

$$\int_C \alpha dP = 0 \text{ et la suite } (A_n \cap \bar{C})_{n \geq 1} \text{ est stable de densité locale } \alpha.$$

Il résulte du théorème de Fischler que

$$P(\limsup_{n \geq 1} (A_n \cap \bar{C})) \geq P\{\alpha > 0\} = P(\bar{C}) ; \text{ et l'égalité car}$$

$$\limsup_{n \geq 1} (A_n \cap \bar{C}) = (\limsup_{n \geq 1} A_n) \cap \bar{C} \subseteq \bar{C}.$$

Si $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \cap C)$ converge, à partir de la forme habituelle du lemme

de Borel-Cantelli, on a $P(\limsup_{n \geq 1} (A_n \cap C)) = 0$, et la première partie

du lemme 3.

Si la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ admet une sous-suite $(B_n)_{n \geq 1}$ $P(\cdot/C) - (0-1)$ et telle que la suite $(\frac{1}{B_n})_{n \geq 1}$ ne converge pas $P(\cdot/C)$ presque sûrement vers 0, il résulte du lemme 1 que $P(\limsup A_n/C) = 1$, donc $P((\limsup_{n \geq 1} A_n) \cap C) = P(C)$; et la deuxième partie du lemme 3 puisque $P(C) + P(\bar{C}) = 1$.

REMARQUE 8. - Bien sûr, les hypothèses du lemme 3 peuvent être modifiées et présentées comme dans le corollaire 3 du lemme 1, puisque la suite $(A_n \cap C)_{n \geq 1}$ est mélangeante de densité 0, ou bien comme dans le lemme 2.

L'aspect restrictif du lemme 1 dans le cas des suites stables apparaît dans le résultat suivant .

PROPOSITION. - Si $(A_n)_{n \geq 1}$ est une suite stable de densité locale α et si α n'est pas presque sûrement constante, la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ n'admet pas de sous-suite (0-1).

Preuve. - (ab absurdo)

Si $(B_n)_{n \geq 1}$ est une sous-suite (0-1) de $(A_n)_{n \geq 1}$, la suite $(B_n)_{n \geq 1}$ est mélangeante (cf. Sucheston [1]).

Puisque la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ est stable de densité locale α , donc aussi la sous-suite $(B_n)_{n \geq 1}$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n) = \int_{\Omega} \alpha dP = E(\alpha).$$

et la suite mélangeante $(B_n)_{n \geq 1}$ est mélangeante de densité $E(\alpha)$;
donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n \cap A) = E(\alpha) P(A) = \int_A E(\alpha) dP,$$

pour tout $A \in \mathcal{A}$.

En outre, puisque $(B_n)_{n \geq 1}$ est stable de densité locale α , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n \cap A) = \int_A \alpha dP,$$

pour tout $A \in \mathcal{A}$.

On a donc $\alpha = E(\alpha)$ P -presque partout ; et la contradiction.

COROLLAIRE. - Il existe des suites $(A_n)_{n \geq 1}$ n'ayant aucune sous-suite
(0-1) et telles que $P(\limsup_{n \geq 1} A_n) = 1$.

Preuve. - Soit (Ω, \mathcal{A}, P) l'espace probabilisé défini par : $\Omega = [0, 1]$;

\mathcal{A} : tribu des boréliens de $[0, 1]$ et P : mesure de Borel sur \mathcal{A} .

Si f est une application continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ et, si pour

tout $n \geq 1$, $A_n = \bigcup_{k=0}^{n-1} \left[\frac{k}{n}, \frac{k+f(\frac{k}{n})}{n} \right]$, la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ est stable de densité

locale f (cf. Rényi [9] p. 300).

En particulier, si f est presque sûrement non nulle, il résulte
du théorème de Fischler que $P(\limsup_{n \geq 1} A_n) \geq P\{f > 0\} = 1$.

D'où le résultat, à partir de la proposition précédente, pour toute suite $(A_n)_{n \geq 1}$ associée à une application f , continue, non presque sûrement constante et presque sûrement non nulle, de $[0,1]$ dans $[0,1]$.

3. - CAS OU LA SUITE $(A_n)_{n \geq 1}$ EST MELANGEANTE DE CESARO.

