PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

MICHEL CRÉTIN

L'espace classifiant de la K-théorie algébrique

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1975, tome 12, fascicule 2
, p. 57-69
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1975__12_2_57_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1975 t. 12-2

L'ESPACE CLASSIFIANT DE LA K-THEORIE ALGEBRIQUE

par Michel CRETIN

Dans son rapport [1], P. Quillen introduit la K-théorie algébrique d'un anneau A, comme des groupes d'homotopie d'un espace $BG\ell(A)^+$ qu'il calcule dans le cas d'un corps fini dans son article [2] ; D'autre part dans [3] J.B. Wayoner montre que $K_o(A) \times BG\ell(A)^+$ est un "espace de lacets infinis", mais, bien qu'il donne des indications plus précises que dans [1] et [2] sur la construction de cet espace, aucun de ces articles ne contient une construction détaillée.

L'objet de cet article est d'exposer la construction de $BG\ell(A)^+$ en donnant des démonstrations complètes des propriétés générales de cet espace qui sont utilisées dans les articles précités.

Je voudrais remercier A. Roux pour l'aide apportée à la mise au point de cet article.

Les espaces considérés sont des espaces de Kelley, ayant le type d'homotopie d'un CW-complexe. Ils sont pointés, les applications et les homotopies préservent les points-bases.

PROPOSITION 1. - *Soit Y un espace (connexe par arcs) dont le groupe fondamental est parfait. Il existe alors un couple* (Y^+, j) *où* Y^+ *est un espace simplement connexe et* $j : Y \to Y^+$ *une cofibration vérifiant les conditions équivalentes suivantes :*

i) $j_* : H_*(Y, \mathbb{Z}) \to H_*(Y^+, \mathbb{Z})$ *est un isomorphisme,*

ii) la fibre homotopique E_j *de* j *est acyclique* (i.e. $\widetilde{H}_*(E_j, \mathbb{Z}) = 0$).

De plus, tout couple (Y^+, j) *vérifiant les conditions précédentes satisfait à la propriété suivante : pour tout espace simplement connexe* Z*, l'application* $[Y^+, Z] \to [Y, Z]$ $[g] \mapsto [g \circ j]$ *est bijective.*

Il en résulte en particulier que (Y^+, j) *est caractérisé à homotopie près par les conditions précédentes.*

CONSTRUCTION DE (Y^+, j).

Soit $E = \Pi_1(Y)$ le groupe fondamental de Y. On commence par détruire E par adjonction de 2-cellules. On considère le carré cocartésien :

$$\begin{array}{ccc} \bigvee_{\gamma \in E} S^1_\gamma & \xrightarrow{c} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigvee_{\gamma \in E} B^2_\gamma & \longrightarrow & Y' \end{array}$$

Le théorème de Van Kumpen montre que Y' est simplement connexe et la suite exacte de Mayer-Victoris fournit des isomorphismes

$$H_k(Y,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\simeq} H_k(Y',\mathbb{Z}) \quad k \neq 2$$

et une suite exacte :

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow H_2(Y,\mathbb{Z}) \longrightarrow H_2(Y',\mathbb{Z}) \underset{S}{\overset{\partial}{\rightleftarrows}} H_1(\bigvee_{\gamma\in E} S^1_\gamma, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0,$$

puisque, par hypothèse, $H_1(Y,\mathbb{Z}) = \Pi_1(Y)^{ab} = 0$.

Mais $H_1(\bigvee_{\gamma\in E} S^1_\gamma, \mathbb{Z})$ est un groupe abélien libre de base canonique $(e_\gamma)_{\gamma\in E}$, où e_γ est l'image de $id_{S^1_\gamma}$ par l'homomorphisme de Hurewicz $\Pi_1(S^1_\gamma) \longrightarrow H_1(S^1_\gamma,\mathbb{Z})$. La suite (*) est donc scindée et l'on désigne par S une section de ∂ $(\partial \circ S)=id)$.

Par adjonction de 3-cellules à Y', on détruit l'image de S. Nous obtiendrons ainsi un espace simplement connexe, ayant la même homologie que Y'.

