PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

COLIN FLETCHER

Remarque sur les anneaux de fractions et la factorisation

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1975, tome 12, fascicule 1
, p. 1-3
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1975__12_1_1_0>

© Université de Lyon, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Publications du
Département de
Mathématiques
LYON 1975.t.12-1

REMARQUE SUR LES ANNEAUX DE FRACTIONS ET LA FACTORISATION

par Colin FLETCHER

Dans cette note, nous démontrons un résultat concernant la localisation dans les anneaux à factorisation unique [4] ou UFR, répondant à une question de [2] .

La terminologie et les notations employées sont celles de [1] et [3] .

THEOREME. - *Soit* S *une partie multiplicative ne contenant pas zéro d'un anneau* A *à factorisation unique. Alors* $S^{-1}A$ *est un anneau à factorisation unique et l'image canonique de* A *dans* $S^{-1}A$ *est intégralement fermée.*

DEMONSTRATION. - a) D'après [3] , on a un isomorphisme canonique $A \simeq A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$, où A_i est un anneau factoriel ou un anneau principal spécial ; il existe dans chaque A_i une partie multiplicative S_i telle que

$$(1) \qquad S^{-1}A \simeq S_1^{-1}A_1 \oplus \ldots \oplus S_n^{-1}A_n \quad \text{et}$$

l'isomorphisme canonique ci-dessus est défini par

$$\frac{(a_1,\ldots,a_n)}{(s_1,\ldots,s_n)} \longmapsto \left(\frac{a_1}{s_1},\ldots,\frac{a_n}{s_n}\right).$$

On ne conserve, dans la somme directe (1) que les anneaux non nuls :

(2) $S^{-1}A \simeq S_1^{-1}A_1 \oplus \ldots \oplus S_m^{-1}A_m$ avec $m \leq n$.

Si A_i est factoriel, il en est de même de $S_i^{-1}A_i$; si A_i est principal spécial, comme on suppose $S^{-1}A_i$ non nul, on a $S_i^{-1}A_i \simeq A_i$. Par conséquent d'après [3] , l'anneau $S^{-1}A$ est un anneau à factorisation unique.

b) Soient $\phi : A \longrightarrow S^{-1}A$ l'homomorphisme canonique et $\frac{a}{s} \in S^{-1}A$ un élément entier sur $\phi(A)$ avec $a = (a_1,\ldots,a_n)$ et $s = (s_1,\ldots,s_n) \in S$; soit $\phi_i : A_i \longrightarrow S_i^{-1}A_i$ l'homomorphisme canonique ; on a :

(3) $\phi(A) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} \phi_i(A_i)$, et il est facile de voir que pour tout $i = 1,\ldots,n$ l'élément $\dfrac{a_i}{s_i} \in S_i^{-1}A_i$, est entier sur $\phi_i(A_i)$.

Si A_i est factoriel, $A_i \simeq \phi_i(A_i)$ est intégralement fermé dans $S_i^{-1}A_i$, donc $\dfrac{a_i}{s_i} \in \phi_i(A_i)$. Si A_i est principal spécial, alors $S_i^{-1}A_i$ est nul ou isomorphe à A_i. Donc dans tous les cas, on a $\dfrac{a_i}{s_i} \in \phi_i(A_i)$ et $\frac{a}{s} \in \phi(A)$, d'où le résultat.

La deuxième assertion du théorème répond à une question de [2] .

BIBLIOGRAPHIE.

[1] N. BOURBAKI, *Algèbre commutative,* Herman, Paris.

[2] A. BOUVIER, *Remarques sur la factorisation dans les anneaux commutatifs,* Publ. Dept. Math. Lyon, 8 (1971), 3-4, p. 1-18.

[3] C.R. FLETCHER, *The structure of unique factorization rings,* Proc. Cambridge Philos. Cos. , 67 (1970), p. 535-540.

[4] C.R. FLETCHER, *Equivalent conditions for unique factorization,* Publ. Dept. Math. Lyon, 8 (1971), fasc. 1, p. 13-22.

Manuscrit remis en décembre 1974.

COLIN FLETCHER
Department of Pure mathematics
University College of Wales
Penglais
Aberystwyth Cardiganshire
Wales