PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

MICHEL TALAGRAND

Solution d'un problème de R. Haydon

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1975, tome 12, fascicule 2
, p. 43-46
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1975__12_2_43_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1975 t. 12-2

SOLUTION D'UN PROBLEME DE R. HAYDON

Par Michel TALAGRAND

Désignons par λ la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}$ par K. l'ensemble de Cantor, par m la mesure canonique de K. R. Haydon a posé le problème suivant [1] : Soit X un sous compact de K. Si $m(X)>0$, avons-nous $\lambda(X+X)>0$? Le résultat suivant apporte une réponse positive :

THEOREME. - *Soit* X *un sous-ensemble analytique de* K. *Alors on a*

i) $\lambda(X+X) \geqslant 2(2m(X)-1)$;

ii) $\lambda(X+K) \geqslant 2m(X)$,

COROLLAIRE. - *Soient* X *et* Y *deux sous-ensembles analytiques de* K, *tels que* $m(X)m(Y) > 0$. *Alors on a aussi* $\lambda(X+Y) > 0$.

Déduisons le corollaire du théorème. On peut tout d'abord supposer X et Y compacts. Un raisonnement classique montre alors qu'il existe un sous-compact

(1) Je tiens à remercier ici Monsieur le Professeur G. CHOQUET d'avoir porté ce problème à ma connaissance.

K' de K, homothétique à K et un sous-compact $K'' = K'+h$ de K, tels que $m(X\cap K')>\frac{3}{4}\,m(K')$ et $m(Y\cap K'')>\frac{3}{4}\,m(K'')$. On a :

$$\lambda(X+Y) = \lambda(X+Y-h) \geqslant \lambda(X\cap K'+(Y-h)\cap K') \geqslant \lambda(X\cap(Y-h)\cap K' + X\cap(Y-h)\cap K')$$
$$\geqslant 2m(K')\left(\frac{2m(X\cap(Y-h)\cap K')}{m(K')} - 1\right) > 0\,;$$

l'avant dernière inégalité se déduisant du théorème par homothétie.

Prouvons maintenant le théorème. Nous allons tout d'abord étudier l'opération somme dans $K\times K$.

Soit $K_n = \bigcup_{u\in U_n} I_u^n$, où I_u^n désigne l'intervalle $[\,u,u+\frac{1}{3^n}]$ et où U_n désigne l'ensemble des nombres qui s'écrivent en base 3 sous la forme $\overline{0,\alpha_1\ \alpha_n}$, avec $\alpha_k \in \{0,2\}$.

Il est connu que $K = \bigcap_n K_n$. On a :

$$I_u^n + I_v^n = [u+v,\ u+v+\frac{2}{3^n}] = 2[\,\frac{u+v}{2}\,,\ \frac{u+v}{2} + \frac{1}{3^n}].$$

L'intérêt de cette écriture réside dans le fait que, contrairement à $u+v$, il est aisé d'exprimer $\frac{u+v}{2}$ en base 3. Plus précisément, si $u = \overline{0,\alpha_1\ \alpha_n}$ et $v = \overline{0,\beta_1\ \beta_n}$ on a $\frac{u+v}{2} = \overline{0,\gamma_1\ \gamma_n}$ avec $\gamma_k = \frac{\alpha_k+\beta_k}{2}$, soit :

$\gamma_k = 0$ si et seulement si $\alpha_k = \beta_k = 0$,

$\gamma_k = 1$ si et seulement si $\alpha_k = 2,\ \beta_k = 0$ ou $\alpha_k = 0,\ \beta_k = 2$,

$\gamma_k = 2$ si et seulement si $\alpha_k = \beta_k = 2$.

Désignant par $\mathfrak{U}_n$ l'ensemble des nombres de la forme $\frac{k}{3^{n-1}}$ où $0 \leq k < 3^n$, on voit que chaque élément w de $\mathfrak{D}_n$ peut s'écrire sous la forme $\frac{u+v}{2}$, avec u et v dans $\mathfrak{U}_n$ et ceci exactement de 2^p manières, où p désigne le nombre de A qui apparaissent dans l'écriture de x en base 3.