Puisque Y' est simplement connexe, on a l'isomorphisme de Hurewicz $h : \Pi_2(Y') \longrightarrow H_2(Y',\mathbb{Z})$ et on considère la famille $(\gamma')_{\gamma\in E}$ d'éléments de $\Pi_2(Y')$ définie par $h(\gamma') = S(e_\gamma)$ pour tout $\gamma\in E$. On considère alors le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \bigvee_{\gamma\in E} S^2_{\gamma'} & \xrightarrow{c'} & Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigvee_{\gamma\in E} B^3_\gamma & \longrightarrow & Y^+ \end{array}$$

Par le théorème de Van Kumpen, Y^+ est simplement connexe, et la suite exacte de Mayer-Victoris fournit des isomorphismes :

$$H_k(Y',\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H_k(Y^+,\mathbb{Z}) \quad (k \neq 2,3$$

et une suite exacte :

$$0 \longrightarrow H_3(Y',\mathbb{Z}) \longrightarrow H_3(Y^+,\mathbb{Z}) \longrightarrow H_2(\bigvee_{\gamma' \in E} S^2_{\gamma'},\mathbb{Z}) \xrightarrow{c'_*} H_2(Y',\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(Y^+,\mathbb{Z}) \longrightarrow 0.$$

Mais $H_2(\bigvee_{\gamma} S^2_{\gamma'},\mathbb{Z})$ est un groupe abélien libre de base $(e_{\gamma'})_{\gamma \in E}$ où $e_{\gamma'}$ est l'image de $id_{S^2_\gamma}$ par l'isomorphisme de Hurewicz $\Pi_2(S^2_{\gamma'}) \longrightarrow H_2(S^2_{\gamma'},\mathbb{Z})$.

Il en résulte que $c'_*(e_{\gamma'}) = h(\gamma')$ pour tout $\gamma \in E$. On a donc le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
H_2(\bigvee_{\gamma'} S^2_{\gamma'},\mathbb{Z}) \arrow[rr, "c'_*"] & & H_2(Y',\mathbb{Z}) \\
H_1(\bigvee_{\gamma} S^1_{\gamma},\mathbb{Z}) \arrow[u, "\beta", "\wr"'] \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}$$

où β est l'isomorphisme canonique tel que $\beta(e_\gamma) = e_{\gamma'}$ pour tout $\gamma \in E$.

Comme S est injectif, il en est de même de c'_*, on obtient donc un isomorphisme

$$H_3(Y',\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H_3(Y^+,\mathbb{Z})$$

et une suite exacte

$$(**) \qquad 0 \longrightarrow H_1(\bigvee_{\gamma} S^1_\gamma,\mathbb{Z}) \xrightarrow[S]{} H_2(Y',\mathbb{Z}) \longrightarrow H_2(Y^+,\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

On obtient donc le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H_1(\bigvee_Y S^1_Y, \mathbb{Z}) \arrow[r, shift left, "S"] & H_2(Y', \mathbb{Z}) \arrow[l, shift left, "\partial"] \arrow[r] & H_2(Y^+, \mathbb{Z}) \arrow[r] & 0 \\
& & H_2(Y, \mathbb{Z}) \arrow[u] & & \\
& & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

,

d'où il résulte que le composé $H_2(Y,\mathbb{Z}) \longrightarrow H_2(Y',\mathbb{Z}) \longrightarrow H_2(Y^+,\mathbb{Z})$ est un isomorphisme. On désigne par j la cofibration composée $Y \longrightarrow Y' \longrightarrow Y^+$ qui est acyclique.

EQUIVALENCE DE i) ET ii).

Supposons la fibre homotopique E_j de j, acyclique, la suite spectrale de Serre : $H_p(V^+, H_q(E_j,\mathbb{Z})) \Longrightarrow H_{p+q}(Y,\mathbb{Z})$ dégénère et les homomorphismes extrêmes $j_* : H_*(Y,\mathbb{Z}) \longrightarrow H_*(Y^+,\mathbb{Z})$ sont des isomorphismes.

Réciproquement, supposons j acyclique. Comme Y est connexe et Y^+ simplement connexe, E_j est connexe, et l'on a la suite exacte :

$$H_2(Y,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H_2(Y^+,\mathbb{Z}) \longrightarrow H_1(E_j,\mathbb{Z}) \longrightarrow H_1(Y,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H_1(Y^+,\mathbb{Z}) \quad ;$$

donc $H_1(E_j,\mathbb{Z}) = 0$. Par récurrence, supposons prouvé que $H_r(E_j,\mathbb{Z}) = 0$ $1 \leq r \leq n-1$. On a une suite exacte :

$$H_{n+1}(Y,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H_{n+1}(Y^+,\mathbb{Z}) \longrightarrow H_n(E_j,\mathbb{Z}) \longrightarrow H_n(Y,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H_n(Y^+,\mathbb{Z})$$

qui montre que $H_n(E_j,\mathbb{Z}) = 0$.

