Publications du Département de mathématiques de Lyon

André Roux

Travaux de Shiga sur la cohomologie des algèbres de Lie sur une variété

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1976, tome 13, fascicule 4
, p. 87-100

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1976__13_4_87_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1976 t.13-4

TRAVAUX DE SHIGA SUR LA COHOMOLOGIE DES ALGEBRES DE LIE SUR UNE VARIETE

par André ROUX

1. NOTATIONS ET EXEMPLES.

(1.1) M : variété $\mathscr{C}^{\infty}$ dénombrable à l'infini,

E, W : fibrés vectoriels $\mathscr{C}^{\infty}$ sur M, ε^1, fibré vectoriel trivial de rang 1 sur M.

$\Gamma(E)$: espace des sections $\mathscr{C}^{\infty}$ de E, $\Gamma(\varepsilon^1) = \mathscr{E}$,

$C[E_1,\ldots,E_p;W]$: espace des applications p-linéaires $L : \Gamma(E_1)\times\cdots\times\Gamma(E_p) \to \Gamma(W)$, qui préservent les supports,

$C^p[E;W]$: espace des p-cochaines alternées qui préservent les supports.

Un crochet de Lie $\Phi : (\xi_1,\xi_2) \mapsto [\xi_1,\xi_2]$ sur $\Gamma(E)$ est différentiel si $\Phi \in C^2[E;E]$, une représentation $\phi : \Gamma(E) \to \mathrm{Hom}(\Gamma(W), \Gamma(W))$ de l'algèbre de Lie $(\Gamma(E),\Phi)$ est différentielle si $\phi \in C[E,W;W]$.

Φ et ϕ étant donnés, on a un complexe $\{C^*[E;W], d\}$ où d est donné, pour $L \in C^p[E;W]$ par

$$dL(\xi_1,\ldots,\xi_{p+1}) = \sum_{1\leq s<t\leq p+1} (-1)^{s+t} L([\xi_s,\xi_t],\xi_1,\ldots,\check{\xi}_s\ldots\check{\xi}_t,\ldots,\xi_{p+1})$$

$$+ \sum_{1\leq s\leq p+1} (-1)^{s-1}\phi(\xi_s)L(\xi_1,\ldots,\check{\xi}_s,\ldots,\xi_{p+1}).$$

On cherche à étudier la cohomologie notée $L^*(E;W)$ de ce complexe. Plus particulièrement, on cherche des conditions assurant la finitude de cette cohomologie.

(1.2) .La préservation des supports montre que $\mathscr{C}^p : U \rightsquigarrow C^p[E|_U ; W|_U)$ est un préfaisceau et même un faisceau ; d induit un morphisme de faisceaux, d'où il résulte le complexe de faisceaux

$$\mathscr{C} : 0 \longrightarrow \mathscr{C}^0 \longrightarrow \mathscr{C}^1 \longrightarrow \dots \quad .$$

Le faisceau dérivé associé à $\mathscr{C}$ est noté $\tilde{\mathscr{L}}^*(E;W)$; c'est le faisceau associé au préfaisceau $\mathscr{L}^*(E;W) \rightsquigarrow L^*(E|_U ; W|_U)$.

PROPOSITION. - *Il existe une suite spectrale* $\{E_r^{p,q}, d_r\}$ *qui converge vers* $L^*(E;W)$ *et dont le second terme est*

$$E_2^{p,q} = H^p(M, \tilde{\mathscr{L}}^q(E;W)).$$

PREUVE. - Soit $\mathscr{R}$ une résolution fine de $\mathbb{R}$ (par exemple celle de De Rham). Il suffit de considérer le bicomplexe $\{\Gamma(\mathscr{R} \otimes \mathscr{C}), d\}$.

On rappelle que M est dit de *type fini* si, pour tout faisceau $\mathscr{F}$ localement constant et de type fini (i.e. dim $\mathscr{F}_x < +\infty \ \forall x \in M$), on a dim $H^*(M,\mathscr{F}) < +\infty$. Par exemple, si dim $H^*(M,\mathbb{R}) < +\infty$ et $\pi_1(M)$ fini, alors M est de type fini.

COROLLAIRE. - *Si* M *est de type fini et si* $\tilde{\mathscr{L}}(E;W)$ *est un faisceau localement constant de type fini, on a* dim $L^*(E;W) < +\infty$. *Si de plus,* M *est simplement connexe (donc* $\mathscr{L}^*(E;W)$ *simple), on a*

$$\dim L^p(E;W) \leq \sum_{q+r=p} (\dim H^q(M,R)) \times (\dim L^r(E_x;W_x)).$$

(1.3) Pour la cohomologie de Gelfand-Fuks proprement dite, l'aspect faisceautique n'est vrai que si on prend l'algèbre de Lie des champs de vecteurs à supports compacts.

