

DENIS RICHARD

**Mesure de Haar en analyse non-standard**

*Publications du Département de Mathématiques de Lyon*, 1976, tome 13, fascicule 1  
, p. 15-21

[http://www.numdam.org/item?id=PDML\\_1976\\_\\_13\\_1\\_15\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PDML_1976__13_1_15_0)

© Université de Lyon, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

MESURE DE HAAR EN ANALYSE NON-STANDARD

par Denis RICHARD

L'existence de la mesure de Haar sur un groupe localement compact  $G$  résulte, selon M. Halmos [7], de celle d'une fonction "content"  $\lambda$  (au sens de P.R. Halmos) qui, à tout compact  $K$ , associe  $\lambda(K) = \circ \left( \frac{K:I}{K_0:I} \right)$ , où  $K_0$  est un compact fixé et  $I$  un voisinage infinitésimal de l'élément neutre  $e$  de  $G$ . Ce "content" est exactement celui défini par A. Parikh [6] et il est donné par  $\circ \left( \frac{\ell(K)}{\ell(K_0)} \right)$ , où  $\nu(K)$  est la borne inférieure du nombre des  $xI$  permettant de recouvrir  $K$ . L'inconvénient de cette méthode est qu'elle ne permet pas aisément l'intégration, puisque la mesure de Haar n'est pas commodément définie à partir de  $\lambda$  lorsqu'on ne sait pas si  $\lambda$  est régulier. Nous procédons autrement en reprenant les notations de [9] et de [10] et en construisant une forme linéaire positive sur l'espace vectoriel  $C_c(G)$  des fonctions réelles, à support compact et continues dans  $G$ , invariante par les translations à gauche. Nous en déduisons un "content" et la mesure de Haar sur  $G$ .

## 1. EXISTENCE DE L'INTÉGRALE DE HAAR SUR UN GROUPE LOCALEMENT COMPACT.

A - Soit  $G$  un groupe topologique localement compact.

Soit  $C_c(G)$  l'espace des fonctions réelles, à support compact et continues dans  $G$ . Soit  $L^+$  l'ensemble des fonctions positives de  $C_c(G)$ . Soit  $B^+$  l'ensemble des fonctions positives, bornées et à support compact, définies sur  $G$  et non nulles. En reprenant les idées et les notations de A. Weil ([1] p.34) nous savons que, pour deux fonctions  $f$  et  $g (g \neq 0)$  de  $B^+$ , il existe un entier positif  $n$ ,  $n$  nombres réels strictement positifs  $c_i$  et  $n$  éléments  $s_i \in G$  tels que, pour tout  $x$  de  $G$ ,  $f(x) \leq \sum_{i=1}^n c_i(g)(s_i x)$ . Si  $(f:g)$  désigne la borne inférieure de l'ensemble des  $\sum_i c_i$ , où chaque somme est prise pour des  $c_i$  vérifiant la dernière relation écrite, on rappelle (cf. par exemple, [2] p. 357) que lorsque  $f, f_1, f_2$  et  $g \neq 0$  sont éléments de  $B^+$ , on a

$$(f_1 + f_2 : g) \leq (f_1 : g) + (f_2 : g) ;$$

$$\text{pour } c \geq 0, (cf : g) = c(f : g) ;$$

$$\text{si } f_1 \leq f_2, \text{ alors } (f_1 : g) \leq (f_2 : g) ;$$

$$(f : g) \leq (f : h)(h : g) \text{ et } (f : g) \geq \sup f / \sup g ;$$

enfin, si  $f_a(x) = f(a^{-1}x)$  pour  $a \in G$  fixé et pour tout  $x \in G$ , on a l'égalité

$$(f_a : g) = (f : g) \text{ ici fondamentale. On rappelle enfin (cf. [1] p. 35) que, si}$$

$$f_0 \in B^+, \text{ on a } \frac{1}{(f_0 : f)} \leq \frac{(f : g)}{(f_0 : g)} \leq (f : f_0).$$

B - Soit  $\phi$  une fonction de  $B^{+*}$ , à support infinitésimal  $I$ .

Soit  $h_0$  une fonction de  $B^+$ , à partir de maintenant fixée.

Pour toute  $f \in L^+$ , on a  $\frac{(f:\phi)^*}{(h_0:\phi)^*} \leq (f:h_0)$ , et on peut ainsi définir une fonctionnelle  $F_\phi$  de  $L^+$  dans  $\mathbb{R}^*$  par  $F_\phi(f) = \frac{(f:\phi)^*}{(h_0:\phi)^*}$ . Le résultat fondamental est alors le suivant :

THEOREME. - La fonctionnelle  $F_\phi$  définit une intégrale de Haar.