La remarque 8 a montré les limites de la méthode basée sur l'existence d'une sous-suite $(0,1)$ ayant de bonnes propriétés. Au contraire la méthode fonctionnelle utilisée en 2 dans la nouvelle démonstration du théorème 1 de Fischler peut être reprise pour obtenir une nouvelle extension du lemme de Borel-Cantelli.

DEFINITION 4 (Fischler). - Une suite $(B_n)_{n \geq 1}$ d'événements de \mathcal{A} est dite mélangeante de Cesàro de densité α si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n P(B_j \cap A) = \alpha P(A)$, pour tout $A \in \mathcal{A}$.

En particulier, il résulte du classique théorème de convergence en moyenne de Cesàro que toute suite mélangeante de densité α est une suite mélangeante de Cesàro de densité α et il résulte de l'inégalité triangulaire que toute suite faiblement mélangeante de densité α au sens de Renyi ([8] p. 226) est mélangeante de Cesàro de densité α .

On a alors l'extension suivante .

THEOREME 2. - Si la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ d'événements de \mathcal{A} est mélangeante de Cesàro de densité $\alpha > 0$, on a $P(\limsup_{n \geq 1} A_n) = 1$

Preuve. - Reprenant la preuve du théorème 1 de Renyi ([9] p. 295) pour les variables aléatoires $X_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n 1_{A_j}$ de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$, si $(A_n)_{n \geq 1}$ est mélangeante de Cesàro de densité α , la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ converge faiblement vers α dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Il résulte alors du théorème de Banach et Saks, déjà cité [1], qu'il existe une sous-suite $(Y_n)_{n \geq 1}$ de $(X_n)_{n \geq 1}$ telle que $Z_n = \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n} \xrightarrow{m.g} \alpha$.

Il existe alors une sous-suite $(Z_{n_k})_{k \geq 1}$ de $(Z_n)_{n \geq 1}$ qui converge presque sûrement vers α , c'est-à-dire $\lim_{k \rightarrow +\infty} Z_{n_k}(\omega) = \alpha$ pour tout $\omega \in C$ avec $P(C) = 1$.

On a alors $C \subseteq \limsup_{n \geq 1} A_n$.

Si $\omega \notin \limsup_{n \geq 1} A_n$, il existe $n_0 \geq 1$ tel que $n > n_0$ implique $1_{A_n}(\omega) = 0$ et par suite, $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n 1_{A_j}(\omega) = 0$.

Alors, puisque $(Y_n(\omega))_{n \geq 1}$ est une sous-suite de $(X_n(\omega))_{n \geq 1}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} Y_n(\omega) = 0$ et donc, à partir du théorème de convergence en moyenne de Cesàro, $\lim_{n \rightarrow +\infty} Z_n(\omega) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_j(\omega) = 0$.

Puisque $(Z_{n_k}(\omega))_{k \geq 1}$ est une sous-suite de $(Z_n(\omega))_{n \geq 1}$ on a alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} Z_{n_k}(\omega) = 0$, et, comme $\alpha > 0$, $\omega \notin C$.

D'où $P(\limsup_{n \geq 1} A_n) = 1$.

REMARQUE 9. - La démonstration précédente peut être simplifiée si on a l'hypothèse plus précise $X_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n 1_{A_j} \xrightarrow{m.q.} \alpha$. En général, il n'en est rien, car l'hypothèse de convergence en moyenne quadratique de X_n (qui ne peut être une convergence en moyenne quadratique que vers α) est équivalente au caractère uniformément mélangeant de *Cesàro* de la suite $(A_n)_{n \geq 1}$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \sup_{A \in \mathcal{A}} \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n P(A_j \cap A) - \alpha P(A) \right| \right\} = 0.$$

(cf. Fischler [6] p. 75).

Comme la notion de suite stable de densité locale α généralise la notion de suite mélangeante de densité α , on peut généraliser la notion de suite mélangeante de *Cesàro* de densité α par la notion de suite stable de *Cesàro* de densité locale α et donner l'extension du théorème 1.

DEFINITION 5. - Une suite $(B_n)_{n \geq 1}$ d'événements de \mathcal{A} est dite stable de *Cesàro* si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n P(B_j \cap A) = Q(A)$, pour tout $A \in \mathcal{A}$.