Le cas le plus connu est celui du complexe de Losik

$$\mathscr{L} : \{C^*[\tau(M), \varepsilon^1], d\}$$

$\mathscr{U}(M) = \Gamma(\tau(M))$ opérant par dérivation de Lie sur $\mathscr{E} = \Gamma(\varepsilon^1)$. Dans ce cas, $\tilde{\mathscr{L}}^*$ est un faisceau simple de fibre $H^*(U(n), \mathbb{R})$ et, $E(\tau^{\mathbb{C}})$ étant le U(n)-fibré principal sur M associé au complexifié $\tau(M) \otimes \mathbb{C}$, on a

$$L^*(\tau(M);\varepsilon^1) = H^*(E(\tau^{\mathbb{C}}), \mathbb{R}).$$

On peut aussi considérer le cas où $\mathcal{U}(M)$ opère par dérivation de Lie sur l'espace des tenseurs de type (a,b) , ou encore considérer la représentation adjointe de $\mathcal{U}(M)$. Enfin, on peut se restreindre à des sous-algèbres de Lie de $\mathcal{U}(M)$ (définies, par exemple, par des feuilletages de M).

2. STRUCTURE DE $C^p[E;W]$

(2.1) On pose les notations suivantes :

J^kE : fibré vectoriel des k-jets des sections de E,

$\Lambda^p J^k E$: puissance extérieure p-ième de J^kE,

$C_k^p(E,W) = \mathrm{Hom}(\Lambda^p J^k E, W)$: fibré vectoriel des morphismes $\mathcal{C}^\infty$ de $\Lambda^p J^k E$ dans W.

La projection $J^{k+1}E \to J^kE$ définit $C_k^p(E,W)$ comme sous-fibré de $C_{k+1}^p(E,W)$.

LEMME. - $C^p(E,W) = \lim\limits_{\to k} C_k^p(E,W)$ *est un fibré vectoriel sur* M *de fibré* $\mathbb{R}^\infty = \lim\limits_{\to} \mathbb{R}^n$.

La restriction à un compact K d'une section continue ξ de $C^p(E,W)$ se factorise dans un $C_k^p(E,W)|_K$. On dit que ξ est $\mathcal{C}^\infty$ si, pour tout compact K, $\xi|_K$ appartient à $\Gamma(C_k^p(E,W))|_K$.

Soit $\Gamma(C^p(E,W))$ l'espace des sections C^∞ de $C^p(E,W)$. On a

$$\Gamma(C^p(E,W)) = \lim_{\leftarrow k} \Gamma(C^p(E,W))|_K = \lim_{\leftarrow K}\lim_{\to k} \Gamma(C_k^p(E,W))|_K .$$

(2.2) Soit $j_k \in C[E,J^kE]$ l'extension aux k-jets. Pour $L \in \Gamma(C_k^p(E,W))$, on a $L\circ(\Lambda^p j_k) \in C^p[E;W]$. Il en résulte donc un homomorphisme $j^k : L \mapsto L\circ (\Lambda^p j_k)$ de $\Gamma(C_k^p(E,W))$ dans $C^p[E;W]$.

De plus, les j_k sont compatibles avec les inclusions $C_k^p(E,W) \hookrightarrow C_{k+1}^p(E,W)$; on définit $j|_K = \lim\limits_{\to k} j^k|_K : \lim\limits_{\to k} \Gamma(C_k^p(E,W))|_K \to C^p[E;W]\big|_K$,
et $j = \lim\limits_{\leftarrow k} j|_K : \Gamma(C^p(E,W)) \to C^p[E;W]$.

PROPOSITION. - (Peetre. $j : \Gamma(C^p(E,W)) \to C^p[E;W]$ *est un isomorphisme.*

PREUVE. - Voir [1] pour p=1. On raisonne ensuite par récurrence sur p.

Par j, on identifie $\Gamma(C^p(E,W))$ à $C^p[E;W]$ $C^p_k[E;W] = \Gamma(C^p_k(E,W))$ est le sous-espace des cochaines d'ordre $\leqslant$ k. On a $C^p[E;W]|_K = \bigcup_k C^p_k[E,W]|_K$.
Le complexe $\mathscr{C}$ est k-admissible si, pour $\ell > k$, $\mathscr{C}_\ell = \{C^*_\ell[E;W], d\}$ est un complexe bien défini (i.e. si $C^*_\ell[E,W]$ est stable pour d). Si de plus, $\mathscr{C}_\ell$ est elliptique - resp. si $\mathscr{C}_\ell \to \mathscr{C}$ est un quasi-isomorphisme-, on dit que $\mathscr{C}$ est k-*elliptique* - resp. k-*stable* - .

Par exemple, le complexe de Losik est 0-elliptique ($\mathscr{L}_o$ est le complexe de De Rham) et 1-stable.

(2.3) On a la structure locale d'un $L \in C^p[E,W]$, par la proposition (2.2). De façon précise, soit U un ouvert relativement compact tel que $\bar{U}$ soit inclus dans une carte de coordonnées $\{x_1,\ldots,x_n\}$, au-dessus de laquelle E et W sont trivialis s. $\{e_1,\ldots,e_s\}$ et $\{f_1,\ldots,f_t\}$ étant des bases des fibres génériques de E et W, des éléments $\sigma \in \Gamma(E)|_{\bar{U}}$ et $\tau \in \Gamma(W)|_{\bar{U}}$ s'écrivent, pour $x \in \bar{U}$,

$$\sigma(x) = \sum_\lambda \sigma^\lambda(x) e_\lambda \qquad \text{et} \qquad \tau(x) = \sum_\beta \tau^\beta(x) f_\beta$$

avec σ^λ et $\tau^\beta \in \mathscr{E}|_{\bar{U}}$. Pour $L \in C^p[E;W]|_{\bar{U}}$, il existe k tel que l'on ait

$L \in C^p_k[E;W]|_{\bar{U}}$ et alors, $L|_{\bar{U}}$ s'écrit

$$L = \sum_{\beta,\lambda,A} L^{\beta,A_1,\ldots,A_p}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_p} \, \omega^{\lambda_1}_{A_1} \wedge\ldots\wedge \omega^{\lambda_p}_{A_p} \otimes f_\beta \quad ,$$

avec $L^{\beta,A_1,\ldots,A_p}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_p} \in \mathscr{E}|_{\bar{U}}$ $\omega^\lambda_A(\sigma) = \dfrac{\partial^{|A|}}{\partial x^A}(\sigma^\lambda)$, $o \leqslant |A| \leqslant k$.