PROPRIETE UNIVERSELLE.

Nous démontrons pour cela, la proposition suivante, plus précise, que nous aurons à utiliser par la suite.

PROPOSITION 2. - *Soient* $i : A \longrightarrow B$ *une cofibration acyclique, avec* B *simplement connexe et* C *un espace simplement connexe.*

i) Pour tout $f : A \longrightarrow C$, *il existe* $g : B \longrightarrow C$ *avec* $g \circ i = f$.

ii) Soient $g_0, g_1 : B \longrightarrow C$ *deux applications et* $F : A \times I \longrightarrow C$ *une homotopie entre* $g_0 \circ i$ *et* $g_1 \circ i$. *Il existe une homotopie* $G : B \times I \longrightarrow C$ *entre* g_0 *et* g_1 *prolongeant* F.

Considérons le carré cocartésien suivant:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & C \arrow[d, dashed, "j"] \\ B \arrow[r, "f'"'] & D \end{tikzcd} .$$

Le théorème de Van Kampen montre que D est simplement connexe, et la suite exacte de Mayer-Victoris nous fournit des isomorphismes

$$j_* : H_*(C,\mathbb{Z}) \longrightarrow H_*(D,\mathbb{Z}).$$

Par suite, j est une équivalence d'homotopie d'après le théorème de Whitehead. Mais j est une cofibration, donc admet une rétraction $r : D \longrightarrow C$ ($r \circ j = id_C$). On a alors $g \circ i = f$ avec $g = r \circ f'$.

Pour obtenir ii) , il suffit d'appliquer i) à la situation :

$$\begin{array}{ccc} B\times 0 \cup B\times 1 \cup A\times i & \longrightarrow & B\times I \\ \Big\downarrow{\scriptstyle g_0 \cup g_1 \cup F} & & \\ C & & \end{array}$$

.

THEOREME. - *Soient* X *un espace (connexe par arcs) et* E *un sous-groupe distingué et parfait du groupe fondamental* $G = \Pi_1(X)$ *de* X. *Alors il existe un couple* (X^+, i) *où* X^+ *est un espace et* $i : X \longrightarrow X^+$ *une cofibration vérifiant les propriétés suivantes :*

a) la suite $1 \longrightarrow E \longrightarrow \Pi_1(X) \xrightarrow{\Pi_1(i)} \Pi_1(X^+) \longrightarrow 1$ *est exacte et, pour tout système localement constant de coefficients abéliens* $\mathcal{A}$ *sur* X^+ , $i_* : H_*(X, i^{-1}(\mathcal{A})) \longrightarrow H_*(X^+, \mathcal{A})$ *est un isomorphisme.*

b) Pour tout espace Z, *l'application* $[X^+, Z] \longrightarrow [X, Z]$ $[g] \longmapsto [g \circ i]$ *est une bijection de* $[X^+, Z]$ *sur l'ensemble des* $[f]$ *de* $[X, Z]$ *tels que* $E \subset \operatorname{Ker} \Pi_1(f)$.

c) La propriété (a) caractéristique (X^+, i) *de manière unique à homotopie près.*

d) Soit $p : Y \longrightarrow X$ *un revêtement associé au sous-groupe* E *de* G. *Alors* $p^+ : Y^+ \longrightarrow X^+$ *est, à homotopie près, un revêtement universel.*

e) La fibre homotopique E_i *de* $i : X \longrightarrow X^+$ *est acyclique.*

DEMONSTRATION. - a) Soit $p : Y \longrightarrow X$ un revêtement associé à E. le groupe fondamental de Y est parfait et on peut obtenir, d'après la proposition 1, un couple (Y^+,j) où Y^+ est simplement connexe et $j : Y \longrightarrow Y^+$ une **cofibration** acyclique. On considère le carré cocartésien :

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "j"] \arrow[d, dashed, "p"'] & Y^+ \arrow[d, "p^+"] \\ X \arrow[r, "i"] & X^+ \end{tikzcd} .$$

Puisque $\Pi_1(Y^+)$ est simplement connexe, le théorème de Van Kampen **fournit la** suite exacte :

$$1 \longrightarrow \Pi_1(Y) \xrightarrow{\Pi_1(p)} \Pi_1(X) \xrightarrow{\Pi_1(c)} \Pi_1(X^+) \longrightarrow 1.$$