PROPOSITION. - Si $(B_n)_{n \geq 1}$ est une suite stable de Cesàro, c'est-à-dire si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n P(B_j \cap A) = Q(A)$ existe pour tout A de \mathcal{A} ,

$Q(A)$ est une mesure absolument continue par rapport à P .

Preuve. - Par définition, Q est une application de \mathcal{A} dans \mathbb{R}^+ , additive car P est additive.

Si $(A_k)_{k \geq 1}$ est une famille dénombrable d'éléments deux à deux disjoints de \mathcal{A} , on a $Q(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} Q(A_k)$;

La série $\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n P(B_j \cap A_k))$ est uniformément convergente

par rapport à n car $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n P(B_j \cap A_k) \leq P(A_k)$, pour tout $k \geq 1$ et tout $n \geq 1$,

avec $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)$.

On a alors : $\sum_{k=1}^{\infty} Q(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n P(B_j \cap A_k))$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n P(B_j \cap A_k))$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\sum_{k=1}^{\infty} P(B_j \cap A_k))$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n P(B_j \cap (\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)) = Q(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k).$$

En outre, si $P(A) = 0$, $P(B_j \cap A) = 0$ pour tout $j \geq 1$, donc $Q(A) = 0$ et Q est absolument continue par rapport à P .

En particulier, il résulte du théorème de Radon-Nikodym qu'il existe une variable aléatoire α telle que $Q(A) = \int_A \alpha dP$, avec $0 \leq \alpha \leq 1$. On dit alors que $(B_n)_{n \geq 1}$ est stable de Cesàro de densité locale α .

REMARQUE 10. - En notant que toute suite stable est une suite stable de Cesàro, la preuve de la proposition ci-dessus constitue une autre démonstration du théorème 2 de Renyi [9] p. 296. Comme exemple non trivial de suite stable de Cesàro on peut considérer une suite construite à partir d'une famille finie ou dénombrable de suites mélangeantes de Cesàro de la même façon que, dans l'exemple 5 de Renyi [9] p. 301, une suite stable est construite à partir d'une famille finie ou dénombrable de suites mélangeantes.

THEOREME 3. - Si la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ est stable de Cesàro de densité locale α , on a $P(\limsup_{n \geq 1} A_n) \geq P\{\alpha > 0\}$.

Preuve. - Il suffit de reprendre exactement la preuve du théorème 2 à partir du théorème de Banach et Saks [1] pour montrer que

$$\{\omega \in \Omega \mid \alpha(\omega) > 0\} \subseteq \limsup_{n \geq 1} A_n.$$

4. CONCLUSION. - Indiquons en conclusion une autre direction possible pour étendre le lemme de Borel-Cantelli.

LEMME 4.- Si une suite $(A_n)_{n \geq 1}$ d'événements de \mathcal{A} admet une sous-suite $(B_n)_{n \geq 1}$ telle que

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = +\infty \quad \text{et}$$

$$\frac{I_{B_1} + \dots + I_{B_n}}{P(B_1) + \dots + P(B_n)} \xrightarrow{P} \alpha, \quad \text{avec } P\{\alpha=0\} = 0,$$

alors $P(\limsup_{n \geq 1} A_n) = 1$.

Preuve. - Si $X_n = \frac{I_{B_1} + \dots + I_{B_n}}{P(B_1) + \dots + P(B_n)} \xrightarrow{P} \alpha$, il existe une sous-suite

$(Y_n)_{n \geq 1}$ de $(X_n)_{n \geq 1}$ telle que $Y_n \xrightarrow{P.S.} \alpha$.

Puisque $\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = +\infty$, pour tout $\omega \in \Omega$ tel que $\alpha(\omega) \neq 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} I_{B_n}(\omega) = +\infty \quad \text{et } \{\alpha \neq 0\} \subseteq \limsup_{n \geq 1} B_n.$$

Donc, si $P\{\alpha=0\} = 0$, $P(\limsup_{n \geq 1} B_n) = 1$ et $P(\limsup_{n \geq 1} A_n) = 1$.