3. REPRESENTATION DIFFERENTIELLE DEFINIE PAR UNE REPRESENTATION DE $G(k)$

(3.1) Soit $\mathfrak{a}_n$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs formels sur $\mathbb{R}^n$.
$L_h = \{\sum_\mu a^\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \mid \forall_\mu \text{ ord } a^\mu > h\}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{a}_n$ et un idéal de L_o.
$\mathfrak{a}_n$ est munie de la topologie de Krull définie par la suite

$$\mathfrak{a}_n \supset L_o \supset L_1 \supset \ldots \; .$$

Soient G le groupe des germes de difféomorphismes de $\mathbb{R}^n$ de source et de but o, et G(h), le groupe de Lie des h-jets $[\phi]_h$ des ϕ de G. On a

$$G(h) \simeq G\ell(n,\mathbb{R}) \times \prod_{2 \leq k \leq h} \mathscr{L}^k_s (\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n),$$

$$\underline{G(h)} \simeq \prod_{1 \leq k \leq h} \mathscr{L}^k_s(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n) \simeq L_o/L_h.$$

LEMME. - *Le groupe structural de* $J^{h-1}\tau(M)$ *est réductible à* G(h).P(h) *étant le* G(h)*-fibré principal associé à* $J^{h-1}\tau(M)$*, on a*

$$J^{h-1}\tau(M) \simeq P(h)\times_\sigma \mathfrak{a}_n/L_{h-1}.$$

(3.2) ρ étant une représentation de G(h) dans un espace vectoriel V de base $(e_\alpha)_{1 \leq \alpha \leq \nu}$, soit $d\rho$ la représentation de $G(h) = L_o/L_h$ dans V. On considère $d\rho$ comme une représentation de L_o dans V. On a donc un complexe $\{C\ (L_o,V),d\}$ dont la cohomologie est notée $L^*(L_o,V)$.

En fait, si ϕ est une représentation (ou un homomorphisme) continue de L_o dans V, il existe h tel que $\phi(L_h) = o$ et ϕ induit une représentation (ou un homomorphisme) de L_o/L_h dans V. En particulier, on a

$$C^p(L_o,V) = \bigcup_h C^p_h(L_o,V), \text{ où } C^p_h(L_o,V) = C^p(L_o/L_h,V).$$

La différentielle d ne conserve, en général, pas $C^*_h(L_o,V)$ et on peut énoncer des hypothèses d'admissibilité et de stabilité comme dans (2.2).

En exprimant un élément de L_o/L_h par ses composantes $\{\eta^\mu_A\}$ sur la base $\{x^A\frac{\partial}{\partial x_\mu}\ |o < |A| \leq h\ ,\ 1 \leq \mu \leq n\}$, on peut écrire

$$d\rho\{\eta^\mu{}_A\} = \sum_{\alpha,\beta,\mu,A} C^{\alpha}_{\beta}{}^{A}_{\mu}\, \eta^\mu_A\, e^\beta \otimes e_\alpha.$$

On considère le fibré vectoriel $W = P(h)\times_\rho V$ associé à la représentation ρ. Par exemple, pour h = 1, $G(h) = G\ell(n)$ opère sur $\otimes_{a+b} \mathbb{R}^n$ a fois de façon contravariante et b fois de façon covariante ; alors, W est le fibré T(a,b) des tenseurs de type (a,b).

(3.3) Un ouvert coordonné $(U; x_1,\ldots,x_n)$ définit naturellement une **trivialisation** de $P(h)$ donc de $J^{h-1}\tau(M)$ et de W. La base (e_α) de V définit alors une **base** encore notée (e_α) de $\Gamma(W)|_U$ comme $\mathscr{E}(U)$-module. On a

THEOREME ET DEFINITION. - *On définit une représentation différentielle* ρ^*, *dite induite par* ρ, *de* $\mathscr{U}(M)$ *sur* $\Gamma(W)$ *par*

$$\rho^*(\xi)\sigma = \sum_{\mu,\alpha} \xi^\mu \frac{\partial\sigma^\alpha}{\partial x_\mu} e_\alpha + \sum_{\alpha,\beta,A,\mu} C^{\alpha,A}_{\beta,\mu} \frac{\partial^{|A|}\xi^\mu}{\partial x^A}\sigma^\beta e_\alpha$$

où $\xi|_U = \sum_\mu \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}$ *et* $\sigma|_U = \sum_\alpha \sigma^\alpha e_\alpha$.