Et, par définition de Y, on a $\mathrm{Im}\,\Pi_1(p) = E$. D'après le théorème des **coefficients** universels, $j_* : H_*(Y,A) \longrightarrow H_*(Y^+,A)$ est un isomorphisme pour tout **groupe** abélien A. Soit $\mathcal{A}$ un système localement constant de coefficients sur X^+, le système $(p^+)^{-1}(\mathcal{A})$ est constant puisque Y^+ est simplement connexe, il résulte alors de la suite exacte de Mayer-Victoris que $i_* : H_*(X,i^{-1}\mathcal{A}) \longrightarrow h_*(X^+,\mathcal{A})$ est un isomorphisme.

b) Soient Z un espace (connexe par arcs) et $f : X \longrightarrow Z$ une **application** telle que $E \subset \mathrm{Ker}\,\Pi_1(f)$. Désignons par $q : \bar{Z} \longrightarrow Z$ un revêtement **universel.** On obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "p"'] & \bar{Z} \arrow[d, dashed, "q"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd} .$$

D'après la proposition 2, il existe $\bar{g} : Y^+ \longrightarrow \bar{Z}$ tel que $\bar{g} \circ j = \bar{f}$ et par **suite** il existe $g : X^+ \longrightarrow Z$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "j"] \arrow[d, dotted, "p"'] & Y^+ \arrow[d, "p^+"] \arrow[ddr, "q\bar{g}"] & \\
X \arrow[r, "i"] \arrow[drr, "f"'] & X^+ \arrow[dr, dashed, "g"] & \\
 & & Z
\end{tikzcd}$$

.

En particulier $g \circ i = f$.

Soient g_0 , g_1 : $X^+ \longrightarrow Z$ telles que $[g_0 \circ i] = [g_1 \circ i]$. Puisque i est une **cofibration**, on peut supposer que $g_0 \circ i = g_1 \circ i$, et il existe donc des **applications** h_0 h_1 : $Y^+ \longrightarrow \bar{Z}$ telles que $h_0 \circ j = h_1 \circ j$.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "j"] \arrow[d, "p"'] & Y^+ \arrow[r, bend left, "h_0"] \arrow[r, bend right, "h_1"'] \arrow[d, "p^+"] & Z \arrow[d, phantom, "q"] \\
X \arrow[r, "i"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & X^+ \arrow[r, bend left, "g_0"] \arrow[r, bend right, "g_1"'] & Z
\end{tikzcd}$$

.

La proposition 2 montre qu'il existe une homotopie H entre h_0 et h_1 telle que $H|_{Y \times I} : Y \times I \longrightarrow Z$ soit $(y,t) \longmapsto h_0 j(y) = h_1 j(y)$

c) Soit (X',i) vérifiant les conditions de (a). D'après (b) il existe $f : X^+ \longrightarrow X'$ tel que $f \circ i = i'$, et pour tout système localement constant $\mathcal{A}$ sur X', $f_* : H_*(X^+, f^{-1}\mathcal{A}) \longrightarrow H_*(X', \mathcal{A})$ est un isomorphisme.

Il existe un carré cartésien :

$$\begin{tikzcd}
\overline{X^+} \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, dashed, "q"'] & \overline{X'} \arrow[d, "q'"] \\
X^+ \arrow[r, "f"] & X'
\end{tikzcd}$$

où q et q' sont des revêtements universels. On a donc un isomorphisme de systèmes de coefficients : $f^{-1}\mathcal{H}_o(q') \simeq \mathcal{H}_o(q)$. Les suites spectrales de Serre de q et q' fournissent des isomorphismes :

$$H_*(X^+, \mathcal{H}_o(q)) \xrightarrow{\simeq} H_*(\overline{X^+}, \mathbb{Z}) \text{ et}$$

$$H_*(X', \mathcal{H}_o(q')) \xrightarrow{\simeq} H(\overline{X'}, \mathbb{Z})$$

donc $\overline{f}_* : H_*(\overline{X^+}, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_*(X', \mathbb{Z})$ est un isomorphisme. Donc $\overline{f}$ est une équivalence d'homotopie, d'après le th. de Withehead. Puisque q et q' sont des revêtements et que $\Pi_1(f) : \Pi_1(X^+) \longrightarrow \Pi_1(X')$ est un isomorphisme, f est aussi une équivalence d'homotopie.

d) Considérons le carré cartésien :