COROLLAIRE. - Si une suite $(A_n)_{n \geq 1}$ d'événements de \mathcal{A} admet une sous-suite

$(B_n)_{n \geq 1}$ telle que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = +\infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=i+1}^n \text{cov}(I_{B_i}, I_{B_j}) \right)}{\left(\sum_{i=1}^n P(B_i) \right)^2} = 0,$$

on a $P(\limsup_{n \geq 1} A_n) = 1$.

Preuve. - Pour tout $n \geq 1$, $\sigma^2 \left(\frac{I_{B_1} + \dots + I_{B_n}}{P(B_1) + \dots + P(B_n)} \right) \leq \frac{1}{P(B_1) + \dots + P(B_n)} +$

$$+ \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1+1}^n \text{cov}(I_{B_i}, I_{B_j})}{\left(\sum_{i=1}^n P(B_i) \right)^2}$$

et à partir des hypothèses :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma^2 \left(\frac{I_{B_1} + \dots + I_{B_n}}{P(B_1) + \dots + P(B_n)} \right) = 0$$

Alors, comme $E \left(\frac{I_{B_1} + \dots + I_{B_n}}{P(B_1) + \dots + P(B_n)} \right) = 1$ pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{I_{B_1} + \dots + I_{B_n}}{P(B_1) + \dots + P(B_n)} \xrightarrow{\text{m.q.}} 1 \text{ et le résultat à partir du lemme 4.}$$

En particulier, si les B_n sont deux à deux indépendants,

$P(\limsup_{n \geq 1} A_n) = 1$; c'est le résultat de Erdos et Renyi [4] présenté un peu différemment.

Pour avoir une nouvelle extension du lemme de Borel-Cantelli, il serait donc intéressant de déterminer, par exemple, à quelles conditions

$$X_n = \frac{I_{B_1} + \dots + I_{B_n}}{P(B_1) + \dots + P(B_n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \alpha \text{ avec } \alpha \text{ constante non nulle et } \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = +\infty$$

puisqu'en général la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ n'est pas uniformément bornée sur Ω

(si $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n) = 0$), il ne faut pas exclure à priori le cas où $\alpha \neq 1$

(cas où $X_n \xrightarrow{\text{m.q.}} \alpha$).

Une remarque sur le lemme de Borel-Cantelli

- [1] BANACH et SAKS, *Sur la convergence forte dans les espaces L^p* , *Studia Math.* 2 (1930), p. 51-57.
- [2] BLACKWELL and FREEDMAN, *The tail σ -field of a Markov chain and a theorem of Orey*, *Ann. Math. Statist.* 35 (1964), p. 1291-1295.
- [3] CRAMER, *Random variables and probability distributions*, Cambridge University Press (1970).
- [4] ERDOS and RENYI, *On cantor's series with convergent $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q^k}$* , *Ann. Univ. Sci. Budapest, section Math.* 2 (1959), p. 93-109.
- [5] FISCHLER, *Borel-Cantelli type theorems for mixing sets*, *Acta. Math. Acad. Sci. Hungar* 18 (1967), p. 67-69.
- [6] FISCHLER, *The strong law of large numbers for indicators of mixing sequences*, *Acta. Math. Acad. Sci. Hungar* 18 (1967), p. 71-81.
- [7] FISCHLER, *Decomposition and composition of mixing sequences*, *J. Math. Anal. Appl.* 21 (1968), p. 389-395.
- [8] RENYI, *On mixing sequences of sets*, *Acta. Math. Acad. Sci. Hungar.* 9 (1958), p. 215-228.
- [9] RENYI, *On stable sequences of sets*, *Sankya Indian J. Statis.*, série A, vol. 25, part. 3 (1963), p. 293-302.
- [10] REVESZ, *A generalization of the zero-one law*, *Ann. Univ. Sci. Budapest sect. Math.* 2 (1959), p. 111-113.
- [11] SUCHESTON, *On mixing and the 0-1 law*, *J. Math. Anal. Appl.* 6 (1963), p. 447-456.

Manuscrit remis le 1er septembre 1974.

Alain VILLENEUVE
Département de Mathématiques
Université Claude Bernard, Lyon-1
43, bd du 11 novembre 1918
69621-VILLEURBANNE