Prouvons la première assertion du théorème. On peut supposer X compact. Posons $X_n = \bigcup_{I_u^n \cap X = \emptyset} I_u^n$. On a $X = \bigcap_n X_n$, donc $X+X = \bigcap_n (X_n+X_n)$. (puisque les X_n sont compacts). Il nous suffit ainsi de prouver que, pour chaque n, on a $\lambda(X_n+X_n) \geq 2(2m(X)-1)$. Fixons n. Soit E l'ensemble des nombres w de $\mathfrak{D}_n$ tels que l'intervalle $2[w, w+\frac{1}{3^n}]$ ne soit pas contenu dans X_n+X_n, et soit N le cardinal de E. Nous allons montrer que N est majoré par $2 \times 3^n(1-m(X)) = 2 \times 3^n \times m(X^c)$, ce qui suffira. Soit F l'ensemble des nombres u de $\mathfrak{U}_n$, tels que l'intervalle I_u^n soit contenu dans X_n^c, et soit K le cardinal de F. On a $K \leq 2^n\, m(X^c)$. Ainsi, il va nous suffire de prouver que $N \leq 2(\frac{3}{2})^n K$.

Soit P une partie de $\{o, 1, \ldots, n\}$ de cardinal p. Soit $\mathfrak{D}_n^P$ le sous-ensemble de $\mathfrak{D}_n$ constitue des nombres $w = \overline{0,\gamma_1 \quad \gamma_n}$ avec $\gamma_i = 1$ si et seulement si i est dans P. Les ensembles $\mathfrak{D}_n^P$ constituent une partition de $\mathfrak{D}_n$. Nous allons montrer que E $\mathfrak{D}_n^P$ possède au plus $2^{1-p} \times K$ éléments. Supposons $p \neq 0$. Pour chaque élément w de $\mathfrak{D}_n^P$ soit $S_w = \{u \in \mathfrak{U}_n \ ; \ \exists v \in \mathfrak{U}_n \ ; \ 2w = u+v\}$. Lorsque w parcourt $\mathfrak{D}_n^P$ les ensembles S_w sont disjoints, et chacun d'eux possède 2^p éléments, comme il a été vu plus haut. Supposons que w soit dans $\mathfrak{D}_n^P \cap E$.

Quel que soit u dans S_w, l'un des éléments u et 2w-u est dans F. L'ensemble S_w se partitionne en 2^{p-1} paires (u,w-u) et chacune d'elles rencontre F. Ainsi $\mathrm{card}(S_w \cap F) \geq 2^{p-1}$. Les ensembles S_w étant disjoints, ceci montre que $\mathrm{card}(\mathcal{D}_n^p \cap E) \leq 2^{1-p}K$. On voit aisément que $\mathrm{card}(\mathcal{D}_n^{\emptyset} \cap E) \leq K \leq 2K$. On a donc

$$\mathrm{card}(E) \leq \sum_{p=0}^{n} C_n^p \times 2^{1-p}K = 2K\ (1+\tfrac{1}{2})^n = 2K(\tfrac{3}{2})^n,$$ ce qui termine la preuve

de la première assertion.

La deuxième se prouve de façon très similaire. Avec des notations calquées sur les précédentes, on se ramène à prouver que $N \leq (\frac{3}{2})^n K$. Pour ce faire il suffit d'établir que $\mathrm{card}(\mathcal{D}_n^p \cap E) \leq 2^{-p}K$, ce qui se fait en remarquant que si w est dans $\mathcal{D}_n^p \cap E$, alors F contient S_w.

Manuscrit remis le 1er septembre 1975

M. TALAGRAND
Université Paris VI
Tour 46 - 4e étage
4, place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 5