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "i"] \arrow[d, "p"'] & X^+ \arrow[d, "q"] \\
X \arrow[r, "i"] & X^+
\end{tikzcd}$$

où q est un revêtement universel. Alors p est un revêtement tel que $\Pi_1(X)/\mathrm{Im}\,\Pi_1(p) = \Pi_1(X^+)$. Il en résulte que p est un revêtement associé à E. De plus, on a un isomorphisme de systèmes localement constant de coefficients : $i^{-1}\mathcal{H}_0(q) \simeq \mathcal{H}_0(p)$. Les suites spectrales de Serre donnent des isomorphismes $H_*(Y, \mathcal{H}_0(p)) \simeq H_*(Y, \mathbb{Z})$

$$H_*(X^+, \mathcal{H}_0(q)) \simeq H_*(X^+, \mathbb{Z}) \; ;$$

donc $\bar{i}_* : H_*(Y, \mathbb{Z}) \to H_*(\overline{X^+}, \mathbb{Z})$ est un isomorphisme.

D'après la proposition 1, il existe $k : Y^+ \to \overline{X^+}$ tel que $k \circ j = \bar{i}$. Par suite $k_* : H_*(Y^+, \mathbb{Z}) \to H_*(X^+, \mathbb{Z})$ est un isomorphisme et k est une équivalence d'homotopie d'après le théorème de Whitehead.

$$\begin{tikzcd}
 & & Y^+ \arrow[dl, dashed, "k"'] \arrow[ddl, "p^+"] \\
Y \arrow[urr, "j"] \arrow[r, "\bar{i}"] \arrow[d, "p"'] & \overline{X^+} \arrow[d, "q"] & \\
X \arrow[r] & X^+ &
\end{tikzcd} \quad .$$

Mais $p^+ \circ j = i \circ p = q \circ \bar{i} = q \circ k \circ j$ d'où $[p^+] = [q] \circ [k]$.

e) Le diagramme précédent et le fait que k est une équivalence d'homotopie, montre que les fibres homotopiques E_i et E_j ont le même type d'homotopie.

EXEMPLE. - Soit G un groupe quasi-parfait (*i.e.* $E = [G,G]$ est parfait, ce qui signifie que $E = [E,E]$). On désigne par BG l'espace classifiant de G ; c'est la réalisation géométrique de l'ensemble simplicial $[n] \mapsto \mathrm{Mor}\,([n],G)$. Puisque $\Pi_1(BG) \simeq G$, on peut appliquer le théorème. On obtient donc un espace BG^+ et une cofibration $i : BG \longrightarrow BG^+$ tels que :

(i) $\Pi_1(BG)^+ = G/[G,G]$,

(ii) $i_* : H_*(BG,\mathbb{Z}) \longrightarrow H_*(BG^+,\mathbb{Z})$ est un isomorphisme.

Rappelons que $H_*(BG,\mathbb{Z})$ est canoniquement isomorphe à $H_*(G,\mathbb{Z})$.

(iii) BG^+ représente le foncteur défini par $Z \mapsto [BG,\mathbb{Z}]$ où Z parcourt les espaces dont le groupe fondamental est abélien.

(iv) $BE^+ \longrightarrow BG^+$ est, à homotopie près, un revêtement universel.

Pour le point (iv), on utilise le diagramme cocartésien suivant

$$\begin{tikzcd} BE^+ \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & BE^+ \arrow[d, "\wr"] \\ Y \arrow[r, "j"] \arrow[d] & Y^+ \arrow[d] \\ X \arrow[r, "i"] & X^+ \end{tikzcd} .$$

$BE \longrightarrow Y$ est une équivalence d'homotopie et j une cofibration ; donc $BE^+ \longrightarrow Y^+$ est une équivalence d'homotopie. On applique alors le théorème (d).

En particulier, on peut appliquer ce qui précède au cas où $G = G\ell(A)$, où A est un anneau unitaire (resp. $G = {}_\varepsilon O(A)$, où A est un anneau hermitien) et obtenir ainsi l'espace classifiant $K_0(A)\ BG\ell(A)^+$ (resp. ${}_\varepsilon L_0(A) \times B_\varepsilon O(A)^+$) de la K-théorie (resp. L-théorie) algébrique.

BIBLIOGRAPHIE. -

[1] D. QUILLEN, *Cohomology of groups*, Act. Congr. Inst. Math., 1970, T.2, p. 47-51.

[2] D. QUILLEN, *On the cohomology and K-theory of the general linear groups over a finite field*, Ann. of Math., 96 (1972), p. 552-586.

[3] J.B. WAGONER, *Delooping classifying spaces in algebraic K-theory*. Top. vol. 11 (19) p. 349-370.

M. CRETIN
Département de Mathématiques
Université Claude Bernard
43, bd du 11 novembre 1918
69621 VILLEURBANNE