DEMONSTRATION. Vérifions successivement que

- a)  $\forall f \in L^+ - \{0\}$ ,  $F_\phi(f) > 0$  ;
- b)  $\forall a \in G$ ,  $F_\phi(f_a) = F_\phi(f)$  ;
- c)  $\forall c \in \mathbb{R}$ ,  $F_\phi(cf) = cF_\phi(f)$  ;
- d)  $\forall f_1 \in L^+$ ,  $\forall f_2 \in L^+$ ,  $F_\phi(f_1+f_2) = F_\phi(f_1)+F_\phi(f_2)$ .

Les assertions a), b) et c) sont de simples conséquences des réinterprétations des propriétés suivantes rappelées en 1 :

$$\frac{1}{(f_0:f)} \leq \frac{(f:g)}{(f_0:g)} \leq (f:f_0) \text{ pour a),}$$

$$(f_a:g) = (f:g) \text{ pour b) et } (cf:g) = c(f:g) \text{ pour c).}$$

Démontrons d). Notons  $\text{supp}(f)$  le support de chaque fonction  $f$  de  $L^+$ . Considérons la fonction  $h$  de  $L^+$  dont la restriction à  $\text{supp}(f_1+f_2)$  est égale à 1.

Soit  $f = f_1+f_2$ . Si  $f = 0$ , nous poserons  $h_1 = h_2 = 0$  et sinon  $h_1 = f_1/f$ ,  $h_2 = f_2/f$ . Il existe  $\omega \in \mathbb{N}^*$ , des  $c_i \in \mathbb{R}^*$  et des  $s_i \in I^*$  pour  $i \in \{1,2,\dots,\omega\}$  tels que l'on ait, pour tout  $x \in G$  :

$$f_1(x) = f(x)h_1(x) \leq \sum_{i=1}^{\omega} c_i \phi(s_i x) h_1(x).$$

Mais si  $f(x) \neq 0$  et  $x \in K^*$ , il existe  $x_0 \in K$  pour lequel  $\mu(x) = \mu(x_0)$ . De plus, il existe  $s_i$  tel que  $s_i x \in I^*$ , donc  $\mu(x) = \mu(s_i^{-1}) = \mu(x_0)$  et  $h_1$  étant continue,  $h_1(x) = h_1(s_i^{-1}) + \eta_x$  où  $\eta_x$  est infinitésimal.

Par suite, du fait de l'existence de la borne supérieure  $\eta_i$  de  $\{\eta_x | x \in s_i^{-1} I^*\}$ , on a, pour tout  $x \in s_i^{-1} I^*$ ,  $h_1(x) \leq h_1(s_i^{-1}) + \eta_i$ .

Posons alors  $\eta'_1 = \text{Sup}\{\eta_i | i \in [1, \omega]\}$ .

Comme  $\eta_i$  est infinitésimal (car  $\eta_x < \varepsilon$  pour tout  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ , implique  $\eta_i \leq \varepsilon$  pour tout  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ),  $\eta'_1$  l'est aussi. De ce fait

$$(f_1 : \phi)^* \leq \sum_{i=1}^{\omega} c_i [h_1(s_i^{-1}) + \eta'_1]$$

et de même

$$(f_2 : \phi)^* \leq \sum_{i=1}^{\omega} c_i [h_a(s_i^{-1}) + \eta'_2].$$

Mais  $h_1 + h_2 \leq 1$ . Donc

$$(f_1 : \phi)^* + (f_2 : \phi)^* \leq \sum_{i=1}^{\omega} c_i [1 + \eta'_1 + \eta'_2].$$

Divisons maintenant par  $(h_0 : \phi)^*$  et prenons les parties standards des réels finis obtenus ; il vient

$$F_{\phi}(f_1) + F_{\phi}(f_2) \leq F_{\phi}(f) = F_{\phi}(f_1 + f_2).$$

L'inégalité dans l'autre sens s'obtient sans difficulté.

REMARQUE 1. - La preuve donnée par A. Weil de l'existence de l'intégrale de Haar utilise le théorème de Tychonoff auquel il n'est pas ici directement fait appel.

REMARQUE 2. - La fonctionnelle ainsi définie sur  $L^+$  se prolonge à l'ensemble des fonctions à valeurs réelles et à support compact de  $G$ , comme en [6].

### 3. MESURE DE HAAR.

Pour ramener, comme le fait Hausner en [2], l'existence de la mesure à celle d'un "content" au sens de Halmos, nous considérons  $\chi_I$  et  $\chi_{K_0}$  respectivement les fonctions caractéristiques du voisinage infinitésimal  $I$  et du compact d'intérieur non vide  $K_0$ . Soit  $K$  un compact quelconque de fonction caractéristique  $\chi_K$ . Considérons  $\frac{(\chi_K : \chi_I)^*}{(\chi_{K_0} : \chi_I)^*} = \lambda'(K)$ . Comme  $K \subset \bigcup_{i=1}^n k_i K_0$  pour  $n \in \mathbb{N}$ , pour des  $k_i \in K$ , on observe que :

$$(\chi_K : \chi_I)^* \leq \sum_{i=1}^n (\chi_{k_i K_0} : \chi_I)^* = n(\chi_{K_0} : \chi_I)^* .$$

Par suite  $\lambda'(K)$  est fini. Soit  $\lambda(K) = {}^\circ\lambda'(K)$  sa partie standard.

THEOREME. - L'application de l'ensemble des compacts de  $G$  dans  $\mathbb{R}$  qui à un compact  $K$  associe  ${}^\circ\lambda'(K)$  est finie, non négative, monotone, additive et sous-additive et invariante par les translations de  $G$ .

Considérons maintenant un ouvert  $V$  de  $G$  ; si  $f \prec V$  indique que  $f \in C_c^+(G)$  et que  $f \leq \chi_V$ , nous savons qu'il existe sur  $G$  une mesure de Haar  $m$  tel que :

$$m(V) = \sup\{F_\phi(f) \mid f \prec V\}.$$

Mais le lemme 9.4.6 de [9] p. 76, prouve que  $\chi_V = \sup\{f \mid f \prec V\}$  et nous allons montrer la :

PROPOSITION. - Pour tout  $V$  ouvert et relativement compact, on a  $m(V) = {}^\circ\lambda'(V)$ .

Il est évident que  $\sup(f:\chi_I)^* \leq (\chi_V:\chi_I)^*$ , donc que  $m(V) \leq {}^\circ\lambda'(V)$ .

Réciproquement il suffit de montrer que pour tout  $\varepsilon \in \mathbb{R}^{**+}$ , il existe  $f \prec V$

telle que  $(\chi_V:\chi_I)^* < (f:\chi_I)^* + \varepsilon$ . Considérons  $\omega \in \mathbb{N}^*$  tel que

$$\bar{V}^* \subset \bigcup_{i=1}^{\omega} s_i I^*,$$

et soit  $\varepsilon' = \varepsilon/\omega$ , une application à support contenu dans  $V$ . On sait qu'il

existe  $f \prec V$  telle que  $\chi_V < f + \varepsilon'$ . D'où

$$(\chi_V:\chi_I)^* < ((f+\varepsilon'):\chi_I)^* \leq (f:\chi_I)^* + (\varepsilon/\omega:\chi_I)^*.$$

Mais pour toute famille  $\{c_i\}_{i \in [1, \omega]}$  telle que

$$\varepsilon/\omega(x) < \sum_{i=1}^{\omega} c_i \chi_I(s_i x) \leq \sum_{i=1}^{\omega} c_i,$$

on a  $(\varepsilon/\omega:\chi_I)^* \leq \sum_{i=1}^{\omega} c_i$ .

Pour  $\omega = \omega'$ , il vient  $(\varepsilon/\omega:\chi_I)^* \leq \omega \varepsilon/\omega = \varepsilon$ . C.Q.F.D.

#### REFERENCES , -

- [1] WEIL A., Intégration dans les groupes topologiques, Hermann, Paris 1941.
- [2] LANG S. , Analysis II, Addison Wesley, Princeton 1969.
- [3] HALMOS P.R., Measure theory, D. Van Nostrand, Princeton 1950.
- [4] LOOMIS L.H., Abstract Harmonic Analysis, D. Van Nostrand, Princeton 1953.
- [5] LUXEMBOURG W.A.J., A general theory of Monads - Applications of model theory to Algebra, Analysis and probability, Holt Rinehart and Winston, 1969, 18-86.

- [6] PARIKH R., A non standard theory of topological group in ouvrage cité en 5 .
- [7] HAUSNER M., On a non-standard construction of Haar Measure, *Communications on pure and applied mathematics*, Vol. XXV, 403-405.
- [8] KIRK R.B., The Haar Integral via non standard Analysis, *Pacific Journal of mathematics*, vol. 58, n° 2, 1975, 517-527.
- [9] MACHOVER M. and HIRSCHFELD, Lectures on Non-standard Analysis Springer-Verlag, Berlin 1969.
- [10] ROBINSON A., Non-standard Analysis. North-Holland, Amsterdam 1966.

-----

Denis RICHARD  
Département de Mathématiques  
Université Claude Bernard  
43, bd du 11 novembre 1918  
69621 VILLEURBANNE