PREUVE. - Soit $[g]$ l'algèbre enveloppante de g. $[\mathfrak{a}_n]$ et V sont des $[L_o]$-modules (topologiques). $\mathbb{R}[[x_1,\ldots,x_n]] \hat{\otimes} V = \mathrm{Hom}_{[L_o]}([\mathfrak{a}_n],V)$ est un $[\mathfrak{a}_n]$-module à droite. On note $d\rho^*$ cette représentation de $\mathfrak{a}_n$ sur $\mathbb{R}[[x_1,\ldots,x_n]] \otimes V$.

Pour $\xi \in \mathscr{U}(M)$ et $\sigma \in \Gamma(W)$, on a $[\rho^*(\xi)(\sigma)]_x = d\rho^*[\xi]_x[\sigma]_x$ où $[\ ]_x$ est la série de Taylor formelle en x.

N.B. On peut définir intrinsequement ρ^* à partir de ρ.

4. LE FAISCEAU $\mathscr{L}(\tau(M),W)$ EST LOCALEMENT CONSTANT.

(4.1) Generalisation de la suite spectrale d'Hoschild-Serre;.

Soit ρ une représentation d'une algèbre de Lie g dans V et $\mathscr{C} = \{C^*(g,V),d\}$ le complexe associé. Une sous-algèbre h de g définit une filtration de $C^*(g,V)$ par $F^sC^p(G,V) = \{L \in C^p(g,V) \mid L(\xi_1,\ldots,\xi_p) = o$ dès que $p-s+1$ des $\xi_i \in h\}$.

On a $C^p(g,V) = F^\circ C^p \supset F^1C^p \supset \ldots \supset F^{p+1}C^p = o$,

et $dF^sC^p \subset F^sC^{p+1}$.

La suite spectrale $\{E_r^{s,t}, d_r\}$ induite par cette filtration converge vers $H^*(g,V)$ et son 0-ième terme est $E_o^{s,t} = F^sC^{s+t}/F^{s+1}C^{s+t}$, la différentielle étant induite par d (le cas classique de Hoschild-Serre est celui où h est un idéal).

(4.2) Soit U un ouvert relativement compact tel que $\bar{U}$ soit inclus dans une carte de coordonnées $(x_1,\dots,x_n)$. $L \in C^p[\tau(M);W]|_U$ s'écrit

$$L = \sum_\alpha L^\alpha \otimes e_\alpha \text{ , avec } L^\alpha \in C^p[\tau(M),\ \varepsilon^1]|_U \text{ explicitement,}$$

$$L^\alpha = \sum L^{\alpha,A_1,\dots,A_p}_{\mu_1,\dots,\mu_p}\ \omega^{\mu_1}_{A_p} \wedge \dots \wedge \omega^{\mu_p}_{A_p} \quad \text{avec } L^{\alpha,A_1,\dots,A_p}_{\mu_1,\dots,\mu_p} \in \mathcal{E}(M)|_U .$$

LEMME. - *Avec les notations ci-dessus on a*

$$dL = \sum_\alpha (\hat{d}L_\alpha) \otimes e_\alpha + \sum_{\alpha,\beta,\mu,A} C^{\alpha A}_{\beta\mu}\, \omega^\mu_A \wedge L^\beta \otimes e_\alpha ,$$

où d *est la différentielle du complexe de Losik.*

PREUVE. - Se rappeler l'expression de d.

(4.3) On prend ici pour h la sous-algèbre abélienne de $\mathcal{U}(M)|_U$ engendrée par $\{\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}\}$. Pour $\xi \in h$, on a $\omega^\mu_A \xi = o$ pour $A > o$. Donc, F^pC^{p+q} est constitué des $L = \sum L^\alpha \otimes e_\alpha$, avec

$$L^\alpha = \sum L^{\alpha\ A_1\dots A_{p+q-i}}_{\nu_1\dots\nu_i\ \mu_1\dots\mu_{p+q-i}}\ \omega^{\beta_1}\wedge\dots\wedge\omega^{\nu_i}_o \wedge \omega^{\mu_1}_{A_1}\wedge\dots\wedge\omega^{\mu_{p+q-i}}_{A_{p+q-i}} \qquad \text{où } i \leqslant q.$$

Pour $F^{p+1}C^{p+q}$, on aura $i < q$. D'où

LEMME . - $E^{p,q}_o$ s'identifie aux $L = \sum L^\alpha \otimes e_\alpha$ tels que

$$L^\alpha = \sum L^{\alpha\ A_1\dots A_p}_{\nu_1\dots\nu_q,\mu_1\dots\mu_p}\ \omega^{\nu_1}_o \wedge\dots\ \omega^{\nu_q}_o \wedge \omega^{\mu_1}_{A_1}\wedge\dots\wedge\omega^{\mu_p}_{A_p} .$$

On a $d_o : E^{p,q}_o \to E^{p,q+1}_o$. Dans le lemme (4.2) la seconde somme figurant dans l'expression de dL appartient à $F^{p+1}C^{p+q+1}$, donc sa classe est nulle dans $E^{p,q+1}_o$. D'autre part, $\hat{d}$ est une dérivation, donc on a

$$\hat{d}L^\alpha = \sum \hat{d}|L^{\alpha\ A_1\dots A_p}_{\nu_1\dots\nu_q\ \mu_1\dots\mu_p}\ \omega^{\nu_1}_o \dots \omega^{\nu_q}_o) \wedge \omega^{\mu_1}_{A_1} \dots \omega^{\mu_p}_{A_p}$$

$$+ (-1)^q \sum L^{\alpha\ A_1\dots A_p}_{\nu_1\dots\nu_q,\ \mu_1\dots\mu_p}\ \omega^{\nu_1}_o\wedge\dots\ \omega^{\nu_q}_o \wedge \hat{d}\,(\omega^{\mu_1}_{A_1}\wedge\dots\wedge\omega^{\mu_p}_{A_p}).$$

Or, on a $\hat{d}\omega_A^\mu = \sum_{0<B<A} \sum_{\lambda=1}^{n} \binom{A}{B} \omega^\mu_{A-B+\lambda} \wedge \omega^\lambda_B$ pour $A > o$.

Par suite la seconde somme figurant dans l'expression de $\hat{d}L^\alpha$ appartient à $F^{p+1}\, C^{p+q+1}$ donc s'annule dans $E_o^{p,q+1}$. D'où

LEMME. - $d_o[\Sigma L^\alpha \otimes e_\alpha] = [\Sigma d(L^{\alpha\, A_1\ldots A_p}_{\nu_1\ldots\nu_q,\mu_1\ldots\mu_p}\, \omega_o^{\nu_1}\wedge\ldots\, \omega_o^{\nu_q}) \wedge \omega^{\mu_1}_{A_1} \wedge\ldots\wedge \omega^{\mu_p}_{A_p}]$,

où **d** *est la différentielle extérieure classique et* A > o.

En prenant U contractible, le lemme de Poincaré donne

(4.4) PROPOSITION. - $E_1^{p,q} = \begin{cases} o & \text{pour} \quad q > o \\ C^p[\tau(M);W]_c|_U & \text{pour } q = o, \end{cases}$

où $C^p[\tau(M);W]_c|_U$ *est le sous-espace de* $C^p[\tau(M);W]|_U$ *des éléments de la forme* $\Sigma\, L^\alpha \otimes e_\alpha$ *avec* $L^\alpha = \sum_{|A|\geq 1} Y^{\alpha\, A_1\ldots A_p}_{\mu_1\ldots\mu_p}\, \omega^{\mu_1}_{A_1}\wedge\ldots\wedge\omega^{\mu_p}_{A_p}$ *dans lequel les* $Y^{\alpha\, A_1\ldots A_p}_{\mu_1\ldots\mu_p}$ *sont des constantes.*

Or, $C^\alpha[\tau(M);W]_c|_U$ est un sous-complexe de $C^*[\tau(M);W]|_U$; soit i l'inclusion de ce sous-complexe. On peut considérer la suite spectrale de Hoschild-Serre pour chacun de ces complexes et i induit un isomorphisme en degré 1 sur les suites spectrales, d'où un isomorphisme en cohomologie.

De plus, soit θ^A_μ la base duale de $x^A \frac{\partial}{\partial x_\mu}$ (explicitement, on a $< x^A \frac{\partial}{\partial x_\mu}\ , \theta^B_\nu > = A!\delta^{B,\nu}_{A,\mu}$).

Alors, $\omega^A_\mu \to \theta^A_\mu$ induit un isomorphisme de $\{C^*[\tau(M);W]_c|_U, d\}$ sur $\{C^*(L_o,V), d\}$. D'où :

PROPOSITION. - $\mathscr{L}^*$ $(\tau(M),W)$ *est un faisceau localement constant dont la fibre est* $L^*(L_o,V)$.

(4.5) THEOREME. - *Si* M *est de type fini et* **dim**$(L^*(L_o,V)) < +\infty$,
alors dim $(L^*(\tau(M),W)) < +\infty$. *Si de plus* M *est simplement connexe,*
on a $\dim L^p(\tau(M),W) \leq \sum_{q+r=p} ((\dim H^q(M,\mathbb{R})) \times (\dim L^r(\tau_x(M),W_x))$.
(ii) =si $\{C^*(L_o,V),d\}$ *a un rang stable* k, *il en est de même de* $\{C^*[\tau(M);W],d\}$.
(iii) $\{C^*[\tau(M);W],d\}$ *a un rang elliptique* h *où* $\phi(L_h) = o$.

PREUVE. - (i) a déjà été démontré.
(ii) Le sous-complexe $\{C^*_k[\tau(M),W],d\}$ est alors bien défini. On applique la suite spectrale de (1.2) : l'inclusion donne un isomorphisme sur les termes E_1.
(iii) Pour $\ell \geq h$, $\{C^*_\ell[\tau(M);W],d\}$ est bien défini et l'opérateur cobord est un opérateur différentiel d'ordre 1. Localement, la partie principale de cet opérateur est une somme directe de différentielles extérieures. L'ellipticité s'en déduit comme pour le complexe de De Rham.

COROLLAIRE. - (de (iii). *Si* M *est compact et* $\{C^*[\tau(M);W],d\}$ *est de rang stable* k, $L^*(\tau(M);W)$ *est de dimension finie.*

5. CAS OU $L^*(L_o,V)$ EST DE TYPE FINI.

(5.1) Rappels sur les représentations de $\mathfrak{S}_n$ et $G\ell(n;\mathbb{R})$.

Soit $E = \mathbb{R}^n \otimes \ldots \otimes \mathbb{R}^n$ (avec f facteurs).

$\mathfrak{S}_f$ opère sur E par permutation Π des variables et cette opération commute avec la représentation tensorielle standard ρ de $G\ell(n;\mathbb{R})$. On a

$$\Pi(\sigma)\left(\overset{f}{\otimes}\xi_i\right) = \overset{f}{\otimes}\xi_{\sigma^{-1}(i)} \qquad \text{et} \qquad \rho(g)\left(\overset{f}{\otimes}\xi_i\right) = \overset{f}{\otimes} g(\xi_i).$$

Soient $[f_1,\ldots,f_m]$, $f_1 \geq f_2 \geq \ldots \geq f_m > o$, et $f = f_1+\ldots+f_m$. On considère le diagramme de Young :

$$\begin{array}{llll} 1 \quad , & 2 \quad , \ldots , f_m , \ldots , f_1 , \\ f_1+1 \quad , & f_1+2 \quad , \ldots\ldots , f_1+f_2 \quad , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & f. \end{array}$$

Soit P - resp. Q - le sous-groupe de $\mathfrak{S}_f$ laissant invariant chaque ligne - resp. chaque colonne - de ce diagramme. On pose

$$R = \sum_{(p,q)\in P\times Q} \varepsilon(q) \quad \Pi(qp),$$

où $\varepsilon(q)$ est la signature de la permutation q.

A un coefficient multiplicatif près, R est un idempotent. Comme R commute avec ρ, l'image de R est un sous-espace invariant par ρ, et la restriction de ρ à cette image est une représentation irréductible de ρ. En fait, ρ se décompose en la somme de ces composantes irréductibles obtenues par les différents diagrammes de Young.

Pour $\delta \in \mathbb{R}$, on note encore δ la représentation de dim 1 de $g\ell(n)$, $A \mapsto \delta$ trace (A), et on pose $[f_1,\ldots,f_m\ ;\ \delta] = [f_1,\ldots,f_m] \otimes 1 + 1 \otimes \delta$; c'est encore une représentation irréductible de $\mathfrak{g}\ell(n;\mathbb{R})$.

(5.2) L_1 est un idéal de L_o et $L_o L/_1$ s'identifie à $g\ell(n;R)$ par

$$\Sigma\, a^\nu_\mu\, x_\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \mapsto (a^\nu_\mu).$$

On a $L_o = L_1 \oplus g\ell(n;R)$.

Soit ϕ une représentation continue de L_o dans V. On pose $\mathrm{Ker}(\phi) = L_h$.

DEFINITION. - On dit que ϕ est *décomposable* si $\phi|_{g\ell(n;\mathbb{R})}$ se décompose en représentations irréductibles de la forme $[f_1,\ldots,f_m;\delta]$. Ceci signifie que $\phi|_{g\ell(n;\mathbb{R})}$ est complètement réductible et que la restriction de ϕ au centre de $g\ell(n;\mathbb{R})$ a ses valeurs propres réelles. On a alors

$$\phi|_{g\ell(n;\mathbb{R})} = \oplus\ [f_1,\ldots,f_m;\ \delta].$$

On note Δ l'ensemble des représentations $[f_1,\ldots,f_m;\delta]$ figurant dans cette décomposition et vérifiant $f + n\delta \geq o$ et $n\delta$ entier.

A chaque sous-espace de V correspondant à un $[f_1,\dots,f_m;\delta]$, on choisit une base (e_α) de ce sous-espace ; une telle base peut être choisie parmi les $R(e_{i_1}\otimes\dots\otimes e_{i_f})$ où $e_{i_1}\otimes\dots\otimes e_{i_f}$ parcourt une base de $\overset{f}{\otimes}\mathbb{R}^n$, e_i parcourant la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Toutes ces bases prises ensemble forment une base de V. On note (e^α) la base duale.

(5.3) On rappelle que, (θ^μ_A) étant la base duale de $(x^A\frac{\partial}{\partial x_\mu})$, les éléments

$$\theta^{\mu_1}_{A_1}\wedge\dots\wedge\theta^{\mu_p}_{A_p}\otimes e_\alpha\ ,\ 1\leqslant\mu\leqslant n\ ,\ 1\leqslant|A|\ ,\ 1\leqslant\alpha\leqslant\mu\ ,$$

forment une base de $C^p[L_o;V]$, pour un certain ordre total sur les couples (μ,A). Soit $\hat{d}$ l'opérateur cobord sur $C^*[L_o;\mathbb{R}]$ associé à la représentation triviale de $\mathbb{L}_o$ dans $\mathbb{R}$. Comme pour les ω^μ_A , on a :

$$\hat{d}\,\theta^\mu_A=\sum_{0<B\leqslant A}\binom{A}{B}\sum_{\nu=1}^{n}\theta^\mu_{A-B+\nu}\wedge\theta^\nu_B\ .$$

LEMME. - *Soit* $J=\{(\mu,A)\mid o<A$ *et* $A\neq\mu=(0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ *où* 1 *est situé à la* μ*-ième place* . ϕ *étant supposé décomposable, on a*

$$\phi\Big(\sum\gamma^\lambda_B\ x^B\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\Big)=\sum_\alpha\Big(\sum_\mu C^\alpha_\mu\,\gamma^\mu_\mu\Big)\,e_\alpha\otimes e^\alpha+\sum_{\alpha,\beta}\ \sum_{(\mu,A)\in J}\psi^{\alpha A}_{B\mu}\ \gamma^\mu_A\ e_\alpha\otimes e^\beta\ ,$$

où $\psi^{\alpha A}_{B\mu}$ *et* C^α_μ *sont des constantes, et où*

$\sum_{\mu=1}^{n}C^\alpha_\mu=n\delta+f$, *avec* $f=f_1+\dots+f_m$ *si* e_α *provient de* $[f_1,\dots,f_m;\delta]$.

PREUVE. - $x_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ correspond à $\hat{\mu}=\delta^\mu_\mu$ dans $g\ell(n;\mathbb{R})$. Supposons $e_\alpha=\mathbb{R}(e_{i_1}\otimes\dots\otimes e_{i_f})$; on a $\phi(x_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu})(e_\alpha)=\sum_{j=1}^{f}R\big(e_{i_1}\otimes\dots\otimes\hat{\mu}(e_{i_j})\otimes\dots\otimes e_{i_f}\big)+\delta\,e_{i_1}\otimes\dots\otimes e_{i_f}$,

$$=(\alpha\mu+\delta)e_\alpha=C^\alpha_\mu\,e\alpha\ ,$$

α_μ étant le nombre de fois où μ apparait dans $i_1,\dots,i_f$. On a donc bien : $\sum_{\mu=1}^{n}C^\alpha_\mu=f+n\delta$.

(5.4) Dans la suite ϕ est toujours supposée décomposable.

Soit h la sous-algèbre abélienne de $g\ell(n;\mathbb{R})$ constituée des matrices diagonales. h induit une filtration de $\{C^*(L_o,V),d\}$ d'où une suite spectrale de Hoshchild-Serre $(E_r^{p,q},d_r)$. Comme dans le cas du paragraphe 4, on a

LEMME. - $E_o^{p,q}$ *identifie au sous-espace de* $C^{p+q}(L_o,V)$ *constitué des* $L = \Sigma\, L^\alpha \otimes e_\alpha$, *où* $L^\alpha = \sum_{\nu_1<\ldots<\nu_q} \sum_{(\mu,A)\in J} Y^\alpha_{\nu_1\ldots\nu_q,\,\mu_1\ldots\mu_p}{}^{A_1\ldots A_p}\, \theta^{\nu_1}_{\nu_1}\wedge\ldots\wedge\theta^{\nu_q}_{\nu_q}\wedge\theta^{\mu_1}_{A_1}\wedge\ldots\wedge\theta^{\mu_p}_{A_p}$.

On considère la 1-forme (qui ne dépend pas de L mais simplement de ϕ) :

$$\tilde{Q}^\alpha{}^{A_1\ldots A_p}_{\mu_1\ldots\mu_p} = \sum_{\lambda=1}^{n} Q^\alpha_\lambda{}^{A_1\ldots A_p}_{\mu_1\ldots\mu_p}\,\theta^\lambda_\lambda$$

avec $Q^\alpha_\lambda{}^{A_1\ldots A_p}_{\mu_1\ldots\mu_p} = \sum_{j=1}^{p} (\delta^{\mu_j}_\lambda - (A_j)_\lambda) + C^\alpha_\lambda$,

et la q-forme :

$$\tilde{L}^\alpha{}^{A_1\ldots A_p}_{\mu_1\ldots\mu_p} = \sum_{\nu_1<\ldots<\nu_q} Y^\alpha_{\nu_1\ldots\nu_q,\,\mu_1\ldots\mu_p}{}^{A_1\ldots A_p}\,\theta^{\nu_1}_{\nu_1}\wedge\ldots\wedge\theta^{\nu_q}_{\nu_q}.$$

Avec ces notations, on a, pour $L\in E_o^{p,q}$:

$$L = \sum_{\alpha,(A,\mu)\in J} \tilde{L}^\alpha{}^{A_1\ldots A_p}_{\mu_1\ldots\mu_p}\wedge\theta^{\mu_1}_{A_1}\wedge\ldots\wedge\theta^{\mu_p}_{A_p},$$

$$\text{et } d_oL = \sum_{\alpha,(A,\mu)\in J} \tilde{Q}^\alpha{}^{A_1\ldots A_p}_{\mu_1\ldots\mu_p}\wedge\tilde{L}^\alpha{}^{A_1\ldots A_p}_{\mu_1\ldots\mu_p}\wedge\theta^{\mu_1}_{A_1}\wedge\ldots\wedge\theta^{\mu_p}_{A_p}.$$

De ceci, il résulte immédiatement :

THEOREME. - $E_1^{p,q} = \{\sum_{\alpha,(\mu,A)\in J} \tilde{L}^\alpha{}^{A_1\ldots A_p}_{\mu_1\ldots\mu_p}\wedge\theta^{\mu_1}_{A_1}\wedge\ldots\wedge\theta^{\mu_p}_{A_p} \mid \tilde{Q}^\alpha{}^{A_1\ldots A_p}_{\mu_1\ldots\mu_p} = o\}$.

La condition $\tilde{Q}^\alpha{}^{A_1\ldots A_p}_{\mu_1\ldots\mu_p} = o$ signifie que, pour tout $\lambda\in\{1,\ldots,n\}$, on a

$$o = Q^\alpha_\lambda{}^{A_1\ldots A_p}_{\mu_1\ldots\mu_p} = \sum_{j=1}^{p} \{\delta^{\mu}_j - (A_j)_\lambda\} + C^\alpha_\lambda.$$

Comme les $(A_j)_\lambda$ sont entiers, il doit en être de même des C^α_λ. On peut donc ne considérer que les α vérifiant cette condition. De plus, on doit avoir

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \left(C^\alpha_\lambda + \sum_{j=1}^{p} \{ \delta_j^{\mu_j} - (A_j)_\lambda \}\right) = o \text{ , c'est-à-dire :}$$

$$f + n\delta = \sum_{\lambda=1}^{n} C^\alpha_\lambda = \sum_{j=1}^{p} \sum_{\lambda=1}^{n} (A_j)_\lambda - \delta_\lambda^{\nu_j} = \sum_{j=1}^{p} (|A_j|-1) \geq |A_j|-1 \geq o.$$

On a donc

PROPOSITION. - $\tilde{Q}^{\alpha, \begin{smallmatrix} A_1 \dots A_p \\ \nu_1 \dots \mu_p \end{smallmatrix}} = o$ *entraine* C^α_λ entier $\forall \lambda = 1,\dots,n$ et $n\delta$ entier

(e_α *correspondant à* $[f_1,\dots,f_m ; \delta]$ *et* $1 \leq |A_j| \leq f+n\delta+1$).

THEOREME. - [2]. *Soit* $\ell = \max\{f+n\delta+1 \ [f_1,\dots,f_m;\delta] \in \Delta\}$ *et soit* $k = \max(h,\ell)$ *où* $\phi(L_h) = o$. *Alors*, $\{C^*(L_o,V),d\}$ *est* k-*stable et par suite* $L^*(L_o,V)$ *est de dimension finie (i.e.* $L^*(L_o/L_k,V) \cong L^*(L_o,V)$).

PREUVE. - $\{C^*_k(L_o,V),d\}$ est un sous-complexe bien défini de $\{C^*(L_o,V),d\}$ car $k \geq h$. Soit $\{E_r^{p,q}(k),d_r\}$ la suite spectrale de Hoshchild-Serre définie par h sur $\{C_k(L_o,V),d\}$. On a $E_1^{p,q}(k) = E_1^{p,q} \cap C_k^{p,q}(L_o,V)$. Comme $k \geq \ell$, on a (par la proposition ci-dessus) $|A_j| \leq k$; donc, $\forall\ \xi \in L_k$, on a $\theta_{A_j}^{\mu_j}(\xi) = o$ et $\theta_{\nu_i}^{\nu_i}(\xi) = o$. D'où, $E_1^{p,q} \subset C_k^{p+q}(L_o,V)$. Alors, l'inclusion $i_k : \{C^*_k,d\} \hookrightarrow \{C^*,d\}$ définit un isomorphisme de $E_1^{p,q}(k)$ sur $E_1^{p,q}$, d'où un isomorphisme de $L\,(L_o/L_h,V)$ sur $L^*(L_o,V)$ qui est donc de type fini.

REMARQUES. - 1 - Si $\Delta = \emptyset$ (par exemple $n\delta$ non entier pour tous les δ), on a $E_1^{p,q} = o$ donc $L^*(L_o,V) = o$.

2 - On a toujours $\chi\,(L_o,V) = \chi\,(L_o/L_k,V) = \Sigma(-1)^p \dim C^p(L_o/L_k,V)$
$= \Sigma(-1)^p \dim(A^p(L_o/L_k)^* \otimes V) = o.$

(5.5) De l'étude locale et globale, on déduit :

THEOREME 2 . - *Si* $d\rho\,|_{g\ell(n,\mathbb{R})}$ *est décomposable, alors* $L^*(\tau(M),W)$ *est de type fini. Si de plus,* $\Delta \neq \emptyset$ *, alors* $L^*(\tau(M),W) = o$.

COROLLAIRE. - *Si* $d\rho|_{g\ell(n;\mathbb{R})}$ *est une représentation rationnelle irréductible sur un espace de tenseurs covariants, alors* $L^*(\tau(M),W) = o$. *En particulier, on a* $L^*(\tau(M),\tau(M)) = o$.

PREUVE. - On a alors $d\rho|_{g\ell(n;\mathbb{R})} = [f_1,\ldots,f_m;\delta]$ avec $f+n\delta < o$.

COROLLAIRE. - $L^*(\tau(M),T_a^b)$ ***est nul*** *si* $a > b$ *et a un rang stable* $= \max(1,b-a+1)$ *si* $a \leq b$.

PREUVE. - La dérivée de Lie peut être obtenue comma la représentation différentielle induite par la représentation canonique ρ de $g\ell(n,R)$ sur $T_a^b(R^n)$. Dans ce cas, on montre que $\rho = \oplus\,[f_1,\ldots,f_m;\delta]$ avec $f = f_1+\ldots+f_m = (n-1)a+b$ et $\delta = -a$.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] NARASIMHAN, Analysis on real and complex manifolds.Advanced studies in pure mathematics Masson (Paris 1968).

[2] K. SHIGA, *J. Math. Soc. Japan,* 26 (1974), p. 324-361.

A. ROUX
Département de Mathématiques
Université Claude Bernard
43, bd du 11 novembre 1918
69621 VILLEURBANNE