PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

JACQUES VEY

Rapport sur les champs symplectiques formels

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1976, tome 13, fascicule 3
, p. 63-78
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1976__13_3_63_0>

Publication du
Département de
Mathématiques
Lyon 1976 t. 13-3

RAPPORT SUR LES CHAMPS SYMPLECTIQUES FORMELS

par Jacques VEY

1. CHAMP DE VECTEURS FORMELS.

Dans tout ce qui suit, on notera k un corps commutatif de caractéristique nulle, et T un espace vectoriel fini sur k. L'algèbre $\mathfrak{a}$ des champs formels est T en le produit tensoriel de T et de $k[[T]]$, algèbre (associative) des fonctions formelles sur T ; $\mathfrak{a}$ est équipée du crochet de Lie.

Soit ℓ un entier ≥ -1 : on pose $\mathfrak{a}_\ell = S^{\ell+1}T^* \otimes T$ (champs polynomiaux homogènes de degré $\ell+1$) ; $\mathfrak{a}$ est constitué des translations sur T ; $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{gl}(T)$ des opérateurs linéaires sur T. Soit $H = \sum x^i \partial/\partial x^i$ la multiplication scalaire sur T : un champ formel X appartient à $\mathfrak{a}_\ell$ si et seulement si $[H,X] = \ell X$; ce qui fait que les $\mathfrak{a}_\ell$, $\ell \geq -1$, définissent une graduation d'algèbre de Lie sur $\mathfrak{a}$.

Il y a quelques années, Gelfand et Fuks ont entrepris de calculer la cohomologie de $\mathfrak{a}$ dans différents modules, <u>d'ordre fini</u>. Voici ce qu'on entend par là, du moins quand la cohomologie est à coefficients dans le $\mathfrak{a}$-module trivial k. On forme, pour p entier ≥ 0, $C^p(\mathfrak{a},k)$ l'espace de p-formes multilinéaires alternées sur $\mathfrak{a}$, d'ordre fini (c'est-à-dire : la valeur de la cochaîne ne dépend que des jets d'un certain ordre des arguments). On équipe $C^*(\mathfrak{a},k) = \bigoplus_{p\geq 0} C^p(\mathfrak{a},k)$ de la différentielle usuelle :

$$df(X_1\wedge\ldots\wedge X_{p+1}) = \sum_{1\leq i<j\leq p+1} (-1)^{i+j} f([X_i,X_j],X_1,\ldots\hat{i}\ldots\hat{j}\ldots X_{p+1})$$

($f \in C^p(\mathfrak{a},k)$, $X_i \in \mathfrak{a}$) et on cherche la cohomologie $H^*(\mathfrak{a},k)$ du complexe ainsi obtenu. Cette entreprise audacieuse réussit au-delà de toute espérance : la cohomologie en question s'avère de dimension finie, et complètement explicitable ([1]).

Ce succès engageait à renouveler l'opération pour d'autres algèbres de Lie infinies célèbres ; et parmi elles l'algèbre des champs symplectiques (ou hamiltoniens) formels, qui sont d'une extrême importance en mécanique. Malheureusement, ces recherches se sont heurtées à des difficultés, dont nous allons essayer de faire le point.

2. CHAMPS DE VECTEURS SYMPLECTIQUES.

Supposons donc T de dimension paire $2m$, équipé d'une forme bilinéaire alternée ω non dégénérée : par un choix idoine de coordonnées sur T (coordonnées <u>conjuguées</u>) on peut écrire

$$\omega = \sum_1^m dp_i \wedge dq_i \ .$$

Un champ formel $X \in \mathfrak{a}$ sera dit symplectique si $\theta_X \omega = 0$ (θ désigne la dérivée de Lie ; le groupe à un paramètre correspondant de difféomorphismes préserverait ω). Les champs formels symplectiques forment une algèbre de Lie que je noterai $\mathfrak{S}$.

Par ailleurs, si $u \in k[[T]]$ est une fonction formelle, appelons gradient de u le champ U défini par

$$i_U \omega = -du \ .$$

Il est clair que U détermine u à une constante près ; en coordonnées conjuguées,

$$U = \sum_1^m \left(- \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i}\right) .$$

LEMME. <u>On a une suite exacte</u>

$$0 \longrightarrow k \longrightarrow k[[T]] \xrightarrow{\text{grad}} \mathfrak{S} \longrightarrow 0 \ .$$

En effet, si $\theta_X \omega = 0$, la formule de Cartan donne

$$0 = \theta_X \omega = d i_X \omega + i_X d\omega$$

indiquant, puisque $d\omega = 0$, que $i_X \omega$ est fermée.

On enrichit la structure en équipant $k[[T]]$ d'une loi d'algèbre de Lie qui fait du gradient un morphisme : c'est le crochet de Poisson, qu'on définit par

$$\begin{aligned}[u\ v] &= \theta_U v = -\theta_V u = \langle \omega, U \wedge V \rangle \\ &= \sum_1^m \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} - \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i}\end{aligned}$$

($u, v \in k[[T]]$; U et V sont leurs gradients). On notera $\mathfrak{P}$ l'algèbre de Poisson ainsi obtenue, on vérifie immédiatement que k (fonctions constantes) est son centre.

Si $f, g \in T^* \hookrightarrow \mathfrak{P}$, si r, s sont des entiers ≥ 0 , on a

$$[f^r, g^s] = rs(f,g) f^{r-1} g^{s-1}$$

où (f,g) désigne le produit symplectique dans T^* . Graduons $\mathfrak{P} = \prod_{\ell \geq 0} S^\ell T^*$ en attribuant le poids $\ell - 2 \geq -2$ à $S^\ell T^*$: on voit qu'on obtient une graduation d'algèbre de Lie, et la situation se présente ainsi :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathfrak{P} \arrow[dd, "\mathrm{grad}"'] & = & \mathfrak{P}_{-2} \arrow[d, equal] & \oplus & \mathfrak{P}_{-1} \arrow[d, equal] & \oplus & \mathfrak{P}_0 \arrow[d, equal] & \oplus & \mathfrak{P}_1 \arrow[d, equal] & \oplus \dots \oplus & \mathfrak{P}_\ell \arrow[d, equal] & \oplus \dots \\
 & & k \arrow[d] & & T^* \arrow[d] & & S^2 T^* \arrow[d] & & S^3 T^* \arrow[d] & \dots & S^{\ell+2} T^* \arrow[d] & \\
\mathfrak{E} & = & 0 & \oplus & \mathfrak{E}_{-1} \arrow[d, equal] & \oplus & \mathfrak{E}_0 \arrow[d, equal] & \oplus & \mathfrak{E}_1 \arrow[d, equal] & \oplus \dots \oplus & \mathfrak{E}_\ell \arrow[d, equal] & \oplus \dots \\
 & & & & T & & \mathfrak{sp}(T) \arrow[d, equal] & & \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{E} & & \mathfrak{a}_\ell \cap \mathfrak{E} & \\
 & & & & & & \mathfrak{gl}(T) \cap \mathfrak{E} & & & & &
\end{tikzcd}$$

La graduation induite sur $\mathfrak{C}$ par les $\mathfrak{C}_\ell = \mathfrak{C} \cap \mathfrak{a}_\ell$ se retrouve **ainsi** : le champ $H \in \mathfrak{gl}(T) \hookrightarrow \mathfrak{a}$ n'appartient pas à $\mathfrak{C}$ ($\theta_H \omega = 2\omega \neq 0$) **mais il** la normalise : $[H, \mathfrak{C}] \subset \mathfrak{C}$ et les $\mathfrak{C}_\ell$ sont des espaces propres. **Aussi** bien, l'opérateur $\mathrm{ad}\, H$ sur $\mathfrak{C}$ se relève sur $\mathfrak{P}$ par l'opérateur α :

$$\alpha u = \theta_H u - 2u \quad (u \in \mathfrak{P})$$

qui est une dérivation extérieure de l algèbre de Poisson, les $\mathfrak{P}_\ell$ **étant** ses espaces propres.

Il est naturel de distinguer dans $\mathfrak{C}$ la sous-algèbre $\mathfrak{s}$ **d'isotropie** formée des champs nuls à l'origine :

$$\mathfrak{s} = \prod_{\ell \geq 0} \mathfrak{C}_\ell = \prod_{\ell \geq 0} \mathfrak{P}_\ell = \mathfrak{m}^2$$

($\mathfrak{m}$, idéal maximal de $\mathfrak{P} = k[[T]]$) .

3. <u>LA ZONE STABLE</u>.

Un premier résultat est le suivant ([2]).

PROPOSITION 1. <u>Pour</u> $0 < p \leq 2m$, $H^p(\mathfrak{P},k) = 0$; <u>et</u> $\dim_k H^{2m+1}(\mathfrak{P},k) = 1$.

Une base de $H^{2m+1}(\mathfrak{P},k)$ s'explicite comme suit : $\omega \in \Lambda^2 T^*$ est une 2-forme sur $\mathfrak{C}_{-1} = T$, et peut être remontée sur $\mathfrak{C}$ par π_{-1}^* (π_ℓ désigne la projection de $\mathfrak{C}$, ou $\mathfrak{P}$, sur $\mathfrak{C}_\ell$, ou $\mathfrak{P}_\ell$) ; puis sur $\mathfrak{P}$ par grad^* . Pareillement, soit $K = \pi_{-2}$ la 1-forme sur $\mathfrak{P}$ évaluation à l'origine. Alors $dK = \omega$, et $K \wedge \omega^m$ est un $(2m+1)$-cocycle sur $\mathfrak{P}$ qui donne une base de $H^{2m+1}(\mathfrak{P},k)$.

PROPOSITION 2. <u>En degré</u> $\leq 2m+1$, <u>l'algèbre</u> $H^*(\mathfrak{C},k)$ <u>est librement engendrée par un générateur de degré</u> 2 .

Ce générateur est la classe de $\omega \in C^2(\mathfrak{C},k)$; on a sur $\mathfrak{C}$, $d\omega = 0$. Cet énoncé se déduit aisément du précédent en considérant l'extension toute simple

$$0 \to k \to \mathfrak{P} \to \mathfrak{C} \to 0$$

qui donne naissance à une suite spectrale

$$E_2^{p,q} = H^p(k, H^q(\mathfrak{C},k)) \Rightarrow H^{p+q}(\mathfrak{P},k)$$

dont le fonctionnement est aisément analysable dans les bas degrés. Quant à la proposition 1, elle est une adaptation d'un argument que Gelfand et Fuks utilisaient pour montrer la nullité de $H^q(\mathfrak{a},k)$, $1 \le q \le \dim T$, avant qu'ils n'obtiennent la description complète de $H^*(\mathfrak{a},k)$ par la méthode que je vais rappeler ci-dessous.

4. INTERVENTION DE ROSENFELD.

On commence d'ordinaire le calcul de $H^*(\mathfrak{a},k)$ par l'observation suivante. Faisons opérer H, ou θ_H, sur $C^*(\mathfrak{a},k)$, qui va se scinder en somme de sous-espaces propres

$$C^*(\mathfrak{a},k) = \bigoplus_{r\in\mathbb{Z}} C_r^*(\mathfrak{a},k)$$

du fait que $d\theta_H = \theta_H d$, les C_r^* sont des sous-complexes. Ils sont <u>acycliques pour</u> $r \neq 0$, en effet sur C_r^*,

$$r = \theta_H = di_H + i_H d$$

ainsi la cohomologie se réfugie dans C_0^*, complexe dont on découvre rapidement qu'il est de dimension finie, nul en degré $> n^2+2n$ ($n = \dim T$). Ainsi la finitude de $H^*(\mathfrak{a},k)$ apparaît immédiatement. Il apparaît dans le même temps que l'argument s'effondre dans le cas de $\mathfrak{C}$: $H \notin \mathfrak{C}$ et l'opérateur i_H fait défaut.

Dans le cas de l'algèbre $\mathfrak{a}$, on procède ensuite, par une méthode devenue classique, (voyez [1]), à la définition d'un morphisme w de l'algèbre de Weil

$$W(\mathfrak{gl}(T)) = \Lambda\, \mathfrak{gl}(T)^* \otimes S\, \mathfrak{gl}(T)^*$$

dans $C^*(\mathfrak{a},k)$ (en fait dans $C^*_0(\mathfrak{a},k)$) ; on envoie une forme $\xi \in \Lambda^1 \mathfrak{gl}(T)^*$ sur $\pi^*_0 \xi$ (π_0 est la projection naturelle de $\mathfrak{a}$ sur $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{gl}(T)$) ; et on envoie la même forme ξ, considérée comme élément de $S^1 \mathfrak{gl}(T)^*$, sur

$$d\pi^*_0 \xi - \frac{1}{2} [\pi^*_0 \xi, \pi^*_0 \xi] \ .$$

On vérifie aisément que w anéantit l'idéal I de $W(\mathfrak{gl}(T))$ engendré par $S^{n+1} \mathfrak{gl}(T)^*$ ce qui induit

$$\bar{w} : \bar{W}(\mathfrak{gl}(T)) = W(\mathfrak{gl}(T))/I \ \rightarrow \ C^*(\mathfrak{a},k)$$

et le théorème fondamental, c'est que $\bar{w}$ induit un isomorphisme des cohomologies. Le principe de la preuve est le suivant : on filtre par rapport à $\mathfrak{gl}(T) = \mathfrak{a}_0$ les deux complexes en question ; la suite spectrale de Koszul-Hochschild-Serre, par réductivité, donne d'une part

$$E_2^{p,q}(\bar{W}) = H^q(\mathfrak{gl}(T),k) \otimes [S\mathfrak{gl}(T)^*/I]^{\mathfrak{gl}(T)}$$

où le second facteur sera l'algèbre symétrique $k[c_1,\dots,c_n]$, engendrée par des c_i de degré $2i$, et tronquée en degré $> 2n$; et d'autre part

$$E_2^{p,q}(C^*(\mathfrak{a},k)) = H^q(\mathfrak{gl}(T),k) \otimes H^p(\mathfrak{a}, \mathfrak{gl}(T),k)$$

où le second facteur est la cohomologie du sous-complexe $C^*(\mathfrak{a},\mathfrak{gl}(T),k) \hookrightarrow C^*(\mathfrak{a},k)$ formé des cochaînes ξ basiques : $\theta_L \xi = i_L \xi = 0$ quel que soit $L \in \mathfrak{gl}(T)$. On calcule $C^*(\mathfrak{a},\mathfrak{gl}(T),k)$ et on a l'agréable surprise de ne rien trouver en degré impair ou $> 2n$; et de ne trouver que l'image de $\bar{w}$ en degré pair - après quoi tout se trivialise.

Au vu de ces phénomènes, le projet de V.I. Rosenfeld a été le suivant : abandonnons à leur sort, au moins provisoirement, les complexes $C^*_r(\mathfrak{E},k)$, $r \neq 0$; et voyons si le morphisme évident

$$\bar{w} : W(\mathfrak{sp}(T))/I \ \rightarrow \ C^*_0(\mathfrak{E},k)$$

va induire un isomorphisme de cohomologies. Dans sa note [3], Rosenfeld annonce que tel est bien le cas, et il se borne à ajouter que la démonstration est analogue au cas de Gelfand-Fuks : l'algèbre $\mathfrak{a}$.

Il n'y a rien que de plausible dans cet isomorphisme ; mais je suis sceptique quant à l'analogie de preuves. Je vais produire dans un instant une cochaîne de $C_0^*(\mathfrak{C}, \mathfrak{sp}, k)$, de degré <u>impair</u> : donc à supposer même que $C^*(\mathfrak{C}, \mathfrak{sp}, k)$ se laisse décrire commodément, on ne sera pas dispensé, contrairement au cas de $\mathfrak{a}$, du calcul de la différentielle et de sa cohomologie. Considérons en effet, sur l'espace

$$\Lambda^3 T^* \otimes S^3 T^* \otimes S^4 T^* = \Lambda^3 \mathfrak{C}_{-1} \otimes \mathfrak{C}_1 \otimes \mathfrak{C}_2$$

la forme linéaire définie par

$$\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \otimes \xi^3 \otimes \eta^4 \longrightarrow \Sigma (\alpha, \beta)(\gamma, \eta)(\xi, \eta)^3$$

où $\xi, \eta, \alpha, \beta, \gamma \in T^*$, et où Σ indique une sommation circulaire sur α, β, γ . Elle est trivialement invariante par $Sp(T)$; elle se relève naturellement en une 5-cochaîne sur $\mathfrak{C}$, qui sera de poids 0 , et s'annulera dès qu'un argument sera dans $\mathfrak{C}_0 = \mathfrak{sp}(T)$.

Signalons que le calcul de $H_0^*(\mathfrak{C}, k)$ est équivalent au calcul de $H^*(\mathfrak{SC}, k)$ cohomologie de l'algèbre $\mathfrak{SC}$ des champs conformes symplectiques, c'est-à-dire les champs $X \in \mathfrak{a}$ tels que $\theta_X \omega$ soit un multiple constant de ω (cf [3] ,[4]) .

5. <u>INTERVENTION DES ORDINATEURS</u>.

En toute hypothèse, que faire contre les complexes $C_r^*(\mathfrak{C}, k)$ et leurs mystérieuses cohomologies $H_r^*(\mathfrak{C}, k)$? Afin de débloquer la situation, Gelfand, Fuks et Kalinin ([4]) entreprirent le calcul mécanique de $C_r^q(\mathfrak{C}, \mathfrak{sp}, k)$ pour les basses valeurs de r et de q . En effet, soit f une q-cochaîne basique : elle est déterminée par les valeurs

$$f(\xi_1^{\ell_1}, \ldots, \xi_q^{\ell_q}) \quad , \quad \ell_i \geq 0 \ , \ \xi_i \in T^*$$

sur les puissances parfaites dans $k[[T]] = \mathfrak{P}$, d'après la théorie des invariants ([ ]) le polynôme obtenu est un polynôme

$$F(\ldots(\xi_i,\xi_j)\ldots)$$

en les produits symplectiques des ξ_i , unique modulo les relations : celle-ci, d'après [5] pp. 167-168, loc. cit. complété par [6] , pp. 23 et 24, sont engendrées par la relation

$$J_o = \sum \pm(\xi_1,\xi_2)(\xi_3,\xi_4)\ldots(\xi_{2m+1},\xi_{2m+2}) \equiv 0 \ .$$

En outre, F doit satisfaire les conditions d'antisymétrie requises d'une cochaîne. (Un peut d'attention montre d'ailleurs que le poids d'un invariant est forcément pair). La détermination des polynômes F possibles peut très bien être confiée à un ordinateur pour les petites valeurs de q et r , grâce aux techniques de calcul algébrique mises au point depuis quelques années. C'est ce qu'ont fait Gelfand, Fuks et Kalinin pour $\dim T = 2$ $(m=1)$; et voici leurs conclusions :

PROPOSITION. Si $\dim T = 2$, $H^q_r(\mathfrak{S},\mathfrak{sp},k) = 0$ pour $q > 0$, $0 \neq r < 8$; et pour $0 < q \neq 7$, $r = 8$; par contre $\dim H^7_8(\mathfrak{S},\mathfrak{sp},k) = 1$.

(Chaque complexe $C^*_r(\mathfrak{S},\mathfrak{s},k)$ s'annule en degré assez grand, donc la proposition est le résultat d'un calcul de longueur finie). On trouvera dans [4] l'expression explicite et déroutante d'un 7-cocycle de poids 8 non trivial. On déduit de là très aisément que $H^{10}_8(\mathfrak{S},\mathfrak{s},k)$ est de dimension 1, etc... par la suite spectrale de Koszul-Hochschild-Serre.

Peut-être la philosophie principale à retenir de ces résultats est la nécessité pour les algébristes de s'intéresser à ces calculs algébriques sur machine, qui me semblent ouvrir des perspectives prometteuses dans toutes sortes de domaines.

6. LE THEOREME DE PERCHIK.

Il est facile de voir que chaque complexe $C_r^*(\mathfrak{C},\mathfrak{sp},k)$ est de dimension finie, et de majorer explicitement sa longueur. Nous pouvons donc considérer les caractéristiques d'Euler-Poincaré

$$\chi_r = \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \dim H_r^q(\mathfrak{C},\mathfrak{sp},k) = \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \dim C_r^q(\mathfrak{C},\mathfrak{sp},k) .$$

J. Perchik a fait voir [7] comment on peut calculer les χ_r à partir de la deuxième expression, et obtenir par là des informations, certainement très implicites et indirectes, sur les groupes $H_r^*(\mathfrak{C},\mathfrak{sp},k)$.

PROPOSITION. Formons le produit

$$(n!)^{-1}\, 2^{-m} \prod_{\substack{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^m \\ |\alpha+\beta|>0 \\ |\alpha+\beta|=2 \Rightarrow \alpha\neq\beta}} (1 - t^{|\alpha+\beta|-2} x^{\alpha-\beta}) , \quad t\in k , \quad x \in k^m$$

où $|\alpha+\beta| = \sum_1^m (\alpha_i+\beta_i)$, $x^{\alpha-\beta} = \prod_1^m x_i^{\alpha_i-\beta_i}$. Dans le développement en série entière en t , de Laurent en x , de ce produit , χ_r est le coefficient de $t^r x_1^o \dots x_m^o$.

Lorsque $m = 1$ $(\dim T = 2)$, un calcul d'ordinateur a abouti au résultat suivant :

$$\begin{aligned}\sum \chi_r t^r = t^{-2} &+ 2 - t^8 - t^{14} - t^{22} - t^{28} + t^{30} - t^{32} + t^{34} - t^{36} \\ &+ t^{40} - 2t^{42} - t^{46} + 3t^{48} - 2t^{50} + 3t^{52} - t^{58} - 3t^{60} \\ &+ 3t^{62} - 8t^{64} + 9t^{66} + 10t^{70} + \dots\end{aligned}$$

qui manifeste l'existence de 57 classes de cohomologie indépendantes. Pour $r \leq 8$, les résultats sont en accord avec les résultats des § précédents. On ne sait pas décider, même dans ce cas, si une infinité de χ_r sont $\neq 0$, ou non nuls. Ce résultat donne en tout cas la mesure du problème.

Signalons que J. Perchik a établi un résultat analogue relatif aux champs isochores (préservant le volume) - ces champs donnent lieu à une problématique très analogue, mais un peu plus simple, à celle des champs symplectiques.

7. L'ISOTROPIE.

Il n'est pas sans intérêt d'examiner la sous-algèbre $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{C}$ des champs nuls à l'origine ; on peut considérer que $\mathfrak{s} = \mathfrak{m}^2 \subset k[[T]]$ (idéal des fonctions critiques à l'origine) équipé du crochet de Poisson.

Soit $j : \mathfrak{s} \to \mathfrak{sp} \to 0$ le jet d'ordre 1 (qui est indépendant du choix des coordonnées curvilignes sur T) et $i : \mathfrak{sp} \to \mathfrak{s}$ (liée au privilège des coordonnées linéaires sur T), qui en est inverse à droite. Nous obtenons un morphisme $j^* : H^*(\mathfrak{sp},k) \to H^*(\mathfrak{s},k)$; et la possibilité (par i) de considérer la cohomologie $H^*(\mathfrak{s},\mathfrak{sp},k)$ des cochaînes basiques par rapport à $\mathfrak{sp}$.

PROPOSITION. <u>On a un isomorphisme</u>

$$H^*(\mathfrak{s},k) \simeq H^*(\mathfrak{sp},k) \otimes H^*(\mathfrak{s},\mathfrak{sp},k) \quad .$$

<u>Preuve</u> : On considère la suite spectrale de Koszul-Hochschild-Serre

$$E_2^{p,q} = H^q(\mathfrak{sp},k) \otimes H^p(\mathfrak{s},\mathfrak{sp},k)$$

et on observe que i^* relève les termes de la fibre $E_2^{0,*} = H^*(\mathfrak{sp},k)$ dans $H^*(\mathfrak{s},k)$.

PROPOSITION ([8], §2). $H^1(\mathfrak{s},\mathfrak{sp},k) = 0$ <u>et</u> $\dim H^2(\mathfrak{s},\mathfrak{sp},k) = 1$. <u>Si de plus</u> $\dim T \geq 4$ $(m \geq 2)$ $H^3(\mathfrak{s},\mathfrak{sp},k) = 0$ <u>et</u> $\dim H^4(\mathfrak{s},\mathfrak{sp},k) \geq 2$.

Un 2-cocycle fondamental s'explicite ainsi : on considère sur

$\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{E}_1 = S^3T^*$ la 2-forme bilinéaire alternée β_1 définie par

$$\beta_1 : \xi^3 \wedge \eta^3 \longmapsto (\xi,\eta)^3 \quad , \quad \xi,\eta \in T^*$$

et on la relève sur $\mathfrak{s}$ par π_1^* .

A cet endroit, je vais formuler une conjecture. Quel que soit l'entier $p > 0$, considérons la 2p-forme bilinéaire alternée β_p sur $\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{E}_1 = S^3T^*$ définie par

$$\beta_p : \xi_1^3 \wedge \ldots \wedge \xi_{2p}^3 \longmapsto \langle \omega^p, \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{2p} \rangle^3 \quad (\xi_i \in T^*)$$

que nous relevons en une 2p-cochaîne sur $\mathfrak{s}$; cette cochaîne est ouvertement basique, et un calcul d'une ligne montre que c'est un cocycle (dans $\mathfrak{s}$, toujours).

<u>Conjecture</u> : <u>En degré</u> $\leq m$, <u>l'algèbre</u> $H^*(\mathfrak{s},\mathfrak{sp},k)$ <u>est librement engendrée par les classes de</u> β_i , $1 \leq i \leq m$.

La restriction sur les degrés s'introduit comme suit : si l'on reprend les considérations du §5 sur les générateurs des invariants de $Sp(T)$, on voit que les relations n'interviennent qu'en degré $\geq m+2$, ce qui distinguerait assez naturellement une zône stable $0 \leq q \leq m$. Le fondement expérimental de cette conjecture est des plus minces, et elle reflète surtout le manque d'imagination de son auteur ; lorsque $m \geq 4$, les deux classes décelées dans $H^4(\mathfrak{s},\mathfrak{sp},k)$ sont bien $\beta_1 \wedge \beta_1$ et β_2 ; et je m'étais convaincu d'un lien entre cette conjecture et l'assertion de Rosenfeld.

8. <u>INVARIANTS SYMETRIQUES</u>.

On se rappelle que dans le cas des algèbres de Lie semi-simples, les invariants symétriques sont d'un accès beaucoup plus facile que la cohomologie. Ceci incite à battre en retraite vers le problème suivant : appelons polynôme sur $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{S}$, etc... une fonction $f : \mathfrak{a} \to k$ qui ne dépend que du jet d'un certain ordre de l'argument, et qui est un polynôme par rapport aux coefficients de la série de Taylor ; et cherchons ceux qui sont invariants par l'action ajointe de $\mathfrak{a}$ (resp. $\mathfrak{C}$,etc...) : soit $I_S(\mathfrak{a})$ (resp. $I_S(\mathfrak{C})$ etc...) l'algèbre qu'ils forment.

PROPOSITION. <u>Il n'y a pas d'invariant symétrique non nul sur</u> $\mathfrak{a}$, <u>ni sur</u> $\mathfrak{C}$.

Cela résulte aisément des trois faits suivants : a) un polynôme sur $\mathfrak{a}$ (ou $\mathfrak{C}$) est déterminé par sa restriction aux champs non nuls à l'origine ; b) un champ non nul à l'origine est conjugué à une translation ; c) il n'y a pas de polynôme non nul sur $T = \mathfrak{a}_{-1}$ ou $\mathfrak{C}_{-1}$ invariant par $G\ell(T)$ ou $Sp(T)$.

Passons donc aux sous-algèbres d'isotropie $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{C}$ des champs nuls à l'origine. Soit G (resp. SG) le groupe de jets de difféomorphismes (resp. de difféomorphismes symplectiques) préservant l'origine. Le jet d'ordre 1

$$
\begin{aligned}
j : \mathfrak{b} &\to \mathfrak{gl}(T) \to 0 \\
\mathfrak{s} &\to \mathfrak{sp}(T) \to 0
\end{aligned}
$$

transforme l'action de G sur $\mathfrak{b}$ (resp. de SG sur $\mathfrak{s}$) en l'action (adjointe) de $G\ell(T)$ sur $\mathfrak{gl}(T)$ (resp. de $Sp(T)$ sur $\mathfrak{sp}(T)$) . Il en résulte une flèche

$$
\begin{aligned}
j^* : I_S(\mathfrak{gl}(T)) &\to I_S(\mathfrak{b}) \\
I_S(\mathfrak{sp}(T)) &\to I_S(\mathfrak{s})
\end{aligned}
$$

qui est <u>injective</u> (les coordonnées linéaires sur T fournissent un inverse à droite $i : \mathfrak{gl}(T) \to \mathfrak{b}$ de j) ; les algèbres d'invariants $I_S(\mathfrak{gl}(T))$ et $I_S(\mathfrak{sp}(T))$ sont bien connues : elles sont librement engendrées par les coefficients du polynôme caractéristiques ([10] , vol.2, ch.XII) (resp. par les coefficients d'indice pair, les autres étant identiquement nuls).

PROPOSITION. $j^* : I_S(\mathfrak{gl}(T) \to I_S(\mathfrak{b})$ <u>est un isomorphisme</u>.

<u>Preuve</u> : Soit $f \in I_S(\mathfrak{b})$, $f_o = j^*(f|i(\mathfrak{gl}(T)))$, et $g = f - f_o$ qui est un invariant nul sur $\mathfrak{gl}(T) \xrightarrow{i} \mathfrak{b}$. Nous allons voir que $g(X) = 0$ quel que soit $X \in \mathfrak{b}$. Soit r l'ordre de g (c'est-à-dire : l'ordre du jet dont il dépend). Nous rappelons que si $X \in \mathfrak{b}$, et si les valeurs propres de $jX \in \mathfrak{gl}(T)$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, sont toutes distinctes et évitent les relations de dépendance sur $\mathbb{Z}$

$$\lambda_i = \alpha_1\lambda_1 + \ldots + \alpha_n\lambda_n \ , \ \alpha_i \in \mathbb{N} \ , \ \sum_1^n \alpha_i \leq r$$

(ces relations sont en nombre fini, et seront donc évitées sur un ouvert de Zariski $\Omega \subset \mathfrak{gl}(T)$), alors le champ X est conjugué par G à un champ linéaire X' modulo un champ nul à l'ordre r . Si donc $jX \in \Omega$, on aura $g(X) = g(X') = 0$: ainsi g est identiquement nulle sur $j^{-1}(\Omega)$, donc partout puisque c'est un polynôme.

Ainsi donc, rien de neuf sur $I_S(\mathfrak{b})$. Mais la situation symplectique est plus riche : le monomorphisme $j^* : I_S(\mathfrak{sp}) \to I_S(\mathfrak{s})$ <u>n'est pas surjectif</u>. La raison en est qu'un champ symplectique U nul à l'origine ne se laisse linéariser que très exceptionnellement. Pour examiner de plus près ce phénomène, nous allons le décaler sur la fonction génératrice de U (U = grad u) . Conjuguer U à un champ linéaire revient en effet à conjuguer u à une forme quadratique ; c'est-à-dire à changer de coordonnées <u>conjuguées</u> en sorte que u s'exprime comme une forme quadratique ; c'est-à-dire poser à nouveau la question du lemme de Morse, mais en se restreignant à des changements de coordonnées symplectiques.

9. <u>LE LEMME DE MORSE</u>.

Soit donc $u \in k[[T]]$ une fonction formelle, critique (et nulle) à l'origine ($u \in \mathfrak{m}^2$) , et soit h sa hessienne, c'est-à-dire sa projection dans $\mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}^3 \simeq S^2T^*$. Nous pouvons faire l'hypothèse générique que h est non dégénérée (u est de Morse) mais le problème est beaucoup plus fin. En effet le gradient identifie S^2T^* et $\mathfrak{sp}(T)$, ce qui introduit les valeurs propres de la hessienne h . Pour alléger, je vais supposer le corps de base k algébriquement clos. Les valeurs propres, comme on le voit facilement, vont par couples opposés $\lambda_1, -\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_2, \ldots, \lambda_m, -\lambda_m$. Une première hypothèse générique naturelle consiste à les supposer toutes distinctes ; alors h, considérée comme opérateur linéaire, s'écrit dans des coordonnées conjuguées convenables

$$h = \sum_1^m \lambda_i(-q_i \frac{\partial}{\partial p_i} + p_i \frac{\partial}{\partial q_i})$$

et considérée comme forme quadratique,

$$h = \sum_1^m \lambda_i p_i q_i \ .$$

Cela dit, le théorème suivant remonte à Birkhoff ([9], § 30) .

THEOREME. <u>Soit</u> $u \in \mathfrak{m}^2$. <u>Supposons les valeurs propres</u> $\pm\lambda_1, \ldots, \pm\lambda_n$ <u>de la hessienne de</u> u <u>distinctes, et libres de toute relation linéaire entière</u>

$$\sum_1^m \lambda_i(\alpha_i - \beta_i) = 0 \quad \underline{\text{avec}} \quad \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N} \ , \ \sum_1^m (\alpha_i + \beta_i) \leq 2r \ .$$

<u>Il existe alors un système de coordonnées formelles conjuguées,</u> p_i , q_i , <u>telles que dans ces coordonnées,</u>

$$u = F(p_1q_1, p_2q_2, \ldots, p_mq_m) \text{ modulo } \mathfrak{m}^{2r+1} \ .$$

<u>Un tel système de coordonnées n'est pas unique, mais les fonctions</u> $h_i = p_iq_i$ <u>sont canoniquement attachées à</u> u <u>et à la structure symplectique</u>, modulo $\mathfrak{m}^{2r+1}$, <u>et modulo l'ordre et le signe des</u> h_i .

La fonction F est donc canoniquement attachée à u , modulo $\mathfrak{m}^r$ et modulo l'ordre et le signe de ses arguments. Noter que la condition sur les valeurs propres, pour r fixé, est réalisée sur un ouvert de Zariski de S^2T^* . (Si par contre, on passe à la limite $r = \infty$, la condition devient l'indépendance sur $\mathbb{Z}$ des λ_i , condition qui n'est plus générique dans un sens aussi sain).

Considérons le développement de la fonction caractéristique F :

$$F(h_1, \ldots, h_m) = \sum_1^m \lambda_i h_i + \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^m \\ |\gamma| \geq 2}} c_\gamma h^\gamma \quad (\mathrm{mod.}\ \mathfrak{m}^{r+1}) .$$

Il s'avère que les c_γ (qui sont des invariants sur $\mathfrak{m}^2$ par SG, définis sur un ouvert générique, de poids 1) s'expriment comme des quotients $N_\gamma(u)/D_\gamma(u)$ d'un numérateur $N_\gamma(u)$, qui est polynomial en les coefficients de u d'ordre > 2, et en les valeurs propres λ_i de la hessienne ; par un dénominateur $D_\gamma(u)$ qui est un polynôme $Sp(T)$-invariant en la hessienne de u ($c_\gamma(u)$ a pour domaine de définition l'ouvert $D_\gamma \neq 0$) . Naturellement, $c_\gamma(u)$ et $N_\gamma(u)$ ne sont canoniques que modulo l'action du groupe W qui permute et change de signe les λ_i (donc les h_i) : c'est le groupe de Weyl de $Sp(T)$, évidemment, et c'est aussi le groupe de Galois de l'équation aux valeurs propres de la hessienne $h \in \mathfrak{sp}(T)$. En d'autres termes, les $N_\gamma(u)$ dépendent <u>algébriquement</u> de la hessienne de u, et polynomialement du reste du développement. Il résulte du théorème de Birkhoff que tout invariant sur $\mathfrak{s} = \mathfrak{m}^2$, d'ordre fini, algébrique en la hessienne et polynomial (resp. rationnel) en le reste du développement s'exprime de façon unique à l'aide des N_γ (resp. des c_γ) . On obtiendra donc les invariants polynomiaux sur $\mathfrak{m}^2$ en formant des expressions polynomiales W-invariantes en les N_γ : il est manifeste qu'on déborde largement l'image $j^*(I_S(\mathfrak{sp}))$. Malheureusement, il paraît laborieux de préciser le degré des dénominateurs D_γ, donc des N_γ, et donc des éléments de $I_S(\mathfrak{s}) \setminus j^*(I_S(\mathfrak{sp}))$; dans l'attente d'applications intéressantes, la question ne m'a pas semblé mériter trop d'attention.

REFERENCES.

[1] C. GODBILLON , Cohomologie d'algèbres de Lie de champs de vecteurs formels ; séminaire Bourbaki n°421 (1972-73).

[2] J. VEY , Sur la cohomologie des champs de vecteurs symplectiques formels ; C.R.A.S. t. 280 (24 mars 1975) p. 805.

[3] V.I. ROSENFELD , Cohomology of some infinite dimensional Lie algebras ; Funktional Analisis i ego prilojenia, vol.5, n°4, p. 845 (1971).

[4] I.M. GELFAND, D.I. KALININ, D.B. FUKS , Cohomology of the Lie algebra of hamiltonian vector fields ; ibidem, vol.6, n°3, pp. 25-29 (1972).

[5] H. WEYL , Classical Groups, Princeton 1946.

[6] Th. VUST , Sur la théorie des invariants des groupes classiques ; Annales de l'Institut Fourier, t. 26, fasc.1 (1976).

[7] J. PERCHIK , Cohomology of hamiltonian and related formal vector field Lie algebras ; à paraître dans Topology.

[8] J. VEY , Déformation du crochet de Poisson sur une variété symplectique ; Commentarii Mathematici Helvetici, vol.50 (1975) p. 421 S .

[9] C. SIEGEL et J. MOSER , Lectures on Celestial Mechanics, Springer 1971.

[10] KOBAYASHI et NOMIZU , Foundations of Differential Geometry.

Jacques VEY
Centre Universitaire de Savoie
et Laboratoire de Mathématiques Pures (associé au C.N.R.S.)
BP 116
38402-ST MARTIN D